



МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИФФУЗИИ ВИХРЕЙ НА ТУРБУЛЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТРУИ

С.М. Белоцерковский, Н.В. Хлапов

В представленной работе разработан метод учета молекулярной диффузии на основе метода дискретных вихрей. Рассмотрен ряд примеров: диффузия бесконечной вихревой пары, движение вихревой пары, истечение плоской струи, а также рассмотрен упрощенный подход к учету диффузии.

Общая концепция моделирования турбулентных струй и следов

При построении математических моделей турбулентности будем исходить из сложившегося к настоящему моменту понимания ее как иерархии вихрей разного порядка. При больших числах Рейнольдса наблюдаются пульсации параметров течения от самых больших до весьма малых масштабов.

Крупномасштабная турбулентность - в основном определяется силами инерционной природы. Поэтому здесь вязкость играет второстепенную роль и в ряде случаев ею можно вообще пренебречь. При описании же мелкомасштабных турбулентных течений на определенном этапе следует вводить в рассмотрение механизм молекулярной вязкости.

Будем моделировать обтекание тела, вихревой след и поверхность струи с помощью дискретных вихрей и решать соответствующую задачу обтекания тела или истечения струи в нестационарной постановке. Такой подход позволил описать как возникновение свободных вихрей, так и моделировать их движение, включая процесс распада пелены и образования вихревых ансамблей [1 - 11].

Один из перспективных путей обобщения метода дискретных вихрей (МДВ) связан с учетом диффузии свободных вихрей на основании уравнений Гельмгольца. Принципиальное значение имеет то обстоятельство, что в численный процесс включаются не сеточные методы, а точные решения соотношений типа уравнений теплопроводности.

Общий подход к моделированию диффузии свободных вихрей

Моделирование процессов диффузии в вихревых следах и струях требует усложнения математических моделей путем учета влияния вязкости среды. При непосредственном численном решении уравнений Навье - Стокса возникает ряд трудностей не только технического, но и принципиального характера. Поэтому в данной работе развит метод, основанный на использовании уравнений Гельмгольца в сочетании с методом дискретных вихрей.

В идеальной среде свободные вихри $\omega(x, y, t)$ движутся вместе с жидкими частицами, не изменяясь

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

Здесь ω - завихренность; t - время; u - x -ая компонента, а v - y -ая компонента скорости.

В вязкой среде имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

где ν - кинематическая вязкость.

При численном решении общей задачи применим метод физического дробления ее на каждом расчетном шаге по времени Δt .

Вначале проходим временной шаг Δt , положив в уравнении Гельмгольца (2) $v=0$ и получая соотношение (1). Здесь имеет место теорема о сохранении вихревых линий и интенсивности вихревых трубок. На этом этапе расчета, когда свободные вихри движутся вместе со средой, не меняя своей интенсивности, будет использоваться МДВ.

Проходя временной шаг Δt во второй раз, рассмотрим оставшуюся часть процесса, которая описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (3)$$

Второй шаг реализуется с помощью аналитических выражений, являющихся точным решением уравнения типа теплопроводности (3).

Рассмотрим дискретный вихрь, расположенный в точке (x_i, y_i) циркуляции Γ_i в момент времени t_i . Тогда к моменту времени t будем иметь согласно (3)

$$\begin{aligned} \omega_i(x, y, t) &= \omega_{0i} \exp(-\Delta r_i^2 / (4\nu \Delta t_i)), \\ \omega_{0i} &= \Gamma_i / (4\pi \nu \Delta t_i), \\ \Delta t_i &= t - t_i, \\ \Delta r_i^2 &= (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Как известно, в идеальной среде циркуляция каждого свободного вихря не меняется во времени, и дискретные вихри, двигаясь вместе с жидкостью, остаются дискретными. Учет вязкости ν описывает явление диффузии вихрей. В вихревое движение вовлекается вся жидкость, что приводит к размазыванию дискретных вихрей. При этом в несжимаемой среде суммарная циркуляция скорости по бесконечно удаленному замкнутому контуру, охватывающему всю жидкость, сохраняется. В случае (4) она будет равна начальной циркуляции Γ_i .

Наряду с полным моделированием диффузии свободных вихрей рассмотрим упрощенный подход. Пусть вовлечение новых частиц жидкости в вихревое движение изучается приближенно, без учета влияния переноса вихрей (конвективных членов в уравнении (2)). Этот прием, заметно снижающий объем расчетов, для краткости назовем локальной («статической») моделью диффузии.

В данном случае не нужно проходить расчетные шаги по времени Δt дважды, рассматривая всякий раз влияние перемещения свободных вихрей, в том числе и вторичных. Расчеты ведутся как обычно в МДВ, но по измененным формулам для скоростей u_i, v_i , соответствующим каждому из свободных вихрей Γ_i . Из соотношений (3) и (4) получаем

$$u_i(x,y,t) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{y-y_i}{\Delta r_i^2} (1-\exp(-\Delta r_i^2/(4\nu \Delta t))),$$

$$v_i(x,y,t) = \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{x-x_i}{\Delta r_i^2} (1-\exp(-\Delta r_i^2/(4\nu \Delta t))).$$

При полном моделировании диффузии свободных вихрей нужно учитывать не только «статическую» диффузию, но и ту часть явления, которая связана с движением свободных вихрей. Для этого совершается переход от распределенной завихренности ω_i (4) к системе вторичных дискретных вихрей. Таким образом удастся моделировать старение основных свободных вихрей, вовлечение в вихревое движение всей жидкости и перемещение вихрей. Поскольку циркуляции вторичных вихрей быстро убывают по мере удаления от начальных (первичных) свободных вихрей, удастся ограничиться сравнительно малым их числом.

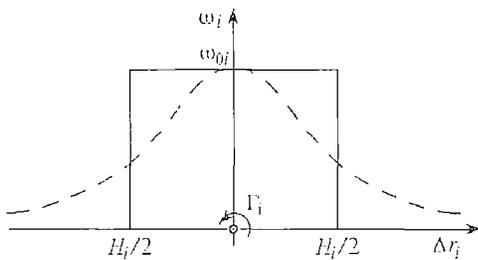
Численное моделирование диффузии и методические примеры

Рассмотрим в момент времени t завихренность $\omega_i(r_i,t)$, которая согласно (4) описывает закон распределения ее от дискретного вихря Γ_i при $t=t_i$. Простейшая схема перехода от непрерывного распределения завихренности к дискретной заключается в замене истинного закона $\omega_i(\Delta r_i,t)$ ступенчатым, когда на участке H_i $\omega_i = \omega_{i0}$, а вне его равна нулю (рис.1).

Поскольку при диффузии общая завихренность сохраняется, то

$$\omega_{i0} H_i^2 = \Gamma_i,$$

откуда



$$\frac{\Gamma_i}{4\pi\nu\Delta t} H_i^2 = \Gamma_i.$$

При выбранном размере сетки H_i это равенство дает возможность определить дискретный шаг по времени Δt при расчете диффузии

$$\Delta t = \frac{H_i^2}{4\pi\nu}. \quad (6)$$

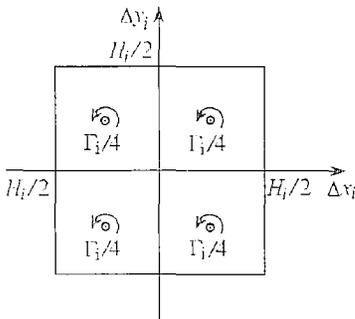


схема 1

Таким образом, численное моделирование диффузии в простейшей схеме осуществляется переходом через интервал времени Δt от одного дискретного вихря Γ_i к четырем Γ_{ik} , расположенным в центрах квадратов со сторонами $H_i/2$ (рис.1, схема 1). Циркуляции их одинаковы и равны

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_i/4. \quad (7)$$

Рис.1. Закон распределения завихренности i в плоскости течения при диффузии дискретного вихря Γ_i и переход к ступенчатому распределению. Простейшее описание диффузии (схема 1): через расчетный шаг Δt один свободный вихрь Γ_i переходит в четыре вихря

Аналогичным образом моделируется диффузия вторичных вихрей Γ_{ik} . Каждый из них, в свою очередь, через интервал времени (6) также распадается на четыре дискретных вихря и т.д.

Параллельно с этим численно изучается динамика движения дискретных вихрей по обычной методике МДВ. При этом на каждом шаге по времени

$$\Delta_{i0}t = t_0 - t_i \quad (8)$$

циркуляции вихрей не изменяются. Обычно здесь требуются более мелкие шаги ($\Delta_{i0}t < \Delta_i t$). Как только на шаге s выполняется неравенство

$$s\Delta_{i0}t \geq \Delta_i t, \quad (9)$$

происходит перестроение свободных вихрей, соответствующее указанной выше модели диффузии. Более точный способ аппроксимации закона распределения завихренности $\omega_i(x_i, y_i)$ на каждом расчетном шаге $\Delta_i t$ представлен на рис. 2. Остановимся на двух методических примерах.

Первый пример - сопоставление результатов численного моделирования диффузии для вихря, который при $t=0$ представлял собою дискретную нить циркуляции Γ . Результаты расчетов и данные точного решения приведены на рис. 3, где безразмерные параметры введены следующим образом:

$$\bar{r} = \frac{r}{H}, \quad \tau = \frac{t\Gamma}{H^2}, \quad \text{Re} = \frac{\Gamma}{\nu}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega H^2}{\Gamma}, \quad (10)$$

здесь r - расстояние от вихря, H - линейный размер квадратной сетки.

Второй пример - движение и диффузия двух вихревых сгустков, образующихся из пары вихревых шнуров противоположного вращения. В момент времени $t=0$ они имели циркуляции Γ и $-\Gamma$ и находились в точках с координатами $x/h=2$, $y/h=\pm 0.5$, h - расстояние между шнурами. Пусть ω_{\max} - значение завих-

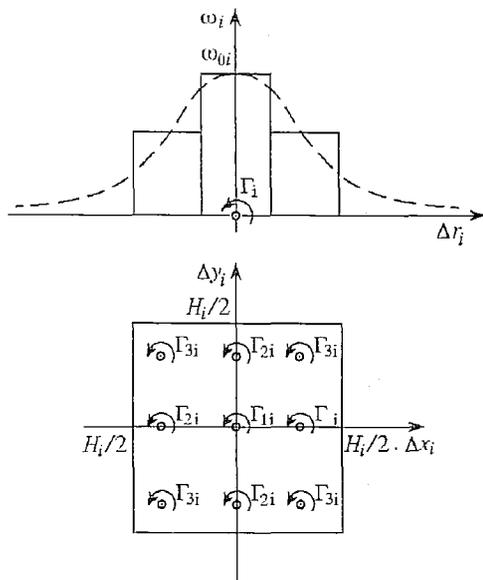
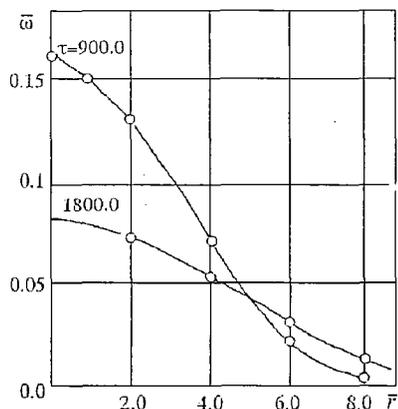
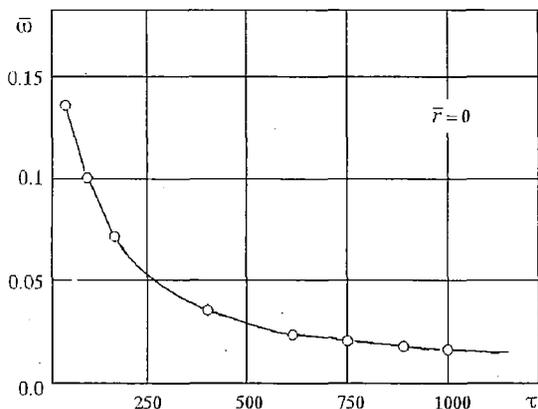


схема 2

Рис.2. Расчетная схема второго порядка точности (схема 2); через временной шаг $\Delta_i t$ один свободный вихрь Γ_i переходит в девять вихрей

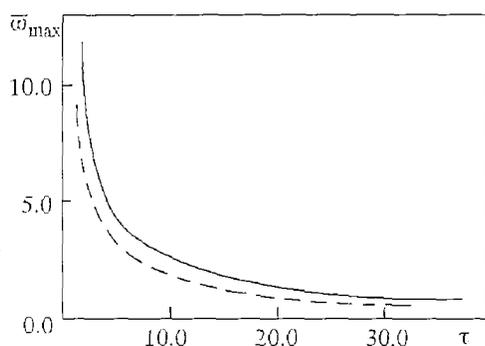


а

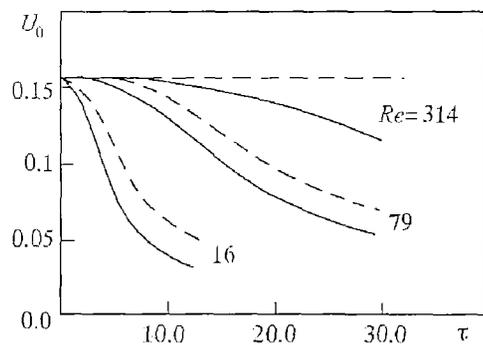


б

Рис. 3. Диффузия бесконечной прямолинейной вихревой нити при $\text{Re}=200$: сплошная линия - численные данные, точки - точное решение



a



b

Рис. 4. Изменение во времени завихренности в центре одного из двух сгустков (a) и скорости движения его центра (б); сплошная линия - полная модель, штриховая - упрощенная модель

ренности в центрах вихревых образований, u_0 - скорость движения центров. Введем безразмерные величины, положив

$$\bar{u}_0 = \frac{u_0 h}{\Gamma}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega h^2}{\Gamma}, \quad \tau = \frac{t \Gamma}{h^2}, \quad (11)$$

$$Re = \Gamma/\nu.$$

Результаты расчетов для полной модели были сопоставлены в двух вариантах: при простейшей схеме (см. рис.1, схема 1), и более точной (см. рис.2, схема 2). В качестве примера приведем результаты расчетов в том и другом случаях ($Re=314$, $\tau=40$) для координат центра сгустков и скорости его движения

$$\begin{aligned} x_{01}/h &= 7.15, & x_{02}/h &= 7.08, \\ y_{01}/h &= 2.13, & y_{02}/h &= 2.15, \\ \bar{u}_{01} &= 0.096, & \bar{u}_{02} &= 0.095. \end{aligned}$$

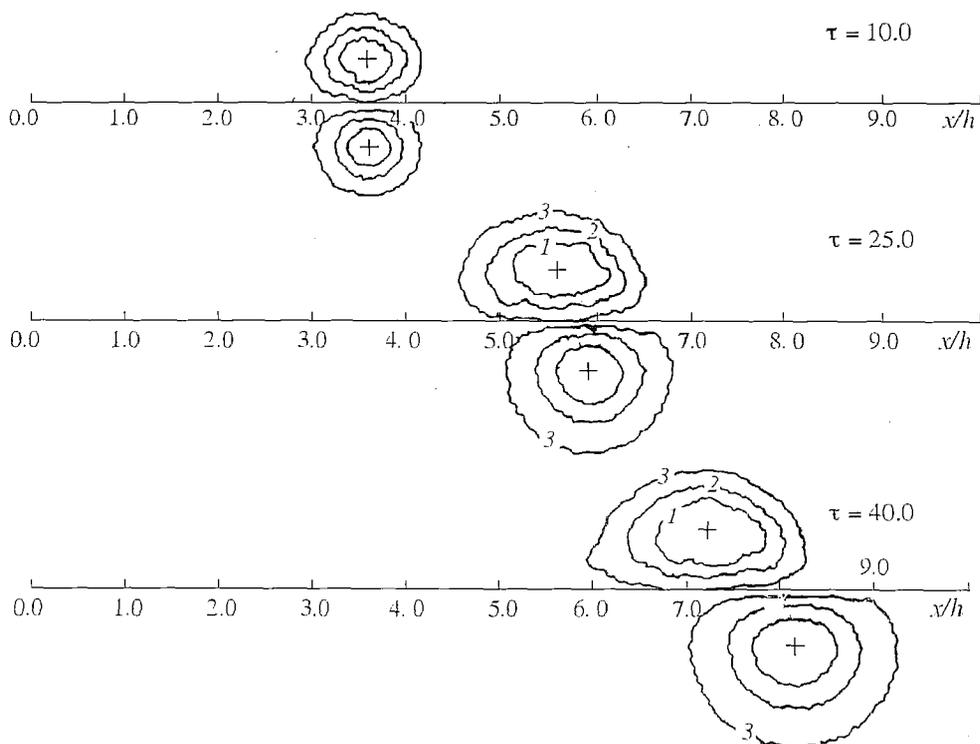


Рис. 5. Движение и развитие двух вихревых образований, полученных по упрощенной (нижняя полуплоскость) и полной моделям (верхняя полуплоскость), $Re=314$. Отмеченные границы: 1 - $\omega=0.7\omega_{\max}$; 2 - $\omega=0.4\omega_{\max}$; 3 - $\omega=0.1\omega_{\max}$

Наряду с полной моделью диффузии (локально-конвективной) рассматривалась и упрощенная (локальная). На рис. 4 и 5 приведены результаты моделирования развития указанного процесса.

Влияние диффузии на турбулентные характеристики плоской струи

Отметим следующую важную особенность данного численного метода. Здесь расчеты при больших числах Re оказываются более простыми, нежели при малых. Дело в том, что удельный вес диффузии с ростом Re снижается, а время, за которое накапливается ее существенный вклад, увеличивается. Таким образом, при больших числах Re влияние диффузии заметно проявляется в дальних участках следов и струй. Здесь реальные трудности возникают только при необходимости моделировать эти дальние участки, для чего без принятия специальных мер требуется длительный счет. Поэтому при отработке рациональной методики расчетов и проверке эффективности метода используются малые числа Re .

Рассмотрим далее истечение плоской струи в затопленное пространство из сопла с расстоянием между стенками h . Длина его L во много раз превосходит h , поэтому параметр L/h можно не рассматривать. Пусть в момент времени $\tau=0$ начинается истечение струи, причем среднерасходная скорость на срезе сопла соответствует u_0 .

Введем безразмерные параметры, положив

$$\bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}, \quad \tau = \frac{tu_0}{h}, \quad Re = \frac{u_0 h}{\nu}. \quad (12)$$

Наряду с полной моделью диффузии применим упрощенную, а также МДВ в чистом виде. Результаты расчетов приведены на рис. 6, 7 и 8, причем учет диффузии осуществлялся при $Re=558$.

Можно отметить, что вязкость оказывает сглаживающее влияние на формирование вихревых структур (см. рис. 6). При $Re \rightarrow \infty$ когерентные структуры образуются ближе к срезе сопла, влияние диффузии задерживает этот процесс, отодвигая эти структуры на 4-5 калибров от сопла. При этом упрощенная модель дает менее четкое описание формирования слоя смешения в начальном участке струи, нежели полная.

Молекулярная вязкость, как это видно из рис. 7 и 8, оказывает сглаживающее влияние и на профили осредненных скоростей в сечениях струи, но прежде всего на моменты второго порядка. В сечениях более отдаленных процесс диффузии, успев развиться более полно, проявляется более существенно. Учет влияния вязкости по приближенной методике недостаточен.

Подчеркнем, что отмеченные эффекты относятся к малым числам Рейнольдса, когда разница между тремя различными подходами становится особенно заметной.

Переход от непрерывных представлений к дискретным вносит в соответствующие схемы и модели новые элементы, расширяющие их возможности. Поэтому, строго говоря, нельзя ставить знак равенства между пределами применимости математических моделей, основанных на классических эйлеровых представлениях, и полученных на базе МДВ. Основной источник различия - новый механизм близкого взаимодействия тонких вихревых нитей, введение которого необходимо для обеспечения устойчивости расчетного процесса, но который одновременно обогащает модели.

Опыт систематического применения данных математических моделей позволит выявить реальные возможности, заложенные в них. Но уже сейчас можно отметить некоторые положительные стороны такого синтеза. Здесь

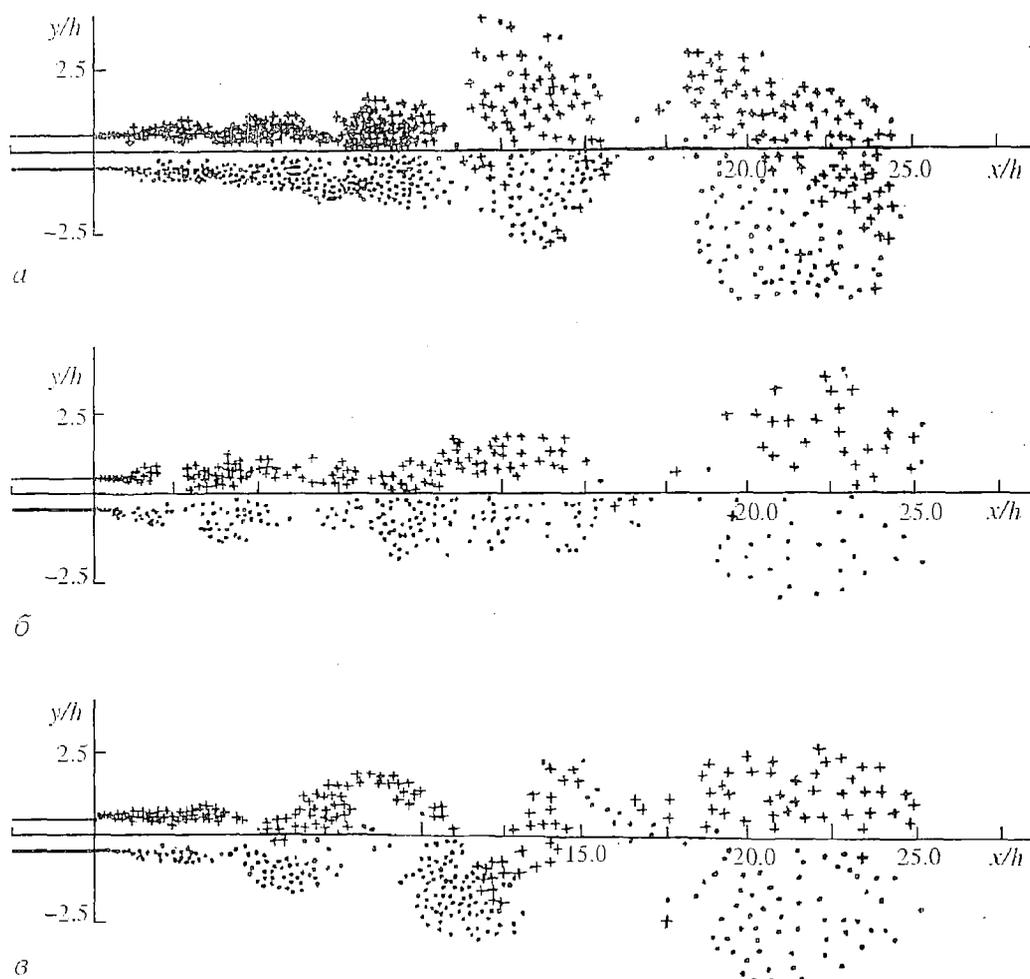


Рис. 6. Свободные вихри, моделирующие границы плоской струи при $\tau=60$: а - полная модель диффузии, $Re=558$; б - упрощенная модель, $Re=558$; в - без диффузии $Re \rightarrow \infty$

сохраняются все достижения, которые были завоеваны на основе МДВ. Кроме того, таким путем удастся уйти от необходимости применения очень мелких сеток для интегрирования уравнений Навье - Стокса.

Конечно, окончательная доводка математических моделей турбулентных следов и струй, а также оценка их достоверности, установление пределов применимости потребуют еще больших усилий. Одна из главных трудностей, которую предстоит преодолеть, связана с тем, что турбулентные движения жидкости и газа носят, как правило, существенно пространственный и нестационарный характер. Таким образом, даже процессы, начинающиеся как плоскопараллельные, нельзя считать сохраняющими двумерный характер далеко от обтекаемого тела или сопла. Поэтому строгая проверка достоверности математических моделей турбулентных следов и струй должна опираться на решение четырехмерных задач, что существенно усложняет численный эксперимент. Более простые модели - плоскопараллельные и осесимметричные - с определенной степенью осторожности следует применять для изучения ближних участков следов и струй.

Повышенный интерес к области механики, которую естественно назвать вихревой аэродинамикой, вызван возросшими запросами практики. Так, наряду с

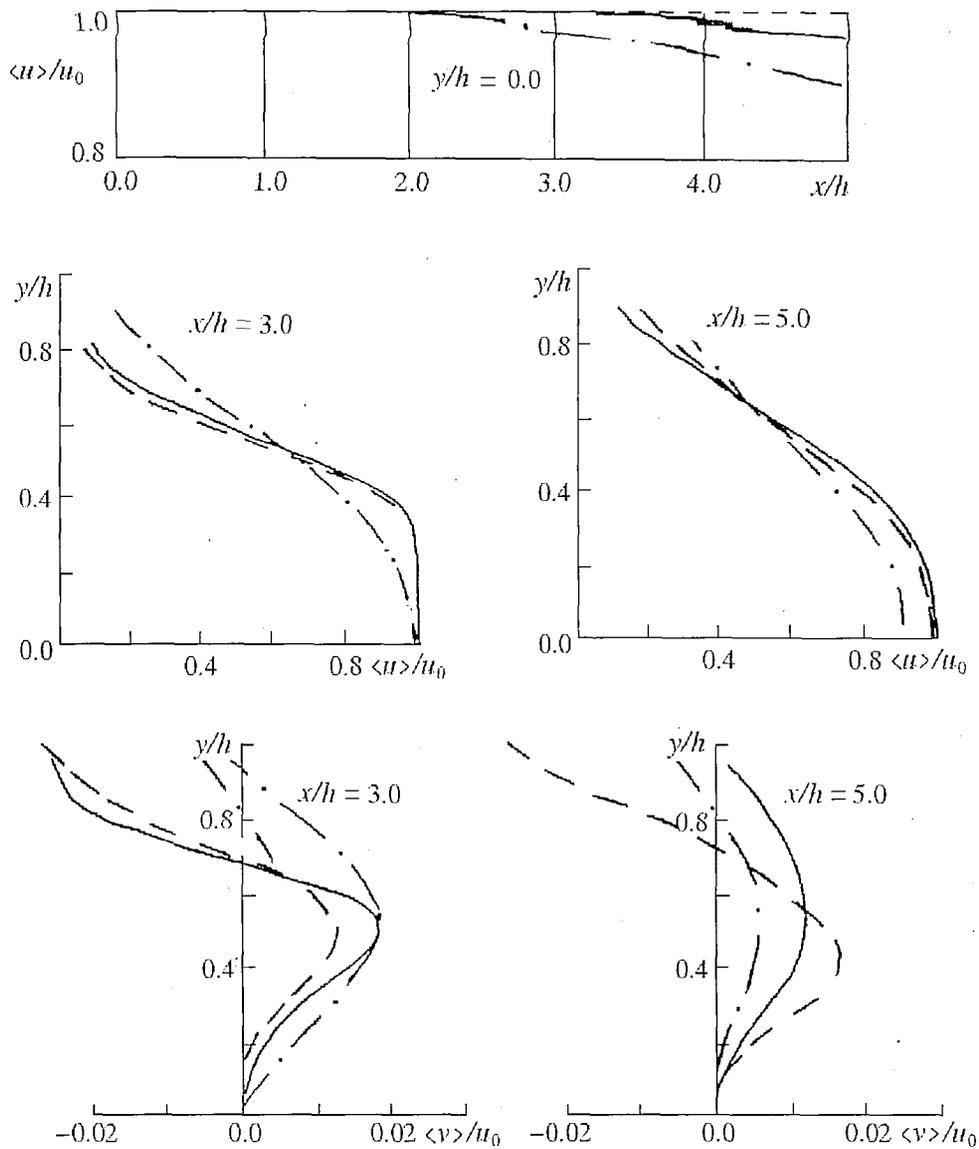


Рис. 7. Моменты первого порядка (мгновенные скорости) плоской струи, $Re=558$: сплошная линия - полная модель диффузии, штрихпунктирная - упрощенная, штриховая - без учета диффузии

динамикой полета и аэроупругостью, которые традиционно опираются на ее достижения, следует отметить и новые области. Прежде всего, это аэроакустика и анализ воздействия вихревых следов за самолетами и вертолетами на другие летательные аппараты и грузы.

Широкое распространение авиации, круглосуточные полеты, приближение аэропортов к жилым и деловым центрам приводят к необходимости снижения шума, значительная часть которого приходится на долю вихревых следов и турбулентных струй. Наряду с этим требуется сокращение интервалов как между взлетающими самолетами и вертолетами, так и при их посадке, особенно на больших аэродромах, с гарантированным обеспечением безопасности от воздействия вихревых следов.

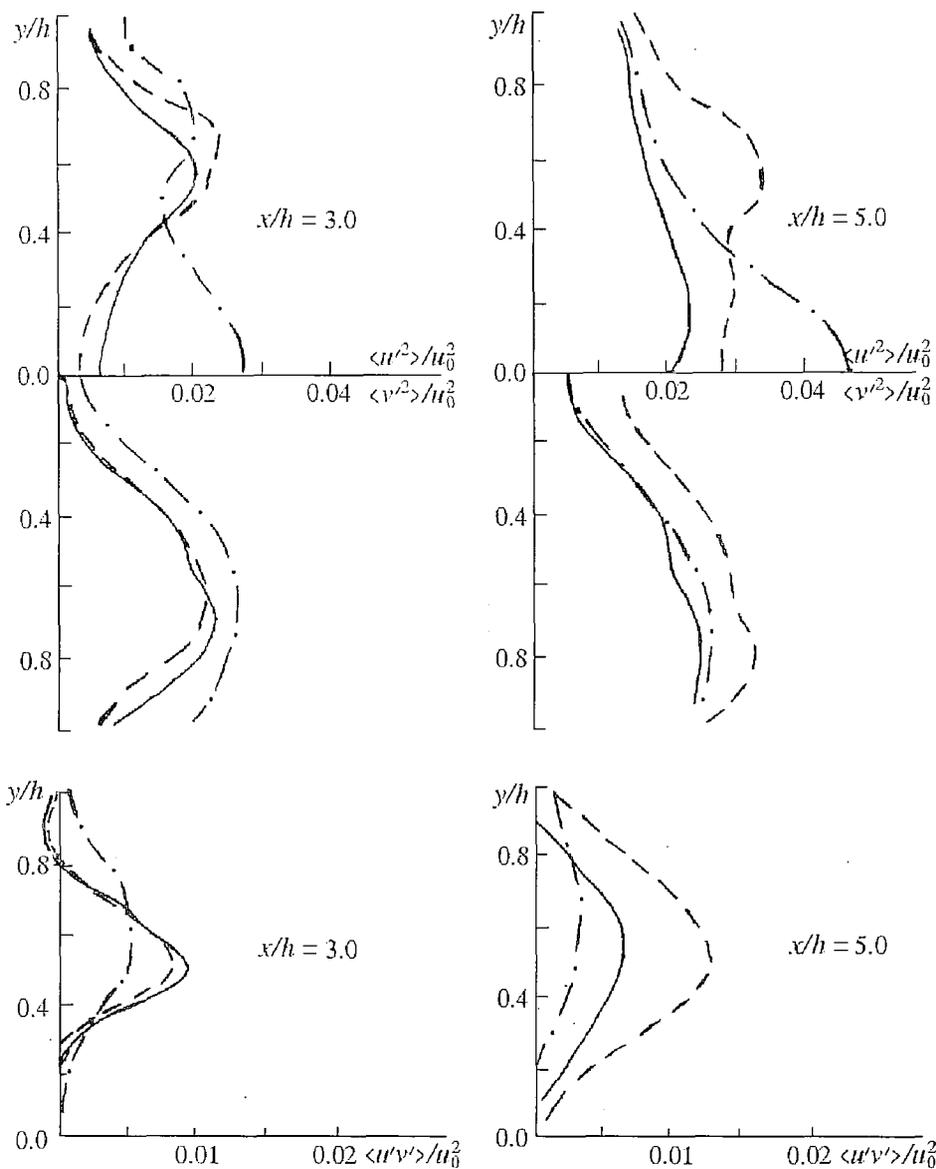


Рис. 8. Моменты второго порядка (осредненные квадраты и произведения скоростей) плоской струи, $Re=558$: сплошная линия - полная модель диффузии, штрихпунктирная - упрощенная, штриховая - без учета диффузии

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства России (Грант M2R300).

Библиографический список

1. Айранетов А.Б. Вихревая модель плоской турбулентной струи // Тр.ЦАГИ.1976. Вып.1784. С.3.
2. Белоцерковский С.М. К созданию замкнутых моделей турбулентности при отрывном обтекании тел и истечении струй // Тр. ВВИА им. проф.Н.Е. Жуковского. 1986. Вып.1313. С.3.

3. Белоцерковский С.М. Метод численного решения пространственной задачи о диффузии вихрей // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е.Жуковского. 1986. Вып.1313. С. 40.

4. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хлапов Н.В. Моделирование на ЭВМ плоских турбулентных струй//Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 3. С. 542.

5. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Хлапов Н.В. К построению замкнутых моделей турбулентных струй // Численное моделирование в аэрогидродинамике. М.:Наука,1986. С. 46.

6. Белоцерковский С.М., Дворак А.В., Желанников А.И., Котовский В.Н. Моделирование на ЭВМ турбулентных струй и следов // Проблемы турбулентных течений. М.:Наука,1987. С. 129.

7. Дворак А.В., Хлапов Н.В. Расчет пространственной турбулентной струи, истекающей в затопленное пространство // Тр. ВВИА им. проф. Н.Е. Жуковского. 1986. Вып.1313. С. 99.

8. Chorin A.J. Estimates of intermittency spectra and flow-up in development turbulence // Comm.Pure and Appl.Math. 1991. Vol. 34. P. 853.

9. Edwards A.V.J., Morfey C.I. A computer simulation of turbulent jet flow // Computers and Fluids. 1981. Vol.9, № 2. P. 205.

10. Ferziger J.H. Large eddy numerical simulations of turbulent flows // AIAA J. 1977. Vol. 15, № 9. P. 1261.

11. Inoue O., Leonard A. Vortex simulation of forced/unforced mixing layers // AIAA Pap. 1987, № 288. 19p. Turbulent layer in a ideal fluid // Phys.Fluids. 1972. Vol. 15, № 1. P.1.

Центральный аэрогидродинамический
институт

Поступила в редакцию 04.10.94

SIMULATION OF VORTEX DIFFUSION INFLUENCE ON JET TURBULENT CHARACTERISTICS

S.M. Belotserkovsky, N.V. Khlapov

The method is suggested for calculation of molecular diffusion on the base of Discret Vortex Method. A lot of examples: diffusion of infinit vortex filament, motion of vortex pair and issue of plane jet are exemplified. An approximate calculation of vortex diffusion is also presented.



Хлапов Николай Васильевич - родился в 1954 году. Окончил МФТИ (1982), затем учился в аспирантуре в ЦАГИ. С 1990 года - кандидат технических наук, работает в ЦАГИ. Опубликовал 12 статей. Занимался разработкой новых схем и целнейных математических моделей турбулентных струй. В данное время круг научных интересов - разработка и практическое применение метода вихрей для случая трехмерных потоков.