



## О ПЕРЕХОДЕ ОТ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ДВИЖЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОМУ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

*С.Я. Герценштейн, Е.Б. Родичев, А.Н. Сухоруков*

Изучены механизмы нелинейного взаимодействия разномасштабных двумерных и трехмерных возмущений в зоне перехода от ламинарного режима гидродинамического течения к турбулентному и создана методика их исследования, основанная на применении к полным нестационарным уравнениям гидродинамики метода Бубнова - Галеркина. Рассмотрены конвективные процессы, градиентные потоки и течения с поверхностями раздела.

Данная статья представляет собой краткий обзор исследований проведенных авторами по нелинейному взаимодействию гидродинамических возмущений в зоне перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Эти исследования были начаты в Институте механики МГУ в 1965 году и ведутся по настоящее время.

Целью работы является решение нелинейных задач теории гидродинамической устойчивости, построение и изучение моделей нелинейного взаимодействия возмущений и механизмов возникновения стохастичности, а также разработка эффективных численных методов решения системы уравнений Навье - Стокса и уравнений Эйлера.

Вопросы, связанные с изучением неустойчивости гидродинамических течений, представляют значительный теоретический и практический интерес для широкого класса явлений. Эти весьма актуальные вопросы тесно связаны с одной из фундаментальных проблем механики сплошной среды - проблемой турбулентности; они привлекали и привлекают внимание многих известных ученых. Интенсивные исследования в этой области обусловлены также некоторыми современными достижениями качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений (теория V-систем, «странные аттракторы», система Лоренца и др.).

В настоящее время исследование различных волновых возмущений становится все более популярным среди механиков, физиков и математиков. Этому вопросу посвящено несколько тысяч статей, ряд сборников, обзоров и монографий. В гидродинамике наиболее подробно исследовано поведение волновых возмущений малой амплитуды. Успехи современной линейной теории гидродинамической устойчивости объясняются созданием эффективной численной методики исследования и широким внедрением ЭВМ.

В линейной теории устойчивости важное место занимает метод Бубнова - Галеркина, впервые обоснованный и обобщенный применительно к

гидродинамическим задачам Г.И. Петровым в 1940 году. В дальнейшем этот метод получил свое развитие в ряде работ, как у нас в стране, так и за рубежом. В последнее время особо широко развиваются различные модификации метода Бубнова - Галеркина, с помощью которых удается исследовать как двумерные, так и трехмерные нестационарные течения [1-5]. Становятся возможными решение нелинейных задач теории гидродинамической устойчивости, построение и изучение нелинейного взаимодействия возмущений и механизмов возникновения стохастичности, а также разработка эффективных численных методов решения системы уравнений Навье - Стокса и уравнений Эйлера. Вместе с тем, безусловно, не утратили своей актуальности и аналитические методы исследования.

В линейной теории большой интерес вызывает рассмотрение устойчивости течений, отличных от стационарных плоскопараллельных (нестационарных, зависящих от двух-трех пространственных переменных, с неоднородными граничными условиями и др.), а также изучение ряда новых физических явлений в астрофизике, в атмосфере, в океане, и в разнообразных технических приложениях.

В нелинейной теории наиболее распространенным является подход Ландау, который предполагает малость амплитуды рассматриваемого волнового возмущения и последующее разложение искомого решения в ряд по этой амплитуде. Наряду с этим в современной нелинейной теории гидродинамической устойчивости, представляющей собой весьма развитое научное направление, широко применяется богатый арсенал и других методов.

В методическом плане можно выделить следующие направления нелинейной теории:

- метод Бубнова - Галеркина и его различные модификации;
- метод Стюарта - Ватсона;
- метод Ляпунова - Шмидта;
- разностные методы;
- численные эксперименты с вихревыми системами;
- вариационные методы;
- энергетические методы и оценки;
- модельные подходы;
- методы сращиваемых асимптотических разложений и др.

Одним из существенных достижений современной теории является рассмотрение устойчивости конечно-амплитудных движений и различных резонансных явлений. Исследования по данной тематике в значительной степени иницируются и обогащаются экспериментом.

Повышенный в последнее время интерес к проблемам нелинейной теории объясняется, в частности, новыми математическими результатами, которые показывают возможность стохастических процессов (так называемых «странных» или «автостохастических аттракторов», аттрактор Лоренца и др.) в системах обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений относительно невысокого порядка (начиная с третьего). Эти результаты по-новому освещают природу стохастических случайных процессов и позволяют совершенно иначе подойти к проблеме возникновения турбулентности в гидродинамике.

Оказывается, что в отличие от известной каскадной теории Ландау, турбулентные режимы могут возникать после конечного числа перестроек течения. Это обстоятельство делает вполне реальным проведение расчетов для стохастических режимов на основе уравнений Навье - Стокса, так как определяющим при этом является нелинейность взаимодействия конечного числа крупномасштабных гидродинамических возмущений, по меньшей мере, для некоторого класса гидродинамических течений вблизи порога возникновения турбулентности.

Следует подчеркнуть, что исследование нелинейного взаимодействия возмущений в гидродинамике представляет собой весьма сложную и малоизученную задачу численного анализа. Небольшое число работ по данной тематике выполнялось, как правило, с существенным использованием предположения о малости амплитуд взаимодействующих возмущений; применялись

обычные разложения по малому параметру, что давало возможность проследить за взаимодействием лишь на начальной стадии. Некоторые из наиболее интересных аспектов нелинейного взаимодействия, в том числе и «странные аттракторы», в силу выбранного метода последовательной линеаризации автоматически исключались из рассмотрения.

Основным содержанием работ [5-7] явились создание и разработка эффективных методов решения нелинейных гидродинамических задач, проведение с их помощью конкретных физических исследований в ряде традиционных разделов теории гидродинамической устойчивости, а также изучение механизмов нелинейного взаимодействия и проблемы возникновения стохастичности.

Существенное продвижение в понимании рассматриваемых физических процессов опирается, прежде всего, на создание и разработку эффективной численной методики исследования, которая позволила рассмотреть нелинейное взаимодействие большого числа разномасштабных возмущений. Эффективность разработанной методики обусловили следующие моменты.

1. Удачный выбор опорных функций. Построенный базис опорных функций содержит в качестве частных решений обычные асимптотические разложения, что обеспечивает чрезвычайно быструю сходимость метода, по крайней мере, вблизи нейтральных кривых. При этом, в частности, учитывается волновая природа искомых функций и по соответствующим переменным решение представляется в виде рядов Фурье.

2. При формировании системы опорных функций  $\psi_k(x,y)$  в пространственном случае, на основе использования полных систем функций вида  $\varphi_n(x)$  и  $g_m(y)$ , комбинационные составляющие конструируются таким образом, что функции низших порядков аппроксимируются с наибольшей точностью. Искомая функция представляется в следующем виде («треугольный алгоритм»):

$$\psi = \sum_{n=1}^N \varphi_n(x) \sum_{m=1}^{N-n+1} A_{nm}(t) g_m(y) = \sum_{n=1}^N B_n(y,t) \varphi_n(x).$$

При этом учитывается, что при условии сходимости ряда вклад старших членов (например,  $B_N$ ) будет достаточно мал, а следовательно их аппроксимация с помощью функций  $g_m$  может быть менее точной, чем для первых членов ряда. При этом необходимое число неизвестных в двумерном случае уменьшается примерно в 2 раза, а в трехмерном приблизительно в 6 раз. Кроме того, в ряде случаев удается примерно в 2 раза уменьшить число опорных функций (по каждой из переменных) за счет учета их свойств четности и нечетности.

3. Создание экономичных вычислительных алгоритмов. Особенно необходимой является разработка экономичных алгоритмов при исследовании нелинейного взаимодействия разномасштабных возмущений с несоизмеримыми волновыми числами. Рассмотрение несоизмеримых волновых чисел, с одной стороны, позволяет изучить нелинейное взаимодействие возмущений со сколь угодно большой разницей масштабов и оказывается экономичным при сильном отличии в размерах волновых возмущений, но, с другой стороны, требует большого дополнительного объема вычислений: так, учет всего двух масштабов увеличивает необходимое машинное время примерно так же, как при переходе от плоских задач к трехмерным.

Наиболее просто, с точки зрения программиста, формирование нелинейных дифференциальных систем производить на каждом шаге интегрирования по времени, вернее, при каждом обращении к процедуре вычисления правых частей. Однако, подобный способ формирования содержит большое число трудоемких логических операций и требует огромных затрат машинного времени.

Для создания реальной возможности проведения систематических численных исследований в работе был создан комплекс программ по повышению эффективности применяемых вычислительных алгоритмов. Основные мероприятия в этом отношении можно свести к следующим пунктам:

а) формирование одномерных массивов  $\{A_n\}$ . Выделение основных типов перемножения этих векторов (всего их оказывается не более двенадцати); однократное составление массивов, в которых запоминается информация о номерах перемножаемых элементов  $(n, k)$ , о номерах элементов, получающихся в результате перемножения, о знаке перемножения и о типе перемножения ( $\sin nx$  на  $\sin kx$  или  $\sin nx$  на  $\cos kx$  и т.п.). При этом коэффициенты при квадратичных членах вида  $A_m A_k$ , их знаки и номера фактически вычисляются не на каждом шаге интегрирования, а однократно;

б) приведение подобных членов; при этом число необходимых вычислений и требуемая память может уменьшиться примерно в 2-3 раза;

в) информация о нелинейных блоках перемножения содержит большое количество чисел. Эта информация с помощью автокода «Madlen» записывается, «запаковывается» непосредственно в ячейки оперативной памяти, причем, в одну ячейку удается поместить номера  $n$  и  $k$  перемножаемых элементов  $A_n$  и  $A_k$ , номер  $m$ , в который записывается ответ, а также знак соответствующего коэффициента, который определяется типом перемножения рядов. Таким образом, с помощью автокода удается в 15 раз увеличить объем информации, которая может быть помещена в быстродействующую оперативную память;

г) разработанные алгоритмы однократного формирования нелинейной системы увеличивают быстродействие первоначальных процедур в рассмотренном диапазоне параметров примерно в 16 раз. Отметим, что одновременная «запаковка» различных типов перемножения оказывается значительно более выгодной, чем составление отдельных блоков; в целом быстродействие увеличивается примерно в 4 раза. Вместе с тем, обращение к блоку перемножения, «распаковка», «запаковка» и прочие программные операции требуют, все-таки, довольно больших затрат машинного времени.

Наиболее радикальным средством «экономии» в этом отношении является «ручной» способ выписывания системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако, такой способ явного выписывания системы очень ненадежен, чрезвычайно трудоемок и фактически возможен лишь для небольших систем, состоящих из 10-30 уравнений.

В работе [7] с помощью компиляторных схем проводится автоматизация такого «ручного» труда. При этом по специальным программам ЭВМ «сама» проводит выписывание системы уравнений и «сама» себе составляет новую программу, в которой эта система явно записана. В компиляторных схемах заранее заготовлены соответствующие символы, которые в нужный момент считываются, создавая в конечном итоге готовую программу. Отметим, что составление этой компиляторной программы может проводиться в рамках «нестандартного сервиса» системы «Редактор», а вводиться в действие после окончания работы «нестандартного сервиса» (как бы при условии наличия этой компиляторной программы до обращения к «нестандартному сервису»). Использование компиляторных схем увеличивает быстродействие применяемых вычислительных алгоритмов примерно в 4 раза.

В целом с помощью всего разработанного комплекса программ удается уменьшить первоначальные времена счета в рассмотренном диапазоне параметров приблизительно на два порядка (в 100 раз).

Несколько слов о быстром преобразовании Фурье. Быстрое преобразование Фурье позволяет вычислить коэффициенты ряда Фурье, который получается в

результате перемножения двух рядов:  $\sum_1^N A_k \sin kx$  и  $\sum_1^N B_k \sin kx$ . При этом, если при обычном способе перемножения требуется  $C_1 N^2$  арифметических операций, то при использовании быстрого преобразования Фурье  $C_2 N \ln N$  операций. Естественно, что при больших значениях  $N$  быстрое преобразование Фурье обладает значительными преимуществами. Однако при небольших значениях  $N$  решающую роль играет сопоставление постоянных  $C_1$  и  $C_2$ . Отметим, что при рассмотрении

трехмерных нестационарных задач гидромеханики число гармоник  $N$  по каждой из пространственных переменных не превышает 10 (так как общее число гармоник, перерабатываемое имеющимися в наличии ЭВМ, не превышает нескольких тысяч).

Таким образом, применение асимптотически более эффективного быстрого преобразования Фурье в рассматриваемом случае оказывается нецелесообразным.

Применение данной методики имеет преимущества перед методами малого параметра принципиального характера: в методах малого параметра, как правило, существенно используется предположение о малости взаимодействующих амплитуд, фактически применяется метод последовательной линеаризации и многие важные аспекты нелинейного взаимодействия из рассмотрения исключаются. Методика обладает и значительными достоинствами при численной реализации на ЭВМ - существенно сокращается число неизвестных, уменьшается порядок рассматриваемых систем, упрощаются алгоритмы и программы.

*Изучение классической задачи Рэлея.* С помощью разработанной методики рассматривается классическая задача Рэлея о конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости, подогреваемого снизу. Учитывается также влияние вращения относительно вертикальной оси. Данный пример чрезвычайно удобен по «техническим» причинам и содержит в себе наиболее характерные для гидродинамики механизмы неустойчивости: «мягкое» и «жесткое» возбуждение, колебательную и монотонную неустойчивость.

Проведенные численные эксперименты [3, 4, 7] продемонстрировали следующий принципиально важный факт: рассмотрение ограниченного числа гармоник дает возможность воспроизвести ряд характерных особенностей, имеющих место при возникновении турбулентного движения. В частности, показано что первоначально наблюдаемые колебания синусоидальной формы с увеличением числа Рэлея оказываются промодулированными низкочастотной составляющей, а затем, при достаточно больших числах Рэлея, наблюдается появление высокочастотных пульсаций, носящих нерегулярный характер.

Показано также, что нелинейное взаимодействие коротковолновых возмущений (неустойчивых по линейной теории) с длинноволновыми возмущениями (устойчивыми по линейной теории) может приводить к «перекачке» энергии в сторону больших масштабов. Наиболее интересно то, что передача энергии сопровождается сложным неустановившимся процессом, который носит случайный характер. При этом проявляется сильная зависимость локальных характеристик течения от начальных данных, средние же характеристики течения оказываются устойчивыми. Интересно, что стохастическое поведение в рассматриваемой динамической системе может возникать внезапно: до некоторого значения параметра системы (скажем, числа Рэлея  $Ra$ ) при  $Ra < Ra^*$  наблюдаются чисто периодические режимы, а уже при  $Ra > Ra^*$  решения системы «скачкообразно» перестраиваются и возникают нерегулярные стохастические колебания [4,7].

Существенно, что полученные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с известными экспериментальными данными (Россиби, 1969). Таким образом, изученная динамическая система достаточно точно отражает свойства решений уравнений Навье - Стокса, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными по возникновению турбулентности.

Рассмотрено также применение разработанной методики к трехмерному случаю конвективной неустойчивости [7]. Проведенные расчеты подтвердили основные результаты, полученные при исследовании двумерных уравнений, и вместе с тем показали возможность существенных количественных отличий, возникающих при достаточно высоких числах Рэлея.

Большое внимание уделено исследованию нелинейного взаимодействия в случае конвективной неустойчивости горизонтального слоя жидкости при наличии вертикальных вибраций [8]. В этом случае проблема «выбора» стояла особенно остро - было не понятно, не только какое из возмущений «выживает», но не было

ясно даже из какой резонансной области. Проведенные численные эксперименты обнаружили, что в определенной области параметров при большой амплитуде вибраций в результате нелинейного взаимодействия «выживают» возмущения из III резонансной области. При достаточно высоких числах Рэлея эти возмущения оказались неустойчивыми по отношению к трехмерным возмущениям.

Рассмотрены также нелинейные конвективные движения в слое бинарной смеси, например, неоднородные растворы соли в воде [9]. Интересно, что основные механизмы нелинейного взаимодействия в этой задаче оказались аналогичны рассмотренной выше задаче о вращающемся слое жидкости. Подтверждена важная роль длинноволновых составляющих. Обнаружены стохастические движения. В области монотонной неустойчивости найдены стационарные трехмерные ячейки («солевые пальцы»).

Значительный методический интерес представляет сопоставление решения задачи с границами, свободными от касательных напряжений (условия Рэлея), с решением задачи, имеющей твердые границы (обычные условия прилипания). Проведенные расчеты подтвердили предположение о несущественном влиянии граничных условий на качественную сторону вопроса (на появление стохастических движений и др.) и вместе с тем позволили более аккуратно провести сопоставление теории с экспериментом.

Заметим, что при исследовании нелинейного взаимодействия возмущений обнаружена большая роль начальных данных: «выживание» того или иного возмущения может зависеть от уровня его начальной амплитуды и, более того, изменение начальной амплитуды возмущений может привести к качественной перестройке конвективного течения. Так, при малой начальной амплитуде возмущений могут образовываться стационарные или периодические движения, а при большой - стохастические.

**Нелинейные колебания в спутных потоках.** С помощью развитых подходов рассмотрены также нелинейные колебания в спутных потоках. Основные результаты в данном направлении получены с помощью модифицированного метода Рэлея. Применение этого метода оказалось достаточно эффективным и дало реальную возможность рассмотрения глубоких стадий нелинейного развития и взаимодействия возмущений. Математическое обоснование применения этого метода в линейном и нелинейном трехмерном случае дается в [2, 5]. Выделим некоторые результаты проведенного численного анализа:

1) амплитуды симметричных относительно оси следа вихревых возмущений примерно на порядок меньше амплитуд несимметричных возмущений;

2) нелинейное взаимодействие первичной моды с высшими гармониками сначала ослабляет обычный экспоненциальный рост, вытекающий из линейной теории, а затем приводит даже к уменьшению амплитуды первичной моды;

3) показана возможность образования «ундertoнов» и существенное перераспределение энергии по спектру в сторону более длинных волн;

4) прослежено развитие крупномасштабных пульсаций на фоне мелкомасштабных. Показано, что при этом интенсивность крупномасштабных колебаний может несколько уменьшаться. Возможна также передача энергии от мелкомасштабных пульсаций к основному, осредненному движению и ослабление интенсивности основного крупномасштабного колебания;

5) взаимодействие развитых волн сильно влияет на средние характеристики течения.

Исследованы также трехмерные колебания. Установлена неустойчивость рассмотренных спутных потоков по отношению к резонансным и нерезонансным возмущениям. Выявлена важная роль поперечных стоячих трехмерных волн типа  $(0, 2\beta z)$ , образующихся в результате взаимодействия двух наклонных к основному потоку волн вида  $(\alpha x, \beta z)$ ,  $(\alpha x, -\beta z)$ .

В некоторых случаях в следе за телом могут образовываться интенсивные вихри кольцевой или спиральной формы. Кольцевые вихри образуются, например,

в результате развития неустойчивости системы из двух прямолинейных вихрей, сходящих с крыльев самолета, и играют важную роль в процессе формирования следа. Спиральные вихри могут возникать, например, за вращающимся винтом. Подобные вихревые образования довольно часто встречаются в самых разнообразных случаях, и исследование их устойчивости представляет определенный интерес. В работе [10] в рамках модели Бетчова проводится численное и аналитическое исследование устойчивости двух вихревых систем: вихревого кольца и вихревой спиральной нити. Показано, в частности, что для вихревого кольца характерно жесткое разрушение, начиная с некоторых конечных значений амплитуды. Причем, уровень этих критических амплитуд резко уменьшается с уменьшением масштаба возмущений. Рассмотрены также резонансные механизмы взаимодействия возмущений и показано, что учет резонансных соотношений позволяет обнаружить существенное расширение области неустойчивых движений.

**Исследования устойчивости пограничных течений.** В работах [6 и др.] рассматривается устойчивость различных пограничных течений (течение Блазиуса, струя Бикли - Шлихтинга и др.), основное внимание уделяется зоне перехода от ламинарного течения к турбулентному, нелинейной эволюции двумерных волн Толмина - Шлихтинга, их трехмерному «короблению» и возникновению высокочастотных пульсаций. Для этого проводится модификация метода Стюарта - Ватсона применительно к течениям, близким к параллельным. Отклонение от параллельного течения предполагается малым и рассматриваются соответствующие разложения. Далее анализируются численные результаты. Учет непараллельности (например, для течения Блазиуса) дает существенное изменение профиля скорости среднего вторичного течения, при этом нелинейная поправка к коэффициенту усиления несколько увеличивается (что приводит к расширению области жесткого возбуждения), а нелинейная поправка к частоте может уменьшаться примерно на 30%. При исследовании автоколебаний в «жестком» режиме разложение по малому параметру проводится вплоть до членов пятого порядка малости.

Проведены также исследования, относящиеся к изучению механизма внезапного «взрыва» мелкомасштабных возмущений, происходящего на третьей стадии турбулизации потока [11]. Теоретическое исследование третьей стадии для пограничного слоя очень сложно и в настоящее время мало продвинуто, так как приходится изучать чрезвычайно сложные нерегулярные режимы, резко меняющиеся и во времени и по пространству. Значительную роль при этом играет возникновение внутри течения крайне неустойчивых нестационарных слоев смешения с профилем скорости, имеющим точку перегиба. Эти «сдвиговые» слои действительно наблюдаются в экспериментах, причем, они существенно нестационарны: их толщина и отвечающий им перепад скоростей быстро изменяются во времени.

В работе [12] с помощью модифицированного метода Рэлея ставится и решается задача об устойчивости периодического по времени плоскопараллельного потока идеальной жидкости и обсуждаются некоторые математические вопросы, связанные с этой постановкой. Показано, что для рассматриваемой задачи, сводящейся к решению системы уравнений в частных производных с периодическими коэффициентами, справедлив аналог теоремы Флоке для обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача об устойчивости сводится к исследованию решений вида  $f(y,t)\exp(\omega t)$ , где  $f(y,t)$  - периодическая по  $t$  функция с тем же периодом  $T$ , что и коэффициенты системы; при этом доказана сходимость метода Рэлея, модифицированного применительно к исследованию устойчивости нестационарных течений, и показано, что рассмотрение более общих начальных данных (по сравнению с обычно используемыми в теории устойчивости при решении задачи на собственные значения методом Рэлея) приводит лишь к появлению чисто нейтральных дополнительных собственных значений.

С помощью разработанной методики проведена серия расчетов по исследованию устойчивости наблюдаемых в эксперименте нестационарных «сдвиговых» слоев. Показана сильная неустойчивость таких течений, получены соответствующие коэффициенты усиления и наиболее «опасные» волновые числа. Представляет интерес и численное подтверждение справедливости теоремы Сквайра для нестационарных течений. Оказывается, что нестационарные потоки идеальной жидкости, так же как и стационарные, более неустойчивы по отношению к двумерным, чем к трехмерным возмущениям. Отметим, что и для трехмерных потоков (например, для несимметричных струй), содержащих различные комбинации пространственных горизонтальных и вертикальных слоев смещения, неустойчивость слоев смещения оказывается определяющей - спектр возмущений объединяет соответствующие двумерные спектры [13].

Проводятся также и непосредственные численные эксперименты (в рамках уравнений Эйлера) с трехмерным «короблением» двумерной волны Толмина - Шлихтинга, возникновением профиля скорости с точкой перегиба и с последующим развитием мелкомасштабных возмущений. Показана важная роль трехмерного «коробления», удаляющего точку перегиба от стенки. Близость точки перегиба к стенке может оказывать существенное стабилизирующее воздействие. Интенсивность высокочастотных колебаний и их обратное влияние на осредненный профиль скорости в трехмерном случае оказывается существенно более мощным, чем в двумерном случае.

Отметим, что вследствие стабилизирующего воздействия стенки течения с точкой перегиба (например, за единичной шероховатостью [1]) могут быть более устойчивыми, чем аналогичные течения, но без точки перегиба. Полученные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с имеющимися эмпирическими данными.

**Устойчивость течений с поверхностями раздела.** Разработанная методика применяется к исследованию неустойчивостей различного рода, в которых одним из основных определяющих факторов являются поверхностные эффекты (неустойчивость Рэлея - Тэйлора, неустойчивость Кельвина - Гельмгольца и др.). Методы решения таких задач, как правило, весьма сходны, так как основные трудности возникают при выполнении динамических и кинематических условий на неизвестных заранее поверхностях. Методика численного исследования, в основном, определяется применением метода Бубнова - Галеркина; граничные условия на поверхностях раздела удовлетворяются с помощью разложения искоемых функций вблизи поверхностей раздела в ряды Тейлора.

При исследовании неустойчивости Кельвина - Гельмгольца главное внимание уделено нелинейной эволюции ветровых волн конечной амплитуды и влиянию на их развитие градиента скорости как в воздухе, так и в воде. Установлено сильное дестабилизирующее влияние градиентов скорости на развитие ветровых волн конечной амплитуды. При этом показана правомерность аппроксимации исходных профилей скорости в воздухе и в воде кусочно-линейными ломаными. Обнаружено обратное влияние ветровых волн конечной амплитуды на основной профиль скорости: вблизи границы раздела скорость воздуха уменьшается, а скорость основного потока в воде увеличивается. В рассматриваемых градиентных потоках установлено также образование низкочастотной модуляции ветровых волн и их неустойчивости по отношению к длинноволновым возмущениям [13].

При изучении неустойчивости Рэлея - Тэйлора основное внимание уделено трехмерным и нестационарным эффектам. Установлено, что учет трехмерности явления приводит к заметно менее интенсивному нарастанию возмущений поверхности раздела по сравнению с двумерным случаем. Самостоятельный интерес представляет исследование Рэлея - Тейлоровской неустойчивости в условиях быстрого нарастания ускорения силы тяжести. При этом показана существенная стабилизация процесса по сравнению с квазистационарными расчетами [14].



**Основные результаты.** 1. Изучены нелинейная эволюция и взаимодействие разномасштабных двумерных и трехмерных возмущений в зоне перехода от ламинарного режима гидродинамического течения к турбулентному и разработана эффективная численная методика исследования, основанная на применении к полным нестационарным уравнениям гидродинамики метода Бубнова - Галеркина [5-7].

2. В исследованиях конвективной неустойчивости, проведенных на базе разработанной методики, установлено следующее.

а. Возможно внезапное возникновение стохастических конвективных движений - до некоторого числа Рэлея  $Ra < Ra^*$  наблюдаются стационарные или периодические решения, а при  $Ra = Ra^*$  решение системы мгновенно перестраивается и становится нерегулярным, стохастическим [4,7].

б. Важна роль «предыстории» конвективных течений (то есть начальных данных задачи): при малой начальной амплитуде возмущений могут наблюдаться периодические режимы, а при достаточно большой - стохастические. При этом число Рэлея, Прандтля и прочие «внешние» параметры задачи фиксированы. Существенно, что в определенной области «внешних» параметров независимо от начальных данных образуются стохастические решения задачи [4,7,9].

в. Имеет место принципиальная возможность возникновения двумерных и трехмерных стохастических конвективных течений при фиксированном, конечном числе взаимодействующих возмущений, а не в результате последовательного включения бесконечного числа возмущений с различными пространственными масштабами и частотами [4].

г. Сильно влияние длинноволновых возмущений на локальные и средние характеристики как стохастических, так и периодических конвективных движений.

3. Для свободных вязких потоков проведено исследование устойчивости и нелинейного взаимодействия разномасштабных двумерных и трехмерных возмущений [5,15].

Установлена неустойчивость двумерных волновых режимов по отношению к крупномасштабным, длинноволновым возмущениям - «ундертонам». Причем, амплитуды длинноволновых составляющих могут даже превышать амплитуду основного тона (и его кратных гармоник) и оказывать сильное влияние не только на спектральные характеристики пульсаций, но и на основной поток.

Показана неустойчивость рассматриваемых двумерных волновых режимов конечной амплитуды по отношению к трехмерным возмущениям и обнаружено, что на нелинейной стадии развития амплитуды трехмерных нерезонансных возмущений могут превышать амплитуду возмущений в резонансном случае. Обнаружено сильное выделение поперечных стоячих трехмерных волн. Выявлено важное влияние начальных данных на процесс отбора характерных масштабов двумерных и трехмерных возмущений.

Объяснено явление стабилизации струйных течений вынужденными высокочастотными вибрациями из определенного диапазона частот. Показано, что высокочастотные мелкомасштабные пульсации интенсивно нарастают в узких слоях смешения на границах струйных потоков (масштаб возмущений соответствует толщине слоя смешения) и быстро «сглаживают» эти резкие границы раздела - профили скорости при этом становятся заметно более плавными, а для таких «сглаженных» профилей скорости нарастание основного крупномасштабного тона происходит существенно менее интенсивно.

Показано, что нелинейное взаимодействие основного тона с мелкомасштабными возмущениями, масштаб которых много меньше толщины слоя смешения, может приводить, наоборот, даже к некоторому увеличению амплитуды основного тона.

Эти исследования были поставлены с целью объяснения обнаруженного Е.В. Власовым и А.С. Гиневским явления ослабления турбулентности в дозвуковых струях при их высокочастотном акустическом возбуждении [16].

4. Для вязких сдвиговых течений прослежена нелинейная эволюция «жестко» возбуждаемых колебаний. Решения построены методом Стюарта - Ватсона, модифицированным в работе применительно к непараллельным течениям

и к высоким асимптотическим разложениям вплоть до порядка порядка малости включительно. Область применимости построенных решений включает некоторую окрестность зоны перехода от «мягкого» режима возбуждения к «жесткому» [6].

Показана неустойчивость полученных волновых режимов конечной амплитуды типа волны Толмина - Шлихтинга по отношению к поперечным трехмерным возмущениям, а также по отношению к мелкомасштабным возмущениям. При этом установлена важная роль точек перегиба, возникающих в мгновенных нестационарных профилях продольной составляющей скорости. Интенсивность этих точек перегиба и их удаление от твердых стенок, близость к которым оказывает стабилизирующее воздействие, в значительной степени определяются развитием трехмерных возмущений. Исследование устойчивости проведено как с помощью асимптотических методов, так и с помощью непосредственных численных расчетов в рамках уравнений Эйлера, учитывающих кроме основной двумерной волны также и трехмерные поперечные и мелкомасштабные возмущения. Полученные результаты находятся в хорошем соответствии с экспериментально наблюдаемой картиной возникновения турбулентности в пограничных слоях, в частности, хорошо описывают «взрывообразный» рост мелкомасштабных пульсаций в зоне так называемых турбулентных пятен.

5. С помощью разработанной методики построены решения некоторых нелинейных задач, связанных с неустойчивостью поверхностей раздела [13,14,17-22].

Установлено сильное дестабилизирующее влияние ненулевых градиентов скорости в воздухе и в прилегающем к поверхности раздела слое воды на нелинейную эволюцию ветровых волн (на неустойчивость Кельвина - Гельмгольца). Показано также дополнительное увеличение скорости основного потока в воде и уменьшение его в воздухе за счет обратного влияния ветровых волн конечной амплитуды на основное течение.

Выявлено, что на нелинейной стадии развития неустойчивости Рэлея - Тейлора трехмерные возмущения нарастают заметно менее интенсивно, чем двумерные, показано также, что учет нестационарности процесса (например, увеличения ускорения во времени) приводит к значительной стабилизации процесса по сравнению с квазистационарными расчетами [20].

Полученные результаты, связанные с исследованием нелинейной эволюции, взаимодействия возмущений и возникновения стохастичности в гидродинамике, а также с разработкой численных методов исследования, основанных на применении метода Бубнова - Галеркина к нестационарным двумерным и трехмерным уравнениям гидродинамики, развивают известные представления теории гидродинамической устойчивости, существенно дополняют популярную «каскадную» теорию возникновения турбулентности, имеют весьма общий характер и широкий диапазон приложений в геофизике, астрофизике и в различных прикладных вопросах.

Разработанная теория дает практическую возможность расчета трехмерных течений в зоне перехода от ламинарного движения к турбулентному и может быть использована для расчета пульсационных и осредненных характеристик течений, в частности, трения и теплопереноса.

Развитые в работе подходы уже нашли применение при анализе когерентных структур в турбулентных подходах, при изучении конвективных движений в стратифицированных течениях и в некоторых других прикладных исследованиях.

## Библиографический список

1. Герценштейн С.Я. О влиянии единичной шероховатости на возникновение турбулентности// Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1966. № 2. С. 163.

2. Герценштейн С.Я. О сходимости метода Рэлея // Докл. АН СССР. 1969. Т.187, № 5. С. 1012.
3. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. О взаимодействии волн конечной амплитуды в случае конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // Докл. АН СССР. 1974. Т.219, № 2. С. 297.
4. Герценштейн С.Я., Шмидт В.М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // Докл. АН СССР. 1975. Т.225, № 1. С.59.
5. Герценштейн С.Я. О применении метода Рэлея к нелинейным и трехмерным задачам // Докл. АН СССР. 1976. Т.231, № 6. С.1319.
6. Герценштейн С.Я., Штемлер Ю.М. Нелинейное развитие возмущений в пограничных слоях и их устойчивость // Докл. АН СССР. 1977. Т.234, № 6. С. 1277.
7. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Шмидт В.М. Взаимодействие трехмерных волн во вращающемся горизонтальном слое жидкости, подогреваемой снизу // Докл. АН СССР. 1978. Т.238, № 3. С.545.
8. Герценштейн С.Я., Рахманов А.И. Конвекция в осциллирующем поле сил и микрогравитация // МЖГ. 1994. № 5. С. 99.
9. Герценштейн С.Я., Родичев Е.Б., Семин В.Н., Шмидт В.М. О нелинейных конвективных движениях в средах с «двойной диффузией» // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 3. С. 570.
10. Герценштейн С.Я., Терещенко А.М. Устойчивость вихревых шнуров // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 3. С. 42.
11. Герценштейн С.Я., Сухоруков А.Н. О трехмерной неустойчивости в невязких течениях // Докл. АН. 1994. Т. 338, № 1. С. 46.
12. Герценштейн С.Я. Об устойчивости нестационарного прямолинейного плоскопараллельного потока идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 2. С. 5.
13. Герценштейн С.Я., Рудницкий А.Я., Сухоруков А.Н. Устойчивость непараллельных пространственных струйных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 21.
14. Герценштейн С.Я., Мусабеков П.М., Рудницкий А.Я., Уразов Ш.Н. Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, №5. С.1073.
15. Герценштейн С.Я., Сухоруков А.Н. О нелинейной эволюции двумерных и трехмерных волн в слоях смешения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 10.
16. Гиневский А.С., Власов Е.В., Колесников А.В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978.
17. Герценштейн С.Я., Чернявский В.М., Штемлер Ю.М. О неустойчивости Рэлея - Тейлора при больших значениях времени // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 8.
18. Герценштейн С.Я., Ромашова Н.Б., Чернявский В.М. О возникновении и развитии ветрового волнения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 163.
19. Востряков В.А., Герценштейн С.Я., Рудницкий А.Я. Устойчивость неосесимметричных струй // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 5. С. 1065.
20. Герценштейн С.Я., Чернявский В.М. Асимптотическая стадия неустойчивости Рэлея - Тейлора // МЖГ. 1989. № 5. С. 8.
21. Герценштейн С.Я., Филанд Л.Т. Устойчивость затопленных струй // МЖГ. 1990. № 1. С. 100.
22. Герценштейн С.Я., Мусабеков П.М., Рудницкий А.Я., Умаркулов К. О распаде наэлектризованных вращающихся капиллярных струй // ИФЖ. 1991. Т.60, № 2. С. 231.

Институт механики  
Московского государственного  
университета

Поступила в редакцию 04.10.94  
после переработки 19.05.95

## LAMINAR-TURBULENT TRANSITION IN THE HYDRODYNAMIC PROBLEMS

*S.Ya. Gertsenshtein, E.B. Rodichev, A.N. Sukhorukov*

The nonlinear mechanisms of nonlinear 2-D and 3-D disturbances interactions in transition zone from laminar flow to turbulent one are investigated. The investigation method based on application of Bubnov - Galerkin procedure to full nonstationary Navier - Stokes equations.

The convective flows, shear flows and with interface are investigated.



*Герценштейн Семен Яковлевич* - родился в 1941 году в Ташкенте, окончил механико-математический факультет МГУ (1964), аспирантуру МГУ (1967). После ее окончания работает в Институте механики МГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (1970) и доктора наук (1988) в области теории возникновения турбулентности. Имеет более 300 публикаций. Один из организаторов известной школы-семинара «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости».



*Родичев Евгений Борисович* - родился в 1955 году в Москве, окончил механико-математический факультет МГУ (1979). После окончания работает в Институте механики МГУ. Является специалистом в области численного моделирования процессов возникновения турбулентности на базе трехмерных нестационарных уравнений Навье - Стокса. Им подготовлена диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.



*Сухоруков Анатолий Николаевич* - родился в 1944 году в Москве, окончил механико-математический факультет МГУ (1966). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1981) в области: механика жидкостей и газа, теория гидродинамической устойчивости. Автор многих статей и докладов по нелинейной теории гидродинамической устойчивости и переходу от ламинарного режима течения к турбулентному. Ученый секретарь многолетней школы-семинара «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости».