Изв.вузов «ПНД», т.4, № 6, 1996 УДК 531

О ФОРМАЛИЗАЦИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЛАДКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.Н. Чуканов

Предложен метод формализации взаимодействия гладких нелинейных динамических систем с использованием двухпараметрических лиевых групп. Метод может быть применен для линейных динамических систем и обобщен на нелинейные динамические системы. Рассмотрен пример взаимодействующих нелинейных динамических систем, которые при линейном рассмотрении являются невзаимодействующими.

Введение

В классических работах Р.Калмана [1] разработаны ранговые методы исследования линейных динамических систем, а именно, исследование управляемости и наблюдаемости этих систем. Системный подход Р.Калмана основан на учете взаимного влияния компонент вектора состояния систем, которое приводит к зависимости эволюции одной из компонент вектора состояния при возмущении другой компоненты вектора состояния.

Используя ранговые методы исследования Р.Калмана, возможно провести формализацию взаимодействия линейных динамических систем. Однако исследование взаимодействия нелинейных динамических систем осуществимо только после линеаризации этих систем.

1. Постановка задачи

Учет нелинейной структуры взаимного влияния компонент вектора состояния систем может привести к изменению размерности пространства управляемости и наблюдаемости гладких нелинейных динамических систем. Для учета нелинейной структуры взаимного влияния компонент вектора состояния систем в работе используется аппарат групп Ли [2].

Для векторов состояния гладкой нелинейной динамической системы $\mathbf{x}$ и дополнительной динамической системы ξ можно составить диаграмму морфизмов

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}_t & \xrightarrow{e^{-D_\xi}} & \xi_t \\ \Psi_t \downarrow & & \downarrow \Phi_t \\ \mathbf{x}_0 & \xrightarrow[e^{-D_\xi}]{} & \xi_0 \end{array} . \qquad (1)$$

Здесь Ψ_t - неизвестная переходная матрица для гладкой нелинейной системы

$$d\mathbf{x}/dt = \psi(\mathbf{x}), \tag{2}$$

Φ_t - переходная матрица

$$\Phi_t = \mathbf{e}^{t\mathbf{A}} \tag{3}$$

для линейной системы

$$d\xi/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4}$$

$\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}$ - морфизм $\xi \rightarrow \mathbf{x}$ с инфинитезимальным генератором $\mathbf{D}_\xi$

$$\mathbf{D}_\xi = \mathbf{T}(\xi)\partial/\partial\xi \tag{5}$$

и компонентами генератора $\mathbf{T}(\xi)$, определяемыми в Приложении по компонентам вектора $\psi(\mathbf{x})$ методом, аналогичным методу Кэмела-Хори [3]. В дальнейшем указание на зависимость от ξ компонент матрицы $\mathbf{T}$ опускается. Для выполнения условий коммутативности диаграммы (1) должно выполняться соотношение

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi}\Psi_t = \Phi_t\, \mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi} \tag{6}$$

или

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\Phi_t \mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi}\mathbf{x}_0. \tag{7}$$

2. Взаимодействие линейных динамических систем

Рассмотрим взаимодействие двух гладких линейных динамических систем с векторами состояния

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{I}} \\ \mathbf{x}_{\text{II}} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

удовлетворяющими соотношению

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{I}} \\ \mathbf{x}_{\text{II}} \end{pmatrix}\Big|_t = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\text{I,I}}{}^{t\mathbf{A}} & \mathbf{e}_{\text{I,II}}{}^{t\mathbf{A}} \\ \mathbf{e}_{\text{II,I}}{}^{t\mathbf{A}} & \mathbf{e}_{\text{II,II}}{}^{t\mathbf{A}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{\text{I}} \\ \mathbf{x}_{\text{II}} \end{pmatrix}\Big|_{t=0}. \tag{9}$$

При изменении в момент времени t=0 вектора состояния системы α на $\delta\mathbf{x}_\alpha$ вектор состояния системы β изменится на $\delta\mathbf{x}_\beta$ в момент времени t (α,β=I или II)

$$\delta\mathbf{x}_{\alpha t} = \mathbf{e}_{\alpha,\beta}{}^{t\mathbf{A}}\, \delta\mathbf{x}_{\beta 0}, \tag{10}$$

где

$$\mathbf{e}_{\alpha,\beta}{}^{t\mathbf{A}} = \Sigma_{i\geq 0}^{\infty}\left[(t\mathbf{A})_{\alpha,\beta}{}^{[i]}/i!\right]. \tag{11}$$

Для $\mathbf{A}_{\alpha,\beta}{}^{[i]}$ получим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{I,I}}{}^{[i]} &= \mathbf{A}_{\text{I,I}}\mathbf{A}_{\text{I,I}}{}^{[i-1]} + \mathbf{A}_{\text{I,II}}\mathbf{A}_{\text{II,I}}{}^{[i-1]}, \\ \mathbf{A}_{\text{I,II}}{}^{[i]} &= \mathbf{A}_{\text{I,I}}\mathbf{A}_{\text{I,II}}{}^{[i-1]} + \mathbf{A}_{\text{I,II}}\mathbf{A}_{\text{II,II}}{}^{[i-1]}, \\ \mathbf{A}_{\text{II,I}}{}^{[i]} &= \mathbf{A}_{\text{II,I}}\mathbf{A}_{\text{I,I}}{}^{[i-1]} + \mathbf{A}_{\text{II,II}}\mathbf{A}_{\text{II,I}}{}^{[i-1]}, \\ \mathbf{A}_{\text{II,II}}{}^{[i]} &= \mathbf{A}_{\text{II,I}}\mathbf{A}_{\text{I,II}}{}^{[i-1]} + \mathbf{A}_{\text{II,II}}\mathbf{A}_{\text{II,II}}{}^{[i-1]}. \end{aligned} \tag{12}$$

Исследуя ранги матриц $\mathbf{e}_{\alpha,\beta}{}^{t\mathbf{A}}$, можно установить структуру взаимодействия линейных динамических систем [1].

3. Взаимодействие нелинейных динамических систем

Для случая взаимодействия гладких нелинейных динамических систем

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\Phi_t\mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi}\mathbf{x}_0 = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\,\mathbf{e}^{tA}\,\mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi}\mathbf{x}_0, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\Phi_t\mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi} = \begin{pmatrix} \Psi_{I,It} & \Psi_{I,IIt} \\ \Psi_{II,It} & \Psi_{II,IIt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,I}{}^{\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{I,II}{}^{\mathbf{D}_\xi} \\ \mathbf{e}_{II,I}{}^{\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{II,II}{}^{\mathbf{D}_\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,I}{}^{tA} & \mathbf{e}_{I,II}{}^{tA} \\ \mathbf{e}_{II,I}{}^{tA} & \mathbf{e}_{II,II}{}^{tA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{I,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{I,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi} \\ \mathbf{e}_{II,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi} & \mathbf{e}_{II,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi} = \Sigma_{i\geq 0}^{\infty}\,[(\mathbf{D}_\xi)^i/i!] \tag{15}$$

и

$$\mathbf{D}_\xi = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_I\partial/\partial\xi_I & \mathbf{T}_I\partial/\partial\xi_{II} \\ \mathbf{T}_{II}\partial/\partial\xi_I & \mathbf{T}_{II}\partial/\partial\xi_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\xi I,I} & \mathbf{D}_{\xi I,II} \\ \mathbf{D}_{\xi II,I} & \mathbf{D}_{\xi II,II} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{D}_\xi{}^2 = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\xi I,I}\mathbf{D}_{\xi I,I} + \mathbf{D}_{\xi I,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,I} & \mathbf{D}_{\xi I,I}\mathbf{D}_{\xi II,I} + \mathbf{D}_{\xi I,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,II} \\ \mathbf{D}_{\xi II,I}\mathbf{D}_{\xi I,I} + \mathbf{D}_{\xi II,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,I} & \mathbf{D}_{\xi II,I}\mathbf{D}_{\xi I,II} + \mathbf{D}_{\xi II,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,II} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\mathbf{D}_\xi{}^i = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{\xi I,I}\mathbf{D}_{\xi I,I}{}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi I,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,I}{}^{i-1} & \mathbf{D}_{\xi I,I}\mathbf{D}_{\xi II,I}{}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi I,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,II}{}^{i-1} \\ \mathbf{D}_{\xi II,I}\mathbf{D}_{\xi I,I}{}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi II,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,I}{}^{i-1} & \mathbf{D}_{\xi II,I}\mathbf{D}_{\xi I,II}{}^{i-1} + \mathbf{D}_{\xi II,II}\,\mathbf{D}_{\xi II,II}{}^{i-1} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Из (14) следует

$$\begin{aligned}
\Psi_{I,It} &= \mathbf{e}_{I,I}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{I,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{I,II}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{II,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi}),\\
\Psi_{I,IIt} &= \mathbf{e}_{I,I}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{I,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{I,II}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{II,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi}),\\
\Psi_{II,It} &= \mathbf{e}_{II,I}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{I,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{II,II}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{II,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,I}{}^{-\mathbf{D}_\xi}),\\
\Psi_{II,IIt} &= \mathbf{e}_{II,I}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{I,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{I,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi}) + \mathbf{e}_{II,II}{}^{\mathbf{D}_\xi}(\mathbf{e}_{II,I}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{I,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi} + \mathbf{e}_{II,II}{}^{tA}\,\mathbf{e}_{II,II}{}^{-\mathbf{D}_\xi}).
\end{aligned} \tag{19}$$

Исследуя ранги матриц $\Psi_{\alpha,\beta t}$ можно установить структуру взаимодействия гладких нелинейных динамических систем [1].

4. Пример

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$d\xi/dt = \mathbf{A}\xi \tag{20}$$

с матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \tag{21}$$

такой, что ξ_1 и ξ_2 не взаимодействуют, и систему двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x}/dt = \psi(\mathbf{x}), \tag{22}$$

получаемой из (18) отображением $\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}$ с инфинитезимальным генератором

$$\mathbf{D}_\xi = \mathbf{T}\partial/\partial\xi = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \partial/\partial\xi, \tag{23}$$

причем первый член разложения компоненты первого порядка разложения матрицы **T** по ε (см. (П.10)) имеет вид

$$\mathbf{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} \\ T_{21}^{(1)} & T_{22}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Тогда функция ψ (см. (20)) имеет компоненты нулевого порядка разложения по ε

$$\psi^{(0)} = \mathbf{A}\xi = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

и компоненты первого порядка разложения по ε

$$\psi^{(1)} = \mathbf{A}\xi\partial\mathbf{T}^{(1)}/\partial\xi - \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{A}. \tag{26}$$

В соответствии с (7) имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_t &= \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\mathbf{e}^{t\mathbf{A}}\mathbf{e}^{-\mathbf{D}_\xi}\mathbf{x}_0 = \\
&= (\mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{T}^{(1)}\partial/\partial\xi + \ldots)(\mathbf{E} + t\mathbf{A} + \ldots)(\mathbf{E} - \varepsilon\mathbf{T}^{(1)}\partial/\partial\xi + \ldots)\mathbf{x}_0 = \\
&= \{\mathbf{E} + t[\mathbf{A} + \varepsilon(\mathbf{T}^{(1)}\partial\mathbf{A}/\partial\xi - \mathbf{A}\mathbf{T}^{(1)}\partial/\partial\xi)] + \ldots\}\mathbf{x}_0 = \\
&= [\mathbf{E} + t\begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon(A_{11} - A_{22})T_{12}^{(1)}\partial/\partial\xi_2 \\ \varepsilon(A_{11} - A_{22})T_{21}^{(1)}\partial/\partial\xi_1 & A_{22} \end{pmatrix} + \ldots]\mathbf{x}_0
\end{aligned} \tag{27}$$

и при

$$(A_{11} - A_{22})T_{12}^{(1)} \neq 0 \tag{28}$$

имеет место влияние возмущения x_2 на процесс изменения x_1, а при

$$(A_{11} - A_{22})T_{21}^{(1)} \neq 0 \tag{29}$$

имеет место влияние возмущения x_1 на процесс изменения x_2.

Приложение

Определение инфинитезимальных генераторов групп Ли

Использование лиевых групп при исследовании систем нелинейных дифференциальных уравнений основано на соотношениях [2]

$$\begin{aligned}
\psi(\mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\xi) = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\psi(\xi), \\
\psi(\xi) &= \psi(\mathbf{e}^{\mathbf{D}_x}\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{D}_x}\psi(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{П.1}$$

Использование функции $\psi(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ или функции $\psi(\xi)=\xi$ приводит к

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{e}^{\mathbf{D}_\xi}\xi, \\
\xi &= \mathbf{e}^{\mathbf{D}_x}\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{П.2}$$

В (П.1) использованы инфинитезимальные генераторы лиевых групп [2]

$$\mathbf{D}_\xi = \Sigma_i T_i(\xi)\partial/\partial\xi_i,$$
$$\mathbf{D}_x = \Sigma_i T_i^{-1}(\mathbf{x})\partial/\partial x_i, \qquad (\text{П}.3)$$
$$\mathbf{T}_k^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_k(\xi)|_{\xi=x}$$

и морфизм элемента лиевой группы

$$e^{\mathbf{D}} = \Sigma_{k=0}^{\infty} \mathbf{D}^k/k!, \qquad (\text{П}.4)$$

здесь $\mathbf{D} = \mathbf{D}_\xi$ или $\mathbf{D} = \mathbf{D}_x$. В дальнейшем указание на зависимость от ξ компонент T_i и матрицы $\mathbf{T}$ опускается.

Разложим правую часть уравнения движения системы с вектором состояния $\mathbf{x}$ по степеням параметра ε

$$\dot{\mathbf{x}} = \psi(\mathbf{x},\varepsilon) = \Sigma_{k\geq 0}\varepsilon^k \cdot \psi^{(k)}(\mathbf{x}) \qquad (\text{П}.5)$$

с дополнительной системой [3]

$$\dot{\xi} = \psi^{(0)}(\xi), \qquad (\text{П}.6)$$

тогда

$$\dot{\xi} = \psi^{(0)}(\xi) = \psi(\mathbf{x})\partial/\partial\mathbf{x}(e^{\mathbf{D}_x}\mathbf{x}) = \psi_\xi(\mathbf{x}) \qquad (\text{П}.7)$$

или в соответствии с (П.1)

$$\psi^{(0)}(\xi) = \psi_\xi(\mathbf{x}(\xi)) = e^{\mathbf{D}_\xi}[\psi(\xi)\partial/\partial\xi(e^{\mathbf{T}^{-1}\partial/\partial\xi}\xi)], \qquad (\text{П}.8)$$

или в форме разложения в ряд

$$\psi^{(0)}(\xi) = \Sigma_{p,q\geq 0}(-1)^p\mathbf{D}_\xi^q[\psi(\xi)\partial/\partial\xi(\mathbf{D}_\xi^p\xi)]/(p!q!). \qquad (\text{П}.9)$$

В дальнейшем указание на зависимость от ξ функций $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(r)}$ опускается.

Представим $\mathbf{T}$ в виде разложения в ряд по параметру ε

$$\mathbf{T} = \Sigma_{j\geq 1}\varepsilon^j \cdot \mathbf{T}^{(j)}, \qquad (\text{П}.10)$$

тогда

$$\mathbf{D}_\xi^2 = [\Sigma_{j\geq 1}\varepsilon^j \cdot \mathbf{T}^{(j)}]\ \partial/\partial\xi[\Sigma_{j\geq 1}\varepsilon^j \cdot \mathbf{T}^{(j)}]\partial/\partial\xi] = \Sigma_{j\geq 2}\varepsilon^j \cdot \mathbf{d}_2^{(j)}(\xi)\ , \qquad (\text{П}.11)$$

где использованы дифференциальные операторы

$$\mathbf{d}_2^{(j)} = \Sigma_{j1\geq 1, j2\geq 1|j1+j2=j}\mathbf{T}^{(j1)}\partial/\partial\xi[\ \mathbf{T}^{(j2)}\partial/\partial\xi] \qquad (\text{П}.12)$$

и

$$\mathbf{D}_\xi^p = \Sigma_{j\geq p}\varepsilon^j \cdot \mathbf{d}_p^{(j)}, \qquad (\text{П}.13)$$

где использованы дифференциальные операторы

$$\mathbf{d}_p^{(j)} = \Sigma_{j1\geq 1, j2\geq 1|j1+j2=j}\mathbf{T}^{(j1)}\partial/\partial\xi(\mathbf{d}_{p-1}^{(j2)}). \qquad (\text{П}.14)$$

После этого разложение (П.9) может быть переписано в виде

$$\psi^{(0)} = \Sigma_{p,q\geq 0}(-1)^p/(p!q!)(\Sigma_{i\geq q}\varepsilon^i \cdot \mathbf{d}_q^{(i)})[\Sigma_{r\geq 0}\varepsilon^r \cdot \psi^{(r)}\partial/\partial\xi(\Sigma_{j\geq p}\varepsilon^j \cdot \mathbf{d}_p^{(j)}\xi)], \qquad (\text{П}.15)$$

или после преобразования сумм

$$\psi^{(0)} = \Sigma_{p,q\geq 0}(-1)^p/(p!q!)[\Sigma_{i\geq q, r\geq 0, j\geq p, k|i+j+r=k}\varepsilon^k \cdot \mathbf{d}_q^{(i)}\psi^{(r)}\partial/\partial\xi(\mathbf{d}_p^{(j)}\xi)]. \qquad (\text{П}.16)$$

Собирая члены с ε^k, при $k\geq 1$ получим

$$\Sigma_{p,q\geq 0}(-1)^p/(p!q!)[\Sigma_{i\geq q,r\geq 0,j\geq p|i+j+r=k}\mathbf{d}_q^{(i)}\psi^{(r)}\partial/\partial\xi(\mathbf{d}_p^{(j)}\xi)] = 0 \qquad (\text{П}.17)$$

или

$$\Sigma_{i\geq 1,r\geq 0|i+r=k}\mathbf{T}^{(i)}\partial\psi^{(r)}/\partial\xi - \Sigma_{r\geq 0,j\geq 1|j+r=k}\psi^{(r)}\partial\mathbf{T}^{(j)}/\partial\xi + \tilde{\psi}^{(k)} = 0, \qquad (\text{П}.18)$$

где

$$\tilde{\psi}^{(k)} = \Sigma_{p,q\geq 1}(-1)^p/(p!q!)[\Sigma_{i\geq q,r\geq 0,j\geq p|i+j+r=k}\mathbf{d}_q^{(i)}\psi^{(r)}\partial/\partial\xi(\mathbf{d}_p^{(j)}\xi)]. \qquad (\text{П}.19)$$

В соответствии с (П.6) имеем

$$\psi^{(0)}\partial\mathbf{T}^{(j)}/\partial\xi = d\mathbf{T}^{(j)}/dt. \qquad (\text{П}.20)$$

Из (П.18) получим

$$d\mathbf{T}^{(k)}/dt = \Sigma_{i\geq 1,r\geq 0|i+r=k}\mathbf{T}^{(i)}\partial\psi^{(r)}/\partial\xi - \Sigma_{i\geq 1,r\geq 1|i+r=k}\psi^{(r)}\partial\tilde{\mathbf{T}}^{(i)}/\partial\xi + \psi^{(k)} = 0. \qquad (\text{П}.21)$$

Так как в правой части (П.21) отсутствуют $\mathbf{T}^{(l)}$ с $l>k$ и $\partial\mathbf{T}^{(l)}/\partial\xi$ с $l\geq k$, то (П.21) - система линейных дифференциальных уравнений относительно $\mathbf{T}^{(k)}$.

При наличии линейной дополнительной системы

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}\xi \qquad (\text{П}.22)$$

из (П.21) получим

$$d\mathbf{T}^{(k)}/dt = \mathbf{T}^{(k)}\cdot\mathbf{A}+\Sigma_{i\geq 1,r\geq 1|i+r=k}\mathbf{T}^{(i)}\partial\psi^{(r)}/\partial\xi - \Sigma_{i\geq 1,r\geq 1|i+r=k}\psi^{(r)}\partial\mathbf{T}^{(i)}/\partial\xi + \tilde{\psi}^{(k)}. \qquad (\text{П}.23)$$

Для случая $k=1$

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)}\partial\mathbf{T}^{(1)}/\partial\xi - \mathbf{T}^{(1)}\partial\psi^{(0)}/\partial\xi \qquad (\text{П}.24)$$

или

$$\psi^{(1)} = \mathbf{A}\xi\partial\mathbf{T}^{(1)}/\partial\xi - \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{A}. \qquad (\text{П}.25)$$

Библиографический список

1. *Д'Анжело Г.* Линейные системы с переменными параметрами. М.:Машиностроение, 1974. 288с.

Kalman R. On the General Theory of Control Systems // Proceedings First International Congress of the International Federation of Automatic Control. London: ButterWorth,1961. P. 481.

2. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Группы и алгебры Ли. М.:Наука, 1982. 448с.

Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий. М.:Мир, 1987. 304с.

3. *Hori G.* Theory of general pertubations for noncanonical systems // J.Japan. Astron.Soc. 1971. Vol. 23. P. 567.

Джакалья Г.Е.О. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.:Наука, 1979. 320с.

Kamel A.A. Pertubation method in the theory of nonlinear oscillations // Celest.Mech. 1970. Vol. 3, № 1. P. 90.

Омский государственный технический университет

Поступила в редакцию 13.08.96

FORMALIZATION METHOD OF INTERACTION OF SMOOTH NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

S.N. Chukanov

Formalization method of interaction of smooth nonlinear dynamic systems with use two-parametrical Lie groups is offered. The method can be applied for linear dynamic systems and is generalized on nonlinear dynamic systems. An example of interacting nonlinear dynamic systems is considered, which by linear consideration are noninteracting.

Чуканов Сергей Николаевич - родился в 1951 году. Кандидат технических наук (1990). Старший научный сотрудник отдела проблем автоматизации проектирования Института информационных технологий и прикладной математики СО РАН. Доцент Омского государственного технического университета.