



## КОМПЬЮТЕРНАЯ КОНЦЕПЦИЯ ВИХРЕВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

*С.М. Белоцерковский, А.С. Гиневский*

Рассмотрена проблема моделирования турбулентных струйных и отрывных течений несжимаемой жидкости на основе схемы идеальной среды и метода дискретных вихрей. Построение математической модели сдвигового течения при больших числах Рейнольдса базируется на трактовке свободной турбулентности как иерархии вихрей разного масштаба. При этом турбулентное движение рассматривается в общем случае как трехмерное и существенно нестационарное. Турбулентность порождается потерей устойчивости и распадом упорядоченных вихревых образований и превращением их в вихревые ансамбли. Последние, двигаясь вместе со средой, деформируются, захватывают друг друга и образуют как новые макроструктуры, так и мелкие вихри. Существенно, что вихревые движения содержат органически присущий им механизм потери устойчивости и перехода от порядка к хаосу. Полученные с помощью метода дискретных вихрей решения позволяют без использования эмпирических констант найти поля средних скорости и давления, нормальных и сдвиговых рейнольдсовых напряжений, пульсаций давления, корреляции пульсаций скорости и давления, соответствующие масштабы турбулентности, спектры.

### Введение

Выявление механизма турбулентности и создание замкнутых математических моделей турбулентных следов и струй представляет огромный принципиальный интерес. Настоящая работа является важным этапом формирования компьютерной вихревой аэродинамики и осуществления методологии численного эксперимента на базе метода дискретных вихрей (МДВ) в новой области [1-12]. Именно здесь, при моделировании вихревых следов и струй, раскрываются главные особенности и преимущества метода. Концепция в максимальной степени опирается на схему идеальной среды и анализ нестационарных режимов обтекания с образованием поверхностных тангенциальных разрывов.

Основным является дискретное описание явления как по пространству, так и по времени. Можно утверждать, что вихревые движения жидкой среды содержат органически присущий им механизм потери устойчивости и перехода от порядка к хаосу. Он как бы вложен в «генетический код» систем свободных вихрей, а потому его не нужно вносить извне. В этом и заключаются богатство и красота вихревых движений жидкой среды. Корень, из которого произрастает это удивительное древо, заключен в тонкостях близкого взаимодействия бесконечно тонких вихревых нитей. Сингулярность поля индуктивных скоростей

создает то многообразие возможностей, которые заключены в математических моделях, основанных на МДВ.

Излагаемая концепция формировалась в значительной степени авторами и их учениками, начиная с 1970 года. Естественно, что этот процесс происходил под влиянием тех достижений, которыми обогатилась наука о турбулентности за последние два десятилетия. Прежде всего, это относится к установлению важной роли когерентных структур в турбулентном перемешивании в слоях смешения, струях и следах. Когерентные, упорядоченные структуры-сгустки завихренности локализованы в пространстве и отличаются достаточно большим временем существования. Очень важно для развиваемой методологии установление факта слабой зависимости этих явлений от вязкости среды [13-17].

Традиционная теория турбулентных струй и следов базируется на применении приближения пограничного слоя в сочетании с полуэмпирическими моделями турбулентности [18-20]. Недостаток такого подхода состоит, во-первых, в том, что теория содержит эмпирические константы, которые не являются универсальными и, во-вторых, предположение о стационарности течения в этой теории не позволяет учесть наличие в струях и следах крупномасштабных когерентных структур, играющих важную роль в процессах турбулентного смешения. Устранение этого последнего недостатка требует отказа от приближения пограничного слоя и использования полных нестационарных уравнений Навье - Стокса, Эйлера или Рейнольдса. Однако возможности такого подхода ограничены ввиду сложности и громоздкости соответствующих численных решений [11].

В этом плане существенными преимуществами обладает метод дискретных вихрей, позволяющий с наименьшими затратами машинного времени получить решение ряда классических задач о распространении турбулентных струй и следов, а также многих новых задач, которые с помощью традиционных методов не могут быть решены. Необходимо вместе с тем подчеркнуть, что получаемые с помощью МДВ решения содержат более богатую информацию по сравнению с решениями, которые получаются с помощью традиционных подходов [21-28].

Математические модели, созданные на основе МДВ, описывают главные черты развития турбулентных следов, струй и отрывных течений и позволяют определить статистические характеристики турбулентности (моменты 1-го и 2-го порядков). В последние годы ряд исследований подобного рода на базе различных модификаций МДВ был выполнен как отечественными [29,30], так и зарубежными учеными [31-37] из США, Великобритании, Японии.

Интересно отметить, что простейшие, алгебраические модели турбулентности, основанные на предположении, что рейнольдсовы напряжения сдвига в турбулентном сдвиговом течении вызываются переносом завихренности, были развиты Дж. Тейлором в 1915 году для двумерных течений и в 1932 году - для трехмерных течений.

## **1. МДВ при моделировании свободных сдвиговых турбулентных движений жидкости**

При построении математической модели турбулентности будем исходить из сложившегося к настоящему времени понимания ее как иерархии вихрей разного масштаба. При больших числах Рейнольдса наблюдаются пульсации параметров с масштабами от самых больших до весьма малых. Крупномасштабная турбулентность определяется формой обтекаемого тела или сопла, из которого истекает струя, режимом истечения, состоянием внешней среды. Характеристики мелкомасштабной турбулентности в значительной степени описываются универсальными закономерностями. Крупномасштабная турбулентность в основном определяется силами инерционной природы, вследствие чего силами вязкости здесь можно пренебречь. При описании мелкомасштабной

турбулентности в струях и следах на определенном этапе следует вводить в рассмотрение механизм молекулярной вязкости.

Будем моделировать обтекание тела, вихревой след и поверхность струи с помощью дискретных вихрей и решать соответствующую задачу обтекания или истечения струи в нестационарной постановке. Такой подход позволил описывать как возникновение свободных вихрей, так и моделировать их движение, включая процесс распада пелены и образования вихревых ансамблей.

Первая попытка связать возникновение турбулентности с неустойчивостью принадлежит Л.Д. Ландау, соответствующая гипотеза была высказана им еще в 1944 году. Одна из новых идей, получивших сравнительно недавно права гражданства в механике - открытие нерегулярных колебаний в детерминированных динамических системах. Оказалось, что в сравнительно простых системах без видимых случайных источников возмущений возможны сложные, непредсказуемые движения. При этом тенденции к порядку или хаосу в подобных системах обусловлены устойчивостью или неустойчивостью [17].

В настоящее время можно говорить о завершении формирования самостоятельного раздела механики сплошных сред - вихревой механики жидкости и газа. Это - обширные области аэродинамики и гидродинамики, в которых решающая или во всяком случае значительная роль принадлежит влиянию вихревых следов и вихревых границ. В ней МДВ служит адекватным существом проблемы математическим описанием изучаемых явлений. Весьма важно, что МДВ - естественное, удобное и очень эффективное соединение трех сторон проблемы: физики, математики и вычислений на ЭВМ. Очень важным, имеющим фундаментальное значение, является следующее положение: вихревые подходы позволяют в известной мере дать замкнутое математическое описание турбулентного движения в струях и следах.

Расчет вихревой структуры турбулентного следа (определение положений свободных вихрей) ведется путем решения систем дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \frac{u_i}{u_0}, \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \frac{v_i}{u_0}, \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \frac{w_i}{u_0}, \quad i=1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $i$  - номер свободного вихря;  $N$  - число вихрей;  $u_i, v_i, w_i$  - скорости в вершинах вихревой рамки, найденные с учетом влияния всех вихрей;  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  - безразмерные координаты;  $\tau$  - безразмерное время. Полное решение задачи об истечении струи (или обтекании тела) содержит два взаимосвязанных этапа: решение системы линейных уравнений для циркуляции суммарных вихрей на поверхности тела, которые соответствуют граничным условиям о непротекании, и определение положений свободных вихрей. Строго говоря, то и другое следует осуществлять совместно, однако обычно это делается последовательно, с задержкой каждый раз на один временной шаг  $\Delta\tau$ .

Рассматривается весь процесс формирования течения (например, с начала истечения струи). Турбулентная струя (след) моделируется с помощью свободных дискретных вихрей, число которых все время возрастает и может достигать (в зависимости от объема памяти ЭВМ) многих сотен и даже тысяч. Одной из кардинальных является проблема корректного построения вихревых следов и описания макроструктур турбулентных струй. МДВ позволил воспроизвести такие тонкие явления, как сворачивание вихревой пелены в жгуты, образование начального вихря Прандтля, формирование вихревой дорожки Кармана и т.д.

Важной особенностью МДВ является то, что в процессе расчетов происходит отбор возможных («устойчивых») решений. Он может инициироваться специально путем введения возмущений. Но и без этого все алгоритмы в том или ином виде содержат неявные источники возмущений. Например, из-за того, что число свободных вихрей при развитии истечения струи растет. Поэтому даже если картина обтекания тела «в большом»

периодична, начальные условия в соответственные моменты времени не будут строго повторяться. Кроме того, в задачах с симметричными условиями «источником возмущений» бывает разная последовательность расчетов скоростей или циркуляций в симметричных точках. Отметим также, что изучение процесса формирования макроструктур при расчете истечения плоской струи показало явно выраженные когерентные структуры.

В правой части уравнений (1) стоят безразмерные скорости, получающиеся в результате суммирования средних скоростей набегающего потока и их флуктуаций, а также вызванные вихрями на теле и свободными вихрями следа или струи [1, 2, 4, 11, 21, 22]. Задача о развитии следа за телом (об истечении струи) решается совместно с разнесением на расчетный шаг по времени  $\Delta\tau$  и определением циркуляции вихрей, заменяющих тело (поверхность сопла). Для вихрей учитываются граничные условия о непротекании поверхности тела (поверхности сопла).

Турбулентные струи и следы, строго говоря, четырехмерны (три координаты и время). Иначе говоря, даже плоскопараллельные и осесимметричные отрывные и струйные течения ввиду неустойчивости вихревых образований приобретают на некотором расстоянии от начального участка пространственный характер. Численный эксперимент, основанный на полной пространственной модели, подтверждает это. Итак, основным источником возникновения турбулентности при больших числах Рейнольдса является движение большого числа свободных дискретных вихрей. Процесс разрушения регулярных вихревых структур носит трехмерный характер, причем решающую роль в нем играют силы инерционной природы.

В МДВ реализуются два механизма диссипации энергии (диффузии вихрей).

1. Движение свободных вихрей описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями (1). В МДВ нельзя обычным образом вычислять скорости вблизи вихрей в «зоне дискретности» ввиду сингулярности формулы Био - Савара ( $u_i = \Gamma_i / 2\pi r$ ), а если свободный вихрь  $\Gamma_i$  попадает в «зону дискретности»  $\Gamma_j$ , необходимо «сглаживание» скоростей, что эквивалентно соответствующему уменьшению  $\Gamma_i, \Gamma_j$ . Это ведет к срезанию пиков в скоростях, что можно трактовать как «численную диффузию» в МДВ (рис.1).

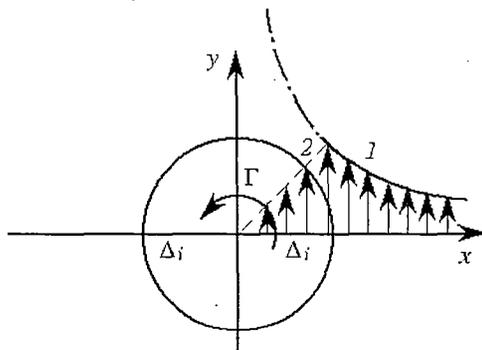


Рис. 1. Скорости, индуцированные вихрем вне и внутри зоны дискретности: 1 - закон Био - Савара; 2 - линейный профиль скорости в зоне дискретности радиусом  $r_0 = \Delta_i$

2. При численном интегрировании уравнений (1) на каждом шаге  $\Delta\tau$  вместо формул

$$\bar{x}_i^{s+1} = \bar{x}_i^s + \int_{\tau_s}^{\tau_s + \Delta\tau} u_i(\tau_1) d\tau_1, \dots \quad (2)$$

в методе Эйлера используются такие

$$\bar{x}_i^{s+1} = \bar{x}_i^s + \bar{u}_i^s \Delta\tau, \dots$$

то есть вместо (1) решаются уравнения типа

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \bar{u}_i + \varepsilon_x, \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \bar{v}_i + \varepsilon_y, \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \bar{w}_i + \varepsilon_z,$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  - малые случайные функции.

Отметим следующие особенности развиваемой концепции. В максимальной степени используются математические модели, основанные на схеме идеальной среды. Нестационарные подходы, обогащенные введением в рассмотрение течений с поверхностями тангенциальных разрывов, позволили раскрыть новые потенциальные возможности указанной схемы. В ряде случаев требуется учет вязких отрывов или диффузии свободных вихрей. Тогда дополнительно привлекаются уравнения нестационарного пограничного слоя [3, 8]. Но и при этом использование численных методов идеальной среды значительно повышает эффективность расчетов.

В МДВ расчетные схемы обтекания различных тел конструируются с помощью простейших вихревых элементов (вихревой отрезок, кольцевой и подковообразный вихри, замкнутые четырехугольные и треугольные вихревые рамки). Очень важно, что индуцируемые ими скорости удовлетворяют уравнению неразрывности, поэтому далее это уравнение можно исключить из рассмотрения. Все используемые в расчетах вихревые элементы строятся с учетом следующих известных **теорем** о вихрях.

***Теорема 1.** Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкой средой, во времени не изменяется.*

***Теорема 2.** Циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему вихревую нить, постоянна вдоль длины нити.*

И присоединенные, и свободные вихри должны удовлетворять этим теоремам.

При конструировании следов в виде вихревых поверхностей и жгутов необходимо удовлетворять следующим **условиям**.

***Условие 1.** Давление на свободных вихревых поверхностях изменяется непрерывно.*

***Условие 2.** При установившемся движении вихревые линии направлены по линиям тока.*

***Условие 3.** При неустановившемся движении свободные вихри движутся по траектории жидких частиц вместе с ними.*

Выявились два преимущества метода, особенно четко видные в рамках схемы идеальной несжимаемой жидкости. Во-первых, он обладает уникальными возможностями по выстраиванию вихревых следов и свободных границ, по отслеживанию их эволюции в процессе развития. Во-вторых, здесь существенно снижается размерность задачи, поскольку нужно следить не за всем пространством, а только за вихрями в следе (струе) и на поверхности тела.

Анализ рассматриваемых задач потребовал определенного расширения понятий, связанных с их математическими постановками, порядком расчетов и особенностями реализации вычислений. Так, изучение сингулярных уравнений теории крыла было бы невозможно без введения понятия главного значения интеграла в смысле Коши. Еще более общим является класс нестационарных задач, в которых учитывается распад вихревых пелен и моделируются турбулентные структуры. Здесь проблема связи схемы явления и организации вычислений оказывается еще более глубокой.

Будем моделировать след или границы струн дискретными вихрями (в плоском случае - точечными вихрями, в пространственном - замкнутыми вихревыми рамками постоянной циркуляции вдоль размаха). Частью краевой задачи обтекания тела и истечения струи является расчет движения этих свободных вихрей под воздействием поля скоростей, важнейшими компонентами которых являются те, которые индуцируют они сами. Однако согласно закону Био - Савара последние сингулярны - они стремятся к бесконечности по мере приближения к оси каждого вихревого отрезка. Из-за этого задача Коши, к которой сводится изучение вихрей, оказывается некорректной и требуется ее регуляризация. Первый шаг в решении этой проблемы очевиден: в МДВ есть

«запретная зона», в которой нельзя определять скорости, вызванные дискретными вихрями, по формуле Био - Савара (см. выше). Это - зона дискретности  $\Delta$ , определяемая расстоянием от вихря до ближайшей расчетной точки. Наиболее естественно во внутренних областях принять линейный закон экстраполяции скоростей от собственных вихрей, положив на самой оси вихревого отрезка скорости равными нулю (см. рис.1). Тогда поле скоростей будет всюду удовлетворять условию Липшица, а задача Коши будет корректна.

Для расчета статистических характеристик турбулентности следует прежде всего вычислить средние значения компонент скорости  $\langle u_i \rangle$  и давления  $\langle p \rangle$  и их пульсации  $u_i'(\tau)$  и  $p'(\tau)$  по формулам

$$\langle u_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t+\tau) d\tau, \quad \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(t+\tau) d\tau, \quad i=1, 2, 3,$$

$$u_i'(\tau) = u_i - \langle u_i \rangle, \quad p'(\tau) = p - \langle p \rangle,$$

после чего определяются и другие характеристики: нормальные и сдвиговые реинльдсовы напряжения, коэффициенты корреляции, спектры и пр.

## 2. Постановка задачи расчета турбулентных струй и следов

Рассмотрим для определенности истечение трехмерной струи в затопленное пространство. Пусть идеальная несжимаемая жидкость заполняет бесконечное пространство, разделенное жесткой непроницаемой стенкой  $S$  (рис. 2, а). Введем

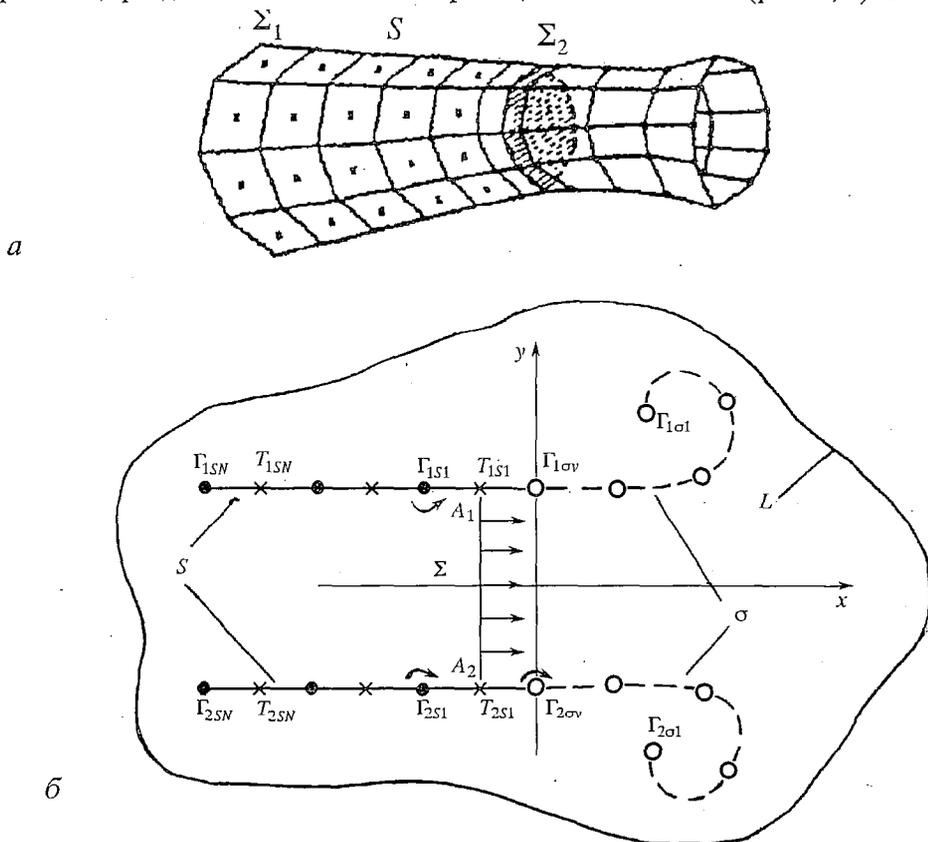


Рис. 2. Расчетная нестационарная модель истечения трехмерной струи  $\Sigma_2$  из сопла  $S$  (а). Здесь волнистые линии - вихри, а крестикки - точки коллокации, где выполняется условие непротекания. Расчетная модель двумерной струи (б)

декартову систему координат, направив  $Ox$  по продольной оси поверхности  $S$ . Поперечные сечения  $x = \text{const}$  (входное и выходное) обозначим  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Введем безразмерные координаты и время, взяв за характерный размер  $r_0$  половину диаметра сечения  $\Sigma_2$  и за характерную скорость - среднюю скорость истечения в сечении  $\Sigma_2$

$$\bar{x}=x/r_0, \quad \bar{y}=y/r_0, \quad \bar{z}=z/r_0, \quad \tau=tu_0/r_0.$$

Объемный расход жидкости через сечение  $\Sigma_2$  будем считать заданной функцией времени

$$Q=Q(t) \text{ или } Q=\text{const.}$$

Задачу об истечении жидкости в затопленное пространство будем решать в полной нестационарной постановке, полагая, что процесс начинается при  $\tau = 0$  и плотности в струе и окружающей ее среде одинаковы. На поверхности  $S$  должно выполняться условие о непротекании, а на боковой границе струи - об отсутствии перепада давления. Вне тела и границы струи параметры жидкости должны удовлетворять уравнениям Эйлера и неразрывности. Заменим поверхность тела  $S$  и границу развивающейся струи вихревым слоем. От непрерывного распределения перейдем к дискретному и станем решать задачу методом дискретных вихрей. При этом граничные условия непротекания будут удовлетворяться в конечном числе точек на поверхности тела. Если обеспечить замкнутость вихревых систем и выполнение теорем о постоянстве циркуляций во времени, то поле скоростей, вызванное системой, потенциально и будет удовлетворять всем уравнениям гидродинамики. Остается обеспечить выполнение граничных условий на  $S$  и условия Чаплыгина - Жуковского о конечности скоростей на выходных кромках сопла. Решение задачи сводится к определению положения свободных вихрей и их циркуляции в каждый момент времени, а затем к расчету полей скорости и давления с последующим расчетом статистических характеристик турбулентности.

Заметим, что дискретная модель свободных вихрей основывается фактически на обобщении условия непрерывности движения по обе стороны вихревой поверхности. Здесь обеспечиваются требования движения вихрей по траекториям соответствующих частиц жидкости и сохранения циркуляции свободных вихрей.

Расчет турбулентных характеристик следов при отрывном обтекании тел или несущих поверхностей требует решения полной нестационарной задачи. При этом внешние условия, геометрия тела, закон движения считаются известными. Кроме того, на поверхности тела должны выполняться граничные условия о непротекании. При огибании острых кромок тонкого крыла или изломов на поверхности тела скорости и давления в идеальной жидкости обращаются в бесконечность. Постулат Чаплыгина - Жуковского о конечности скорости в этих точках устраняет указанную некорректность. Однако, если таких кромок больше одной, с остальных для обеспечения данного условия должны сходиться вихревые пелены. Нахождение циркуляций сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

При поперечном плоском обтекании гладких тел конечной толщины на первый план может выйти роль вязких отрывов. Строго говоря, анализ отрывного обтекания гладких тел, особенно таких, как круговой цилиндр, вообще невозможен без учета вязких эффектов. Определение места отрыва, интенсивности и положения первого свободного вихря, сходящего в поток с поверхности тела, потребовало дополнения расчетных схем моделью нестационарного пограничного слоя.

Автоматически в процессе установления выявляется предельная структура следа или струи «в большом». Она может быть одного из трех типов: стационарной, периодически изменяющейся во времени или обладающей

нерегулярной временной зависимостью. Примером стационарных структур могут служить боковые жгуты на крыльях при безотрывном обтекании. Периодические вихревые структуры типа дорожек Кармана наблюдаются при поперечном обтекании пластины или кругового цилиндра. Упорядоченные (когерентные) структуры иного вида образуются при истечении струи в затопленное пространство.

Остановимся теперь на вычислении давления. Поле давления вне тела в зонах, где существует потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$ , определяется с помощью интеграла Коши - Лагранжа

$$p = \rho \left[ f_*(t) - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right],$$

где  $f_*(t)$  - некоторая функция времени, которая находится в какой-либо точке (обычно на бесконечности). Однако в зонах, заполненных вихрями (внутри следа или струи), потенциал скорости не существует. Здесь приходится обращаться к уравнениям движения Эйлера, разрешенным относительно градиента давления,

$$\nabla p = \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} \right],$$

$$\mathbf{u} = iu + jv + kw, \quad \nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}.$$

В ряде случаев для «визуализации» течения используется способ отмеченных частиц. Он позволяет получить ценную информацию о характере течения, о вовлечении в турбулентное движение незавихренной жидкости. Практически он сводится к тому, что в каждый момент времени с шагом  $\Delta t$  на срезе сопла фиксируется положение 10-20 частиц и далее прослеживается их перемещение вдоль и поперек потока.

Рассмотрим важный вопрос: как моделировать движение свободных вихрей, когда они сближаются столь тесно, что оказываются в зонах дискретности друг друга. При этом их индуктивное взаимодействие ослабляется благодаря регуляризации (см. рис. 1), и такое «спаренное» состояние может сохраняться долго, неоправданно усложняя расчеты. В этом случае логично производить объединение близких вихревых отрезков. Данный прием, естественный для дискретной идеологии, не только улучшает процесс расчетов, но и расширяет возможности моделей путем введения новых способов трансформации вихревых структур.

Еще одна трудность: как справиться с нарастающим числом свободных вихрей, все время сходящих в поток. Чтобы осреднение по времени было законно, необходимо вести счет достаточно продолжительное время. Оно тем больше, чем дальше от тела отстоит изучаемый участок следа или струи. Хотя алгоритмы для определения индуктивных скоростей от вихревых модулей довольно просты и, главное, универсальны, численный анализ трехмерных турбулентных струй и следов наталкивается на серьезные трудности вычислительного характера. Здесь на помощь приходит идея объединения далеких вихрей. Если расстояние от точки, где ищется скорость, до двух вихрей много больше расстояния между ними, эти вихри можно объединить и заменить одним вихрем суммарной циркуляции.

Заметим, что два последних правила относительно объединения очень близких или весьма удаленных вихрей привносят в математические модели еще один новый элемент. Его можно трактовать как механизм, в определенном смысле похожий на процесс диффузии вихрей.

Рассмотрим теперь более подробно расчетные формулы для определения характеристик плоской турбулентной струи. При этом жесткие стенки сопла  $S$  моделируются (рис. 2, б) системой равноотстоящих точечных вихрей.  $\Gamma_{1st}$  и

$\Gamma_{2si}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) и расположенных посредине между ними контрольных точек  $T_{1si}$  и  $T_{2si}$ . Боковые границы струи  $\sigma$  моделируются двумя системами свободных вихрей:  $\Gamma_{1\sigma i}$  и  $\Gamma_{2\sigma i}$ , где  $i = 1, \dots, N$ ;  $\tau_v = \nu \Delta t$  ( $\nu = 1, \dots$ ) - расчетный момент по времени.

В расчетные моменты времени  $\tau_v$  неизвестными являются циркуляции вихрей на стенках  $\Gamma_{1si}$ ,  $\Gamma_{2si}$  ( $i = 1, \dots, N$ ) и циркуляции двух оторвавшихся вихрей  $\Gamma_{1\sigma v}$ ,  $\Gamma_{2\sigma v}$ . При этом вихри  $\Gamma_{1s1}$  и  $\Gamma_{1\sigma v}$  ( $\Gamma_{2s1}$  и  $\Gamma_{2\sigma v}$ ) располагаются на равном расстоянии от контрольной точки  $T_{1s1}$  ( $T_{2s1}$ ), что обеспечивает сходимость интеграла типа Коши в смысле главного значения.

Рассмотрим, как выполняются условия, указанные в постановке задачи.

**а.** В каждый расчетный момент времени  $\tau_v$  условие непротекания в контрольных точках на поверхности сопла  $T_{1si}$  и  $T_{2si}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) эквивалентно системе  $2N$  алгебраических уравнений

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \{ \sum W_{ksi}(T_{csj}) \Gamma_{ksi} + \sum W_{k\sigma i}(T_{csj}) \Gamma_{k\sigma i} \} + w_{0n}(T_{csj}) = 0, \quad (I)$$

$$c=1,2; j=1, \dots, N,$$

где  $w_{ksi}(T_{csj})$ ,  $w_{k\sigma i}(T_{csj})$ ,  $w_{0n}(T_{csj})$  - нормальные составляющие безразмерной скорости, индуцируемые вихрями и течением в контрольных точках  $T_{csj}$ .

**б.** Уравнение расхода в дискретном виде

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^N \{ \sum_{y_0=-1}^1 \Gamma_{ksj} \int W_{x ksj}(y_0) dy_0 + \sum_{i=1}^N \Gamma_{k\sigma i} \int W_{x k\sigma i}(y_0) dy_0 + \int W_{0x}(y_0) dy_0 \} = Q(\tau_v), \quad (II)$$

где  $w_{xksi}$ ,  $w_{xk\sigma i}$ ,  $w_{0x}$  - продольные составляющие безразмерной скорости;  $Q(\tau_v)$  - заданный расход через сопло; интегрирование происходит в одном из сечений, например в сечении  $A_1 A_2$  (см. рис. 2, б).

**в.** Выполнение условия Чаплыгина - Жуковского о конечности скорости на кромках сопла обеспечивается тем, что контрольные точки  $T_{1s1}$  и  $T_{2s2}$  выбраны в непосредственной близости от среза сопла и заданы как место схода вихревого слоя.

**г.** Отсутствие перепада давления на поверхностях обеспечивается тем, что свободные вихри  $\Gamma_{1\sigma j}$  и  $\Gamma_{2\sigma j}$  перемещаются с местной скоростью потока с сохранением циркуляции.

**д.** Так как число неизвестных циркуляций, подлежащих определению, равно  $2N+2$ , а число уравнений (I)-(II) равно  $2N+1$ , то для замыкания системы необходимо еще одно уравнение. Оно получается из условия равенства нулю циркуляции по жидкому контуру  $L$ , охватывающему всю вихревую систему, состоящую из сопла  $S$  и боковой границы  $\sigma$  (см. рис. 2, б)

$$\sum_{k=1}^2 \left( \sum_{i=1}^N \Gamma_{ksi} + \sum_{i=1}^N \Gamma_{k\sigma i} \right) = 0. \quad (III)$$

Найденные из системы (I)-(III) циркуляции определяют скорость в произвольной точке  $\mathbf{r}$  пространства струи

$$w_{x,y}(\tau_v, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^2 \left\{ \sum_{i=1}^N W_{x,y,ksi}(\mathbf{r}) \Gamma_{ksi} + \sum_{i=1}^N W_{x,y,k\sigma i}(\mathbf{r}) \Gamma_{k\sigma i} \right\},$$

где  $w_{x,y,ks\sigma i}(\mathbf{r})$  - безразмерные составляющие скоростей, вычисляемые в соответствии с законом Био - Савара.

### 3. Динамическая система свободных вихрей

Рассматриваемая теория турбулентных струй и следов опирается на представление о том, что источниками турбулентности являются свободные вихри. Чтобы создать модель сценария перехода от детерминированного, упорядоченного течения к развитой турбулентности, прежде всего необходимо остановиться на математическом описании соответствующей динамической модели. С этой целью рассмотрим подробнее дифференциальные уравнения движения свободных вихрей. В безразмерном виде для каждого дискретного вихря можно написать

$$\frac{d\bar{x}_i}{d\tau} = \bar{u}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \tau), \quad \frac{d\bar{y}_i}{d\tau} = \bar{v}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \tau), \quad \frac{d\bar{z}_i}{d\tau} = \bar{w}_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i, \tau).$$

Если изучается плоскопараллельное течение, то  $i$  - номер свободного вихря на плоскости, в осесимметричном потоке  $i$  - номер кольцевого вихря. Основным элементом в пространственном случае будут вихревые отрезки, из которых, в свою очередь, конструируются вихревые рамки. Их движение определяется скоростями жидкости в концах отрезков  $i$ , которые одновременно являются вершинами вихревых рамок.

При описании перехода от порядка к хаосу удобно обращаться к пространству состояний жидкости (фазовому пространству), каждая точка которого отвечает полю скоростей в ней. Для жидкости, строго говоря, это бесконечномерное пространство, причем стационарные течения будут изображаться точками, а периодические - замкнутыми циклами. Поскольку в МДВ переход от порядка к хаосу и весь основной сценарий развития турбулентности определяется движением свободных вихрей, то здесь можно ограничиться многопараметрическим, но конечномерным пространством, в котором фазовыми координатами являются скорости движения свободных вихрей или их координаты (либо то и другое вместе). По мере развития течения вихревой след (струя) обогащается все новыми вихрями. Если на каждом расчетном шаге по времени  $\Delta\tau$  в поток сходит  $m$  свободных вихрей, то к расчетному моменту  $\tau_s$  их общее число будет равно

$$N_s = ms, \quad \tau_s = s\Delta\tau.$$

Итак, рассматриваемая динамическая система состоит из нарастающего счетного множества дискретных вихрей. Указанным выше способом, выделив главные механизмы влияния, удалось перейти к более простой динамической системе. Она содержит фиксированное число дискретных вихрей  $N$ , а влияние остальных учитывается приближенно, так как оно сравнительно невелико и его описывают достаточно гладкие функции.

Реализации поля скорости, полученные в численном расчете, удивительно похожи на экспериментальные: на фоне низкочастотных пульсаций видны хаотические возмущения, вызванные нерегулярным движением отдельных дискретных вихрей и их небольших групп. Объяснение такому поведению дают открытые сравнительно недавно нерегулярные колебания в детерминированных системах, получившие название «детерминированный хаос». Указанное свойство динамических систем, состоящих даже из небольшого числа свободных вихрей, является ключевым в развиваемой концепции.

Так, численный эксперимент, в котором изучается плоское движение трех или четырех дискретных вихрей одинаковой циркуляции под влиянием ими же вызванных скоростей, показывает разнообразие тех возможностей, которые заложены в этих довольно простых системах. Расчеты показывают, что уже при числе вихрей  $N=4$  может возникнуть детерминированный хаос [38]. Можно полагать, что при весьма большом числе вихрей, достигающем сотен и даже тысяч, возникновение стохастических режимов становится гораздо более вероятным (рис.3).

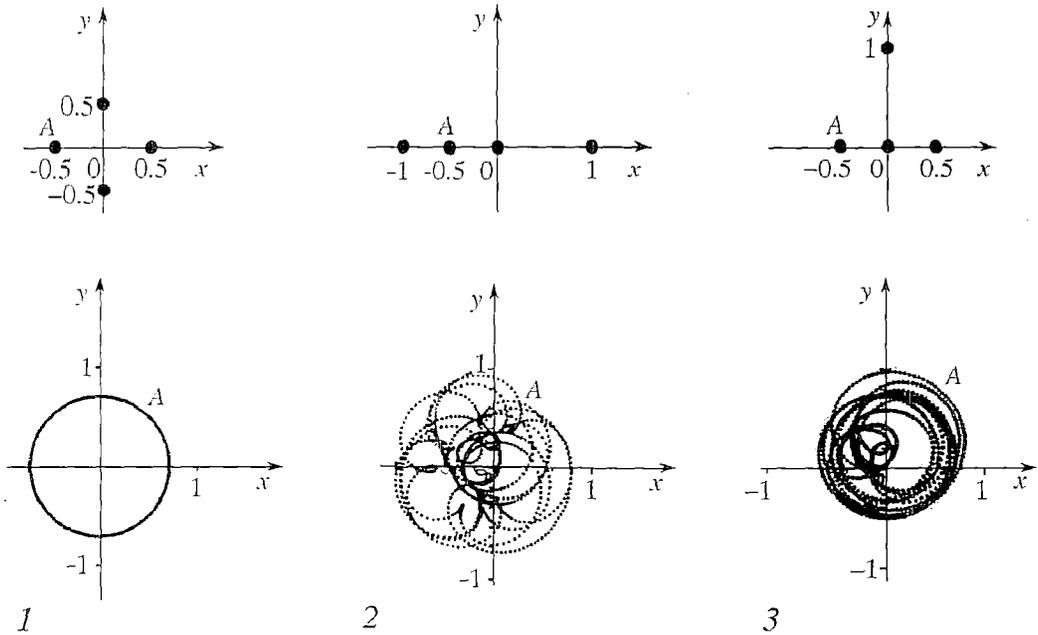


Рис. 3. Плоская задача о движении четырех вихрей одинаковой циркуляции при разных начальных положениях вихрей. Три режима: 1 - регулярный; 2 - квазипериодический; 3 - хаотический

В качестве примера рассмотрим задачу о движении четырех вихрей в безграничной жидкости. Для устранения сингулярности поля скорости дискретного вихря применим модель вихря с ядром постоянной завихренности (радиус ядра  $r_0$ ). В этом случае движение системы четырех вихрей описывается следующими уравнениями:

при  $r_{ij} > r_0$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_{ij}^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_{ij}^2}, \end{cases}$$

при  $r_{ij} \leq r_0$

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{y_i - y_j}{r_0^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum'_{j=1}^4 \Gamma_j \frac{x_i - x_j}{r_0^2}. \end{cases}$$

Здесь  $x_i, y_i$  - координата  $i$ -го вихря,  $\Gamma_j$  - циркуляция  $j$ -го вихря,  $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$  и штрих у знака суммы означает, что  $i \neq j$  (см.рис.1,  $r_0 = \Delta_i$ ). Данная система является гамильтоновой с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{ij} \Gamma_i \Gamma_j \Phi(r_{ij}),$$

где

$$\Phi(r_{ij}) = \begin{cases} \ln r_{ij} - \ln r_0, & r_{ij} > r_0, \\ \frac{1}{2r_0^2} (r_{ij}^2 - r_0^2), & r_{ij} \leq r_0. \end{cases}$$

В процессе проведения расчетов движения четырех вихрей та или иная схема численного интегрирования может привести к изменению  $N$ , что эквивалентно превращению гамильтоновой системы в диссипативную [38].

Поскольку решение задачи о распространении двумерных турбулентных струй и следов методом дискретных вихрей сводится к численному интегрированию большого числа уравнений, возникает вопрос: не являются ли полученные в численном эксперименте статистические характеристики следствием неконтролируемых гауссовых процессов, протекающих в ЭВМ при счете? Иными словами, не является ли полученная турбулентность «машинной». Эти вопросы были детально рассмотрены в работе [25]. Рассмотрим основные предпосылки и выводы этой работы.

При счете на ЭВМ решение испытывает влияние случайного процесса округления, который с высокой степенью точности можно считать гауссовым. Шум округления представляет собой гауссов процесс с амплитудой, не превосходящей  $5 \cdot 10^{-n}$ , где  $n$  - число цифр после запятой. На основе известных результатов теории обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений первого порядка был проанализирован статистический эффект влияния процесса вычислений на ЭВМ. Основной вывод состоит в том, что белый шум округления не дает рейнольдсовых напряжений сдвига, то есть  $\langle u'v' \rangle = 0$ ; в то же время шум округления может порождать ненулевые значения нормальных рейнольдсовых напряжений, то есть  $\langle u'^2 \rangle \neq 0$  и  $\langle v'^2 \rangle \neq 0$ . Следовательно, то обстоятельство, что численное моделирование турбулентных струй и следов дает отличающиеся от нуля значения  $\langle u'v' \rangle$ , удовлетворительно совпадающие с данными физического эксперимента (см. ниже раздел 5), свидетельствует о том, что моделирование описывает реальные, а не «машинные» турбулентные процессы.

#### 4. Исследования по методике расчетов

Проверка достоверности математических моделей турбулентных струй и следов должна идти по двум направлениям. Одно из них естественно назвать внутренним контролем, второе - внешним. Внутренний контроль должен обеспечить корректность и надежность реализации моделей и алгоритмов с точки зрения математической, программной, компьютерной. Один из главных вопросов при этом заключается в выборе рациональных параметров расчетных схем. Численный эксперимент с четко продуманной методической направленностью позволяет получить конкретные рекомендации.

Внешний контроль должен ответить на самый важный и трудный вопрос: можно ли считать, что математические модели описывают реальные процессы в турбулентных струях и следах? Еще более тонкой является проблема установления пределов применимости моделей, выявление тех границ, в которых можно считать, что модели правильно описывают явления. Ответить на эти вопросы можно только опираясь на результаты численных и физических экспериментов.

Остановимся на некоторых результатах численных экспериментов, проведенных Н.В. Хлаповым в ЦАГИ, целью которых было установление рациональных параметров расчетных схем. К этим параметрам, в первую очередь, относятся шаг по времени  $\Delta t$ ; число дискретных вихрей  $N$ , заменяющих обтекаемое тело или сопло; временной интервал, в течение которого ведется

осреднение статистических характеристик струи или следа, мера дискретности. Наиболее простой и наглядный путь решения указанных методических задач заключается в систематическом проведении расчетов при разных значениях параметров схем и последующем анализе их влияния на конечные результаты. Как правило, это устанавливается по достижении практической сходимости результатов при уменьшении шага по времени  $\Delta t$  и увеличении числа свободных вихрей  $n$ , временного интервала осреднения  $T$  и длины сопла  $L$ . Все перечисленные параметры были определены для плоских и круглых струй.

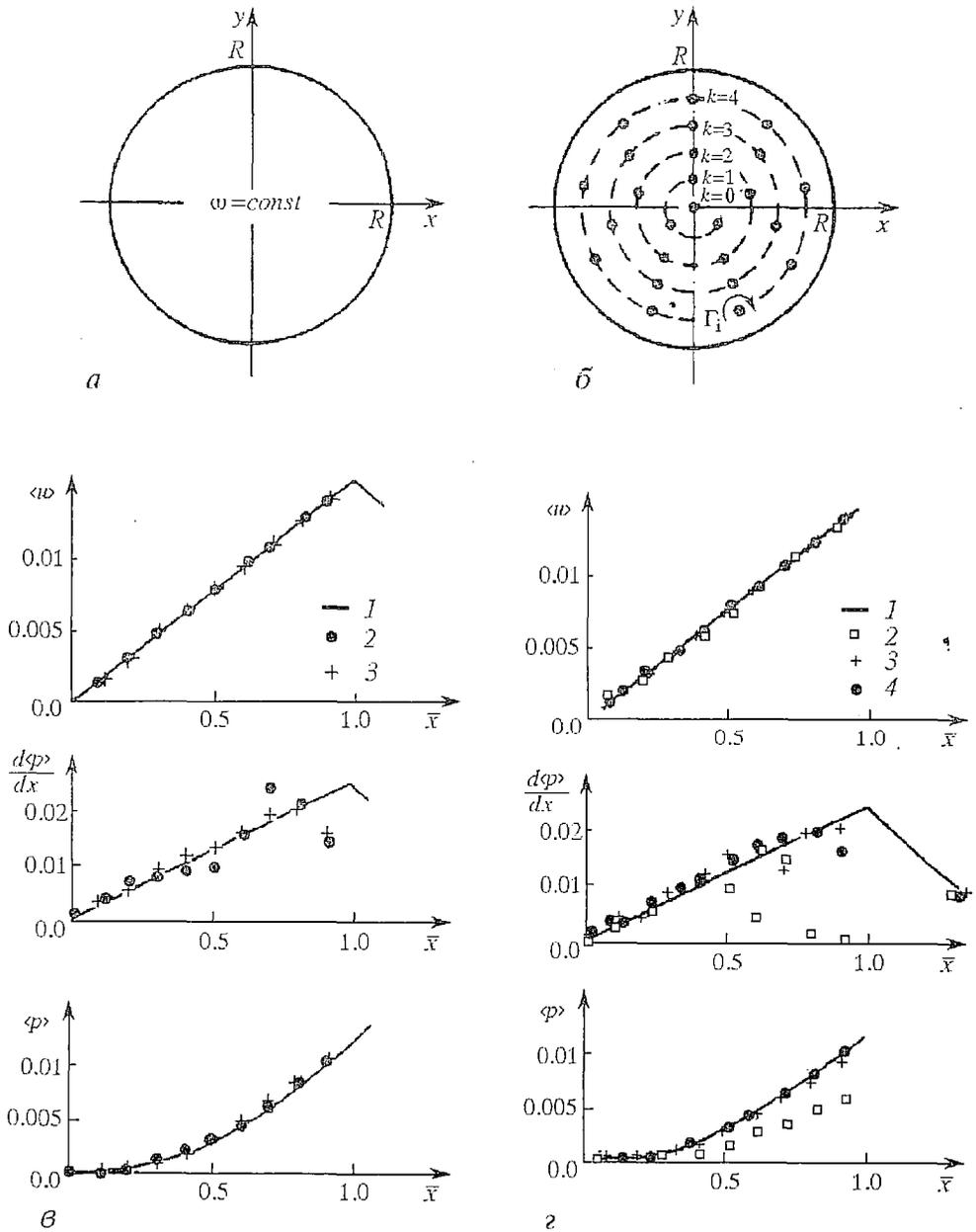


Рис. 4. Результаты расчета модельного течения: а - вихревой цилиндр; б - дискретный аналог вихревого цилиндра; сравнение приближенных и точных решений для скорости  $\langle \omega \rangle$ , давления  $\langle p \rangle$  и градиента давления  $d\langle p \rangle/dx$ : а - 1 - точное решение; 2 -  $N=100$ ,  $\Delta=0.2$ ; 3 -  $N=400$ ,  $\Delta=0.2$ ; б - 1 - точное решение; 2 -  $\Delta=0.05$ ,  $N=400$ ; 3 -  $\Delta=0.1$ ,  $N=400$ ; 4 -  $\Delta=0.2$ ,  $N=400$

Кроме того, при выборе параметров расчетных схем было рассмотрено модельное течение, для которого известно точное решение. Речь идет о вихревом цилиндре радиуса  $R$  с равномерно распределенной внутри него завихренностью  $\omega = \text{const}$  (рис. 4, а). В дискретном аналоге вихревого цилиндра вихревой объем заменялся дискретными вихрями одинаковой циркуляции  $\Gamma_i$ , равномерно распределенными по угловым координатам на каждой окружности (рис. 4, б). Безразмерные величины вводились следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \bar{y} = \frac{y}{R}, \quad \bar{u} = \frac{uR}{\sum_{i=1}^N \Gamma_i}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho} [(\sum_{i=1}^N \Gamma_i)/R]^{-2}.$$

Численный эксперимент имел целью выбор необходимого числа вихрей  $N$  и зоны дискретности  $\Delta$ . Последняя величина должна быть согласована со средним расстоянием между дискретными вихрями. Пример сопоставления рассчитанных значений скорости, давления и его радиального градиента с точным решением для цилиндрического вихря (рис. 4, в, г) свидетельствует об удовлетворительной точности предложенного алгоритма при  $N=400$  и  $\Delta = 0.2$ .

На рис. 5 представлена зависимость спектральной плотности турбулентной энергии  $E$  от частоты для цилиндрического вихря, иллюстрирующая выполнение универсального «закона пяти третей»:  $E(f) = \text{const} \cdot f^k$ , где  $k = -5/3$ .

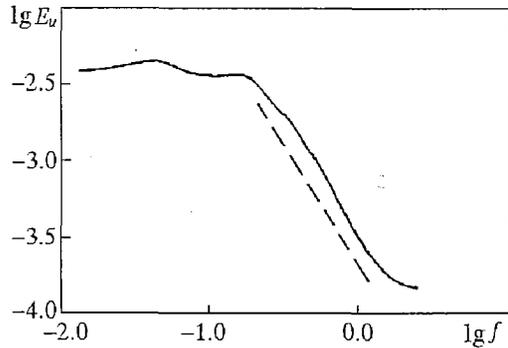


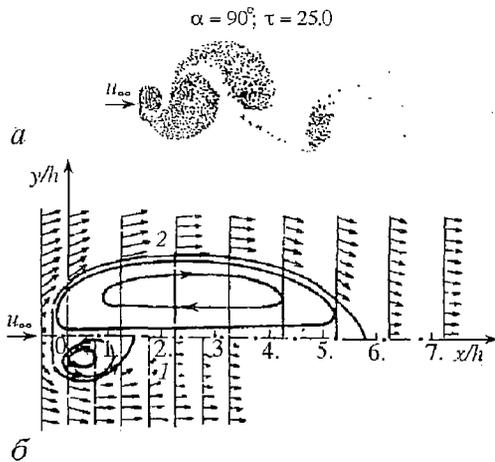
Рис. 5. Зависимость спектральной плотности турбулентной энергии  $E_u$  от частоты  $f$ ; штриховая линия - универсальный закон  $k = -5/3$

## 5. Расчет плоских, осесимметричных и трехмерных турбулентных струй, следов и отрывных течений

В качестве иллюстрации возможностей изложенного подхода к моделированию свободных сдвиговых турбулентных течений рассмотрим результаты расчета для ряда важнейших течений.

**5.1. Плоский турбулентный след за поперечно обтекаемой пластиной** [3,11,34]. Как показывают расчеты, здесь возможны два режима обтекания: симметричный и несимметричный. Однако первый из них оказывается неустойчивым, в нем отсутствует поперечное перемешивание вихревых сгустков с положительной и отрицательной циркуляцией. Несимметричная вихревая структура плоского следа за пластиной в фиксированный момент времени показана на рис. 6, там

Рис. 6. Несимметричная вихревая структура в следе за поперечно обтекаемой пластиной (а):  $\alpha$  - угол атаки пластины;  $\tau$  - безразмерное время, за которое пластина с начала движения прошла 25 хорд; осредненные картины отрывного течения при несимметричном 1 и симметричном 2 режимах (б):  $u_\infty$  - скорость набегающего потока,  $h$  - хорда пластины



же представлены осредненные картины течения за пластиной при несимметричном (1) и симметричном (2) режимах. В первом случае зона обратных токов за пластиной намного короче. Изменение расчетных и опытных значений средних скорости и давления, а также двух компонент пульсаций скорости вдоль оси следа за пластиной показано на рис. 7.

Как известно, установка в плоскости симметрии следа разделяющей пластины приводит к симметризации течения. Этот эффект хорошо описывается в рамках излагаемого метода.

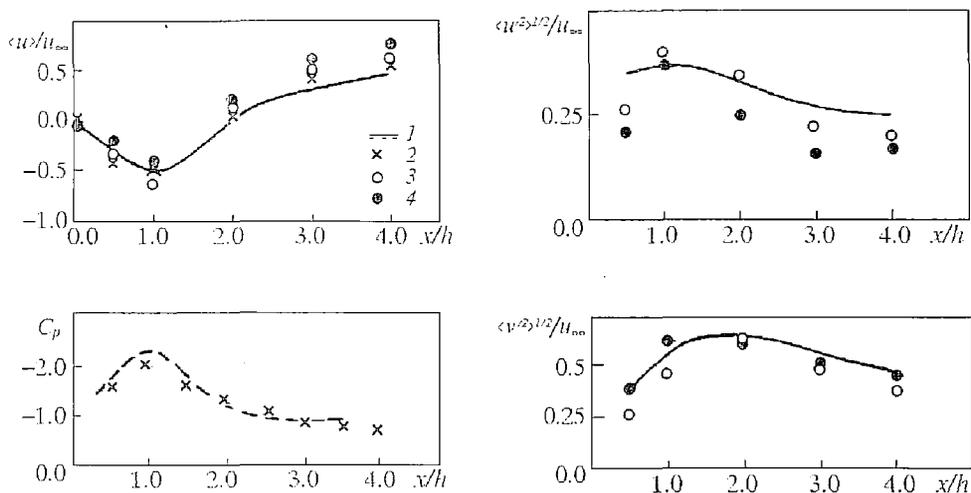


Рис. 7. Изменение вдоль оси следа за пластиной средней скорости  $\langle u \rangle / u_{\infty}$ , давления  $c_p = \langle p \rangle / (0.5 \rho u_{\infty}^2)$ , продольных  $\langle u'^2 \rangle^{1/2} / u_{\infty}$  и поперечных  $\langle v'^2 \rangle^{1/2} / u_{\infty}$  пульсаций скорости на участке протяженностью  $x/h = (0.0 \div 4.0)$ ; 1 - эксперименты [44,45]; расчеты: 2 - [21], 3 - [34], 4 - [43]

**5.2. Отрывное обтекание интерцептора [28].** Схема рассматриваемого течения представлена на рис. 8: Сравниваются экспериментальные [39] и расчетные профили средней скорости и продольные пульсации скорости в ряде сечений отрывной зоны, а также среднего давления  $\langle c_p \rangle$  и интенсивности его пульсаций  $\epsilon_p = (\langle c_p'^2 \rangle)^{1/2}$  на пластине. На рис. 9 приведено изменение коэффициента пространственной корреляции пристеночных пульсаций давления вдоль по потоку  $R_{pp}(x_0, \Delta x)$  при трех значениях  $x_0/h$ . В верхней части рисунка справа представлены соответствующие экспериментальные значения  $R_{pp}$ .

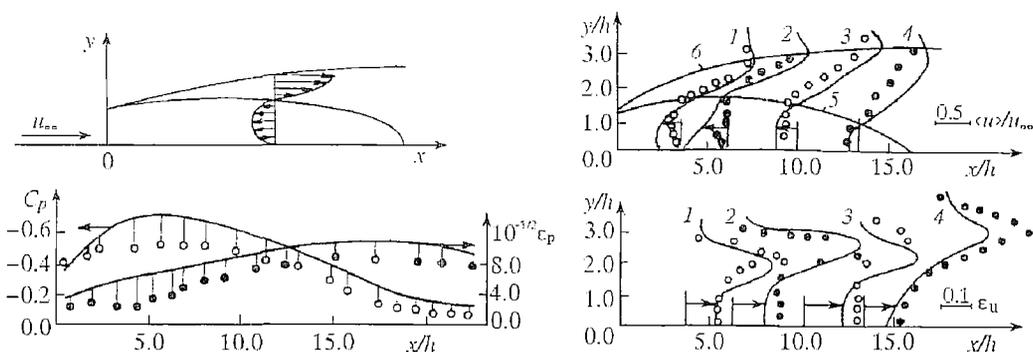


Рис. 8. Сравнение расчетных и опытных данных средних значений давления  $\langle c_p \rangle$  и пульсаций давления  $\epsilon_p = (\langle c_p'^2 \rangle)^{1/2} / (0.5 \rho u_{\infty}^2)$  на стенке в отрывной зоне за интерцептором, а также профилей средней скорости  $\langle u \rangle / u_{\infty}$  и продольных пульсаций скорости  $\epsilon_{11} = (\langle u'^2 \rangle)^{1/2} / u_{\infty}$ ; 1 ÷ 4 - сечения, 5 - линия нулевых продольных скоростей, 6 - граница циркуляционной зоны

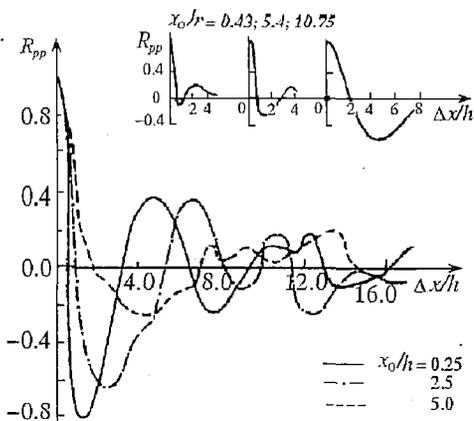


Рис. 9. Изменение коэффициентов корреляции пристеночных пульсаций давления вдоль по потоку  $R_{pp}(x_0, \Delta x)$ . В верхнем правом углу - данные эксперимента [39]

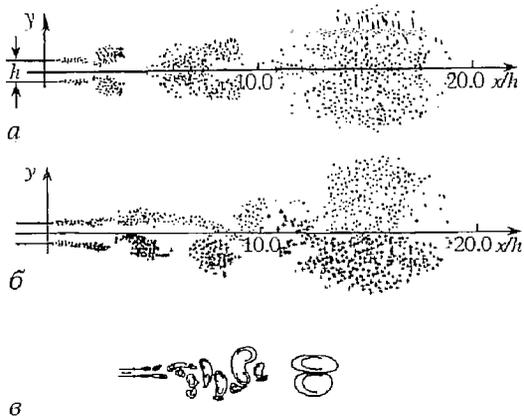


Рис. 10. Симметричные (а) и несимметричные (б) вихревые структуры плоской струи в момент времени  $\tau = tu_0/h = 45$ ; когерентные вихревые структуры в момент времени  $\tau = 85$  (в); справа - густки начальных вихрей

**5.3. Плоские затопленные турбулентные струи.** Как и в случае плоского следа за пластиной, расчеты показывают возможность реализации двух режимов истечения плоской струи из сопла - симметричного и несимметричного [4]. Соответствующие вихревые структуры в фиксированный момент времени  $\tau = tu_0/h = 45$  представлены на рис. 10. Там же для фиксированных моментов времени показано расположение густков положительной и отрицательной завихренности, представляющих собой когерентные структуры, которые соответствуют несимметричной вихревой структуре.

В действительности реализуется несимметричная вихревая структура струи, соответствующая поперечному перемешиванию густков завихренности разного знака. Из представленного на рис. 11 сравнения расчета и эксперимента для средней скорости и эффективной толщины струи видно, что только в случае реализации несимметричной вихревой структуры обеспечивается удовлетворительное согласие расчета с экспериментом. Дальнейшие расчеты показали, что при этом условии обеспечивается удовлетворительное согласие с опытом следующих характеристик: профилей средних скорости и давления, среднеквадратичных значений пульсаций скорости, а также пространственных корреляций пульсаций скорости вдоль оси. В рамках данного подхода были получены также решения для струи в спутном потоке и для струи, истекающей из диафрагмы с острыми кромками [11].

**5.4. Осесимметричные турбулентные струи** [4, 11]. Численное решение данной задачи было получено для круглой струи. В качестве базового вихревого элемента было использовано вихревое кольцо. Однако жесткое условие осевой

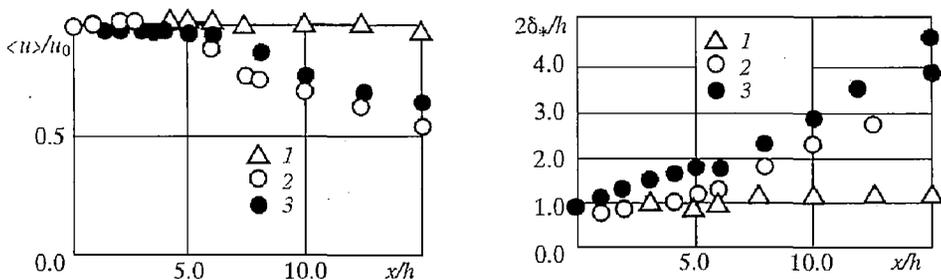


Рис. 11. Изменение скорости и эффективной толщины плоской струи вдоль по потоку: 1 - расчет для «симметричной» струи [37], 2 - расчет для «несимметричной» струи, 3 - эксперимент [46]

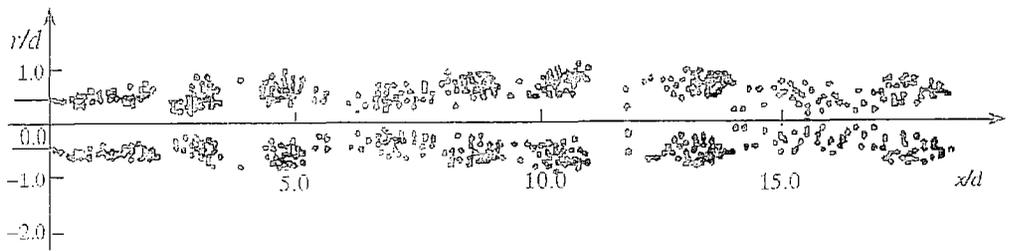


Рис. 12. Вихревая структура затопленной осесимметричной струи [4],  $d$  - диаметр сопла симметрии имело следствием очень слабое расширение струи. Таким образом, полученное решение оказалось справедливым только вблизи сопла, в пределах начального участка струи. На рис. 12 представлена вихревая структура круглой струи, на рис. 13 - изменение средней скорости  $\langle u \rangle / u_0$  вдоль оси струи и эжекции

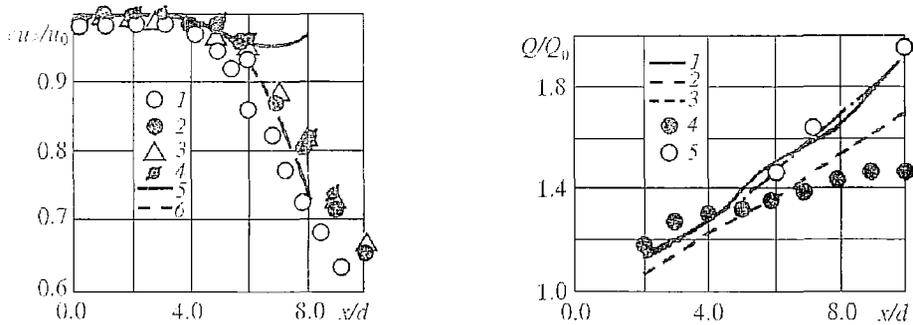
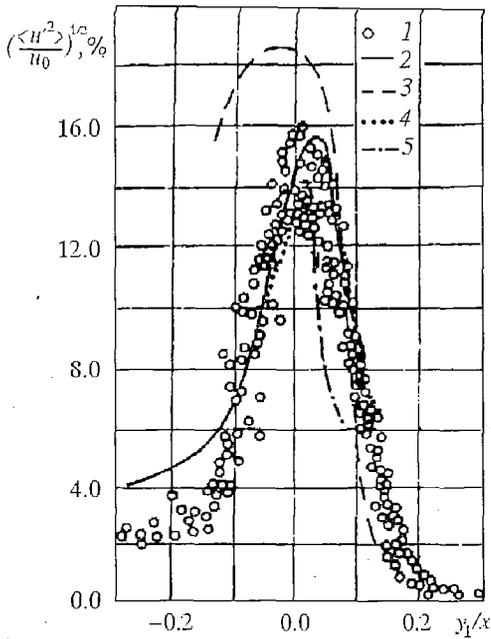


Рис. 13. Изменение средней скорости  $\langle u \rangle / u_0$  и эжекции  $Q/Q_0$  вдоль струи, истекающей из круглого сопла: 1-4 - эксперименты [36], 5 - расчет осесимметричной струи, 6 - расчет в трехмерной постановке

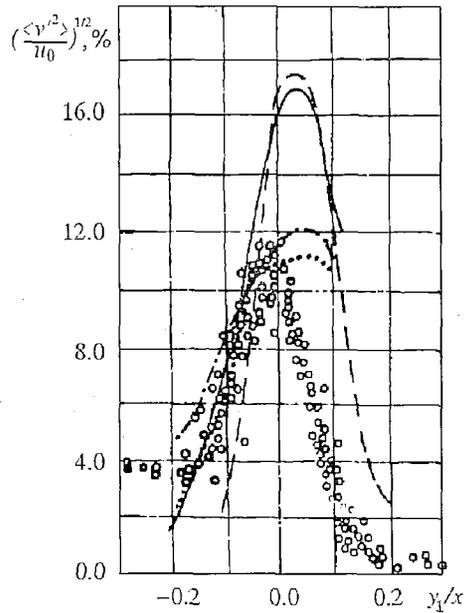
$Q/Q_0$  вдоль по потоку в сравнении с экспериментом для круглой струи [36]. Здесь совпадение расчета и эксперимента оказывается удовлетворительным только вблизи среза сопла (при  $x/d < 5$ ), то есть в пределах начального участка. На рис.14 приведены расчетные и экспериментальные [40] профили продольных и радиальных пульсаций скорости в пределах начального участка. Здесь обращает на себя внимание худшее совпадение расчета с опытом для радиальных пульсаций по сравнению с продольными.

**5.5. Трехмерные турбулентные струи. Решение для круглой струи в трехмерной постановке [11].** Как указывалось выше, в подавляющем большинстве случаев турбулентные течения жидкости существенным образом трехмерны. Это, в частности, относится к мгновенным характеристикам струй, истекающих из плоского и круглого сопел. С целью проверки этого утверждения были выполнены расчеты круглой струи при отказе от условия осевой симметрии, то есть в полной пространственной постановке. В качестве основного модуля использовались вихревые многоугольники, при этом границы струи моделировались вихревыми рамками и по мере растяжения вихревых отрезков, составляющих эти рамки, производилось их дробление на более мелкие.

Расчеты показали (рис. 15), что сходящиеся с кромки сопла почти круглые вихри (вихревые многоугольники) сохраняют свою азимутальную однородность на первых трех калибрах  $x/d = (0.0 \div 3.0)$ , после чего вихревые кольца приобретают звездообразную и пространственную структуру  $x/d = (3.5 \div 6.0)$ ; далее, при  $x/d > 6.0$ , происходит стохастизация течения. При этом, в отличие от строго осесимметричного случая (см. рис. 13), здесь моделируется расширение струи и, соответственно, уменьшение средней скорости и увеличение эжекции вдоль по потоку; при этом заметно улучшается совпадение расчета с экспериментом для продольных и радиальных пульсаций скорости (см. рис.14) и, кроме того, рассчитываются азимутальные пульсации скорости.



а



б

Рис. 14. Профили интенсивности осевых (а), радиальных (б) и азимутальных (в) пульсаций скорости в слое смешения круглой струи ( $y_1 = y - r_0$ ): 1 - эксперимент [40],  $x/d = (1.0 \div 6.0)$ ; 2, 3 - расчеты осесимметричной струи; 4, 5 - расчеты круглой струи в трехмерной постановке

Важным критерием эффективности метода моделирования пространственных турбулентных струй служит их способность описать эффект переориентации большой и малой осей изотопов в поперечных сечениях струй, истекающей из сужающегося сопла прямоугольной или эллиптической формы или из диафрагмы с острыми кромками (рис. 16). Удовлетворительное решение этой задачи в настоящее время отсутствует [18, 20]. В то же время МДВ позволяет решить указанную задачу без каких-либо дополнительных предположений.

Результаты соответствующего расчета для струй, истекающей из сужающегося сопла прямоугольного сечения с отношением сторон в выходном сечении  $\lambda = l/h = 2$ , представлены на рис. 16. Здесь сравниваются данные расчета и эксперимента [41] для продольного изменения скорости на оси  $\langle u \rangle / u_0$  и эффективных толщин струй  $(\delta_{1/2})_z / d_*$  и  $(\delta_{1/2})_y / d_*$  в плоскостях симметрии  $y = 0$  и  $z = 0$ . Линейные размеры отнесены к эквивалентному диаметру  $d_* = 2h(\lambda/\pi)^{1/2}$  круга, площадь которого равна площади сечения щели  $F = hl$ , а скорость  $\langle u \rangle$  на оси струи - к средней скорости в выходном сечении сопла. Мы видим, что расчет правильно описывает эффект переориентации большой и малой осей изотопов в поперечных сечениях струй.

Для упрощения расчета здесь предполагалось, что через плоскости

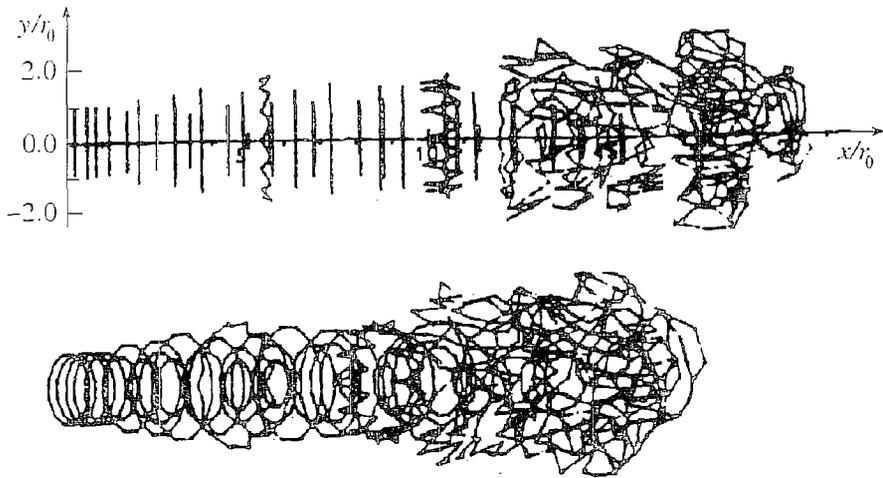


Рис. 15. Трехмерная вихревая структура круглой турбулентной струи в момент времени  $\tau = tu_0/r_0 = 45$ ,  $r_0$  - радиус сопла. Виды сбоку и под углом  $30^\circ$

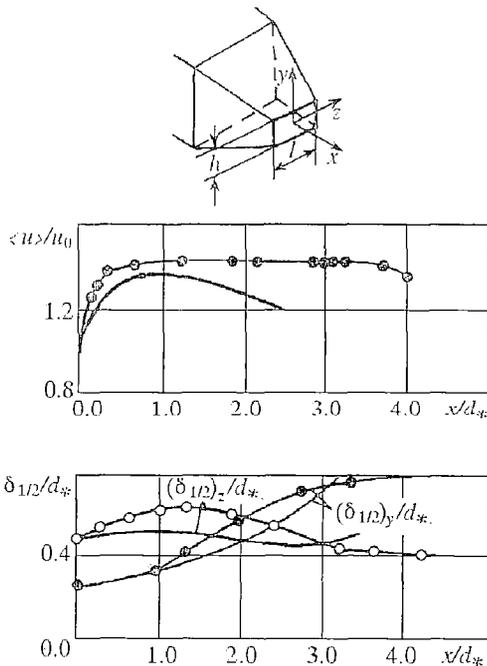


Рис. 16. Сравнение расчетных (сплошные кривые) и опытных [41] (кружочки) значений скорости на оси и характерных толщин в плоскостях симметрии  $(\delta_{1/2})_y$  и  $(\delta_{1/2})_z$  струи, истекающей из сужающегося сопла прямоугольного сечения с отношением сторон 2:1 в выходном сечении

Изложенные в настоящей статье результаты свидетельствуют об эффективности метода дискретных вихрей и перспективности его использования и совершенствования для моделирования разнообразных струйных и отрывных турбулентных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (Грант M2R 300).

симметрии  $y = 0$  и  $z = 0$  не происходит перетекание жидкости, то есть отсутствует турбулентный обмен. Можно полагать, что отказ от этого ограничения заметно улучшит согласование расчета с экспериментом. Отметим, что аналогичный эффект наблюдается также в случае трехмерного турбулентного следа [42]; он может быть описан с помощью МДВ.

**5.6. Другие задачи.** Приведенными выше примерами отнюдь не исчерпываются возможности моделирования свободных турбулентных течений с помощью МДВ. Перечислим другие задачи, которые были решены в рамках этого метода [11]: исследование периодического возбуждения турбулентных струй, когда расход жидкости через сопло меняется по заданному гармоническому закону  $Q(t) = Q_0[1 + A \sin(2\pi ft)]$  с амплитудой  $A$  и частотой  $f$ ; моделирование периода формирования турбулентной струи; моделирование диффузии твердых инерционных частиц в турбулентных струях и следах; натекание турбулентных струй на экран; турбулентные струи в поперечном и встречном потоках; коаксиальные струи.

Нам представляется, что изло-

## Библиографический список

1. Белоцерковский С.М., Нишин М.И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. М.: Наука, 1978.
2. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985.
3. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Нишин М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988.
4. Бабкин В.И., Белоцерковский С.М., Гуляев В.В., Дворак А.В. Струи и несущие поверхности. Моделирование на ЭВМ. М.: Наука, 1989.
5. Белоцерковский О.М., Белоцерковский С.М., Давыдов Ю.М., Нишин М.И. Моделирование отрывных течений на ЭВМ. М.: АН СССР, «Кибернетика», 1984.
6. Belotserkovsky S.M. The theory of thin wings in subsonic flow. New York. Plenum Press. 1967.
7. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of discrete vortices // CRC Press. Boca Raton. Ann Arbor; London, 1993.
8. Belotserkovsky S.M., Kotovskii V.N., Nisht M.I., Fedorov R.M. Two-dimensional separated flows // CRC Press. Boca Raton. Ann Arbor; London, 1993.
9. Belotserkovsky S.M. Digital simulation of separated and jet flows using discrete vortex method // IUTAM Symposium. Novosibirsk. 1990. P.97.
10. Belotserkovsky S.M. Study of the unsteady aerodynamics of lifting surface using the computer // Ann. Rev. Fluid Mech. 1977. Vol. 9. P.469.
11. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Наука, 1995.
12. Белоцерковский С.М., Скобелев Б.Ю. Метод дискретных вихрей и турбулентность. ИТПМ. Препринт № 10.1993. 39 с.
13. Власов Е.В., Гиневский А.С. Когерентные структуры в турбулентных струях и следах // Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа». Т. 20. ВИНТИ. 1986. С. 3.
14. Рабинович М.И., Суццик М.М. Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 56.
15. Fiedler H.E. Coherent structures // ADV Turbul. Proc., 1st Eur. Turbul. Conf. Lyon, 1-4 July. 1986. Berlin, 1987. P. 320
16. Hussain A.K.M.F. Coherent structures - reality and myth // Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. № 10. P. 2816.
17. Бушмович Л.А. Когерентные структуры и нелинейная динамика // Когерентные структуры и самоорганизация океанич.движений. РАН. Ин-т океанологии. Москва, 1992. С. 62.
18. Абрамович Г.Н., Гиршович Т.А., Крашенинников С.Ю., Секундов А.Н., Смирнова И.П. Теория турбулентных струй/ Под ред. Г.Н. Абрамовича. М.: Наука, 1984.
19. Гиневский А.С. Теория турбулентных струй и следов // М.: Машиностроение. 1969.
20. Shetz J. Injection and mixing in turbulent flow // Astronautics and Aeronautics. Vol. 88. AIAA, N.Y., 1990.
21. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Желанников А.И., Котовский В.Н. Моделирование на ЭВМ турбулентных струй и следов // Проблемы турбулентных течений. М.: Наука, 1987. С. 129.
22. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хлапов Н.В. Моделирование на ЭВМ плоских турбулентных струй // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 3. С. 46.
23. Белоцерковский С.М., Нишин М.И. К исследованию турбулентного следа за пластиной // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216, № 6. С. 1240.
24. Айрапетов А.Б. О корректности «в среднем» задачи Коши для системы обыкновенных и стохастических уравнений // Тр. ЦАГИ. 1976. Вып. 1784. С. 18.
25. Айрапетов А.Б. О статистических свойствах системы дискретных

вихрей. моделирующей турбулентное струйное течение // Турбулентные течения. М.: Наука, 1977. С. 188.

26. Смирных Е.А. Моделирование периодического возбуждения плоской турбулентной струи методом дискретных вихрей // Теплофизические и физ.-химич. процессы в химических установках. Минск, 1986. С. 92.

27. Смирных Е.А. Численное моделирование перемешивания газов и твердых инерционных частиц в плоской турбулентной струе // Механика неоднородных и турбулентных потоков. М.: Наука, 1989. С. 220.

28. Смирных Е.А. Численное исследование методом дискретных вихрей структуры отрывного течения за интерцептором // Тр.ЦАГИ.1989. Вып.2420.С.78.

29. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я. О процессах образования и эволюции вихревых структур в сдвиговых слоях // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. № 1. С. 31.

30. Веретенцев А.Н., Рудяк В.Я., Яненко Н.Н. О построении дискретных вихревых моделей идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и математич. физ. 1986. Т. 26, № 1. С. 103.

31. Leonard A. Vortex method for flow simulation // J.Comput.Phys. 1990. Vol. 37. P. 298.

32. Leonard A. Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements // Ann.Rev.Fluid Mech. 1985. Vol.17. P. 523.

33. Chorin A.J. Numerical study of slightly viscous flow // J. Fluid Mech. 1973. Vol. 57, pt. 4. P. 785.

34. Chein R., Chung J.N. Discrete-vortex simulation of flow over inclined and normal plates // Computers and Fluids. 1988. Vol. 16, № 4. P. 405.

35. Edwards A.V.J., Morfey C.L. A computer simulation of turbulent jet flow // Computers and Fluids. 1981. Vol. 9. P. 205.

36. Acton E. A modelling of large eddies in an axisymmetric jet // J. Fluid Mech. 1980. Vol 98. P. 1.

37. Shimizu S. Discrete-vortex simulation of two-dimensional turbulent jet // Bulletin of JSME. 1986. Vol. 29, № 254. P. 254.

38. Новиков Е.А., Седов Ю.Б. Статистические свойства 4-х вихрей // ЖТЭФ. 1978. Т. 75. С. 868.

39. Власов Е.В., Гиневский А.С., Каравосов Р.К., Франкфурт М.О. Пристеночные пульсации давления в зоне отрыва за двумерными препятствиями // Тр. ЦАГИ. 1982. Вып. 2137. С. 3.

40. Власов Е.В. Исследование турбулентности в связи с определением акустических характеристик струн // Инж.-физ. журн. 1965. Т. VIII, № 5. С. 568.

41. Quinn W.R. Turbulent free flows issuing from sharp-edged rectangular slots: The influence of slot aspect ratio // Experimental Thermal and Fluid Science. 1992. Vol.5. P.203.

42. Уханова Л.Н. Некоторые закономерности развития трехмерного турбулентного следа // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1567. С.44.

43. Kiya M., Arie M. Discrete-vortex simulation of unsteady separated flow behind a nearly normal plate // Bull. JSME. 1980. Vol. 23, № 183. P. 1451.

44. Bradbury L.J.S. Measurements with a pulsed and hot-wire anemometer in highly turbulent wave of a normal flat plate // J. Fluid Mech. 1976. Vol.77. P. 473.

45. Gadd G.E. Two-dimensional separated or cavitating flow past a flat plate normal to the stream // ARC CP № 697.1962.

46. Hussain A.K.M.F., Thompson C.A. Controlled symmetric perturbation of the plane jet: an experimental study in the initial region // J. Fluid Mech. 1980. Vol.100, pt.2. P.397.

Центральный аэрогидродинамический институт

Поступила в редакцию 04.10.94

# COMPUTER CONCEPTION OF VORTEX TURBULENCE

*S.M. Belotsercovsky, A.S. Ginevsky*

A simulation of turbulent jets and separated flows of incompressible liquid based on the scheme of ideal medium and on the method of discrete vortices is considered. The mathematical construction of shear flow model with high Reynolds numbers is based on treating a free turbulence as a hierarchy of vortices of various scales. Generally a turbulent motion is considered as a three-dimensional and essentially nonsteady one.

A turbulence is generated by a loss of stability and by a breakup of regular vortex formations (sheets) with its further transformation into vortex ensembles. The latter, having common motion with the medium, alter, catch each other, and form new macrostructures as well as small vortices. It is significant that vortex motion contain an inherent mechanism of a loss of stability and transformation from order to chaos.

Solutions received with the method of discrete vortices allow to find fields of average velocity and pressure, normal and shear Reynolds stress, pressure pulsations; spatial, time and spatial-time correlations of velocity and pressure pulsations as well as appropriate turbulence scale without application of empirical constants.



*Белоцерковский Сергей Михайлович* - родился в 1920 году. Выпускник факультета механики и математики Московского государственного университета. Окончил Военно-воздушную инженерную академию им. Жуковского (1945). Кандидат наук (1948), доктор технических наук (1955), в 1958 году присвоено профессорское звание. В настоящее время - профессор ЦАГИ. Автор 25 монографий, изданных в США, Великобритании, Швейцарии, Франции, Германии и т.д. Опубликовал более 270 статей, имеет 30 изобретений. Круг научных интересов - разработка основ вихревой компьютерной механики жидкости и газов и практическое применение прогноза взаимодействия вихрей в аэропортах и во время полета в рамках метода дискретных вихрей.