Изв.вузов «ПНД», т.3, № 2, 1995

ЖОЗЕФ ВАЛЕНТЕН БУССИНЕСК, ДИДЕРИК ИОГАНН КОРТЕВЕГ, ГУСТАВ ДЕ ВРИЗ И УРАВНЕНИЕ КДВ

> Уравнение КдВ в нормальной форме охарактеризовано Крускалом как «по-видимому, простейшее дифференциальное уравнение в частных производных..., не охватываемое классическими методами».
>
> *Дж.Майлс*

Уравнению Кортевега - де Вриза (уравнению КдВ) сто лет, если считать, что впервые оно явно выписано в статье

Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag. 1895. Vol.39. P. 422-443.

Это - официальный юбилей, хотя раньше уравнение появилось в докторской диссертации Густава де Вриза (*de Vries G.* Bijdrage tot de kennis der lange golden. Doctoral dissertation. University of Amsterdam, 1894), которая и послужила основой знаменитой статьи 1895 года. Впрочем, по мнению Дж. Майлса [1], это уравнение косвенно возникает в исследованиях 1871-1877 годов французского физика Жозефа Валентена Буссинеска (1842-1929), который известен своими работами в гидродинамике (достаточно вспомнить «приближение Буссинеска», используемое, например, в теории конвекции жидкости), в теории упругости, в теории распространения света и тепла. Непосредственно Дж.Майлс ссылается на статью 1872 года

Boussinesq J. Theoric des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal en communiquant du liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. J.Math. Pures Appl. 1872. Vol.17(2). P.55-108,

в которой приведены уравнения по сути такие же, как уравнение КдВ, но устроенные более сложно. Впервые уравнение КдВ было использовано для описания распространения волн на воде при слабой дисперсии и слабой нелинейности. История распорядилась так, что его открытие навсегда связано с именами известного голландского физика и механика Дидерика Иоганна Кортевега и преподавателя математики в голландских гимназиях Густава де Вриза.

Д.И. Кортевег (1848-1941) был учеником Я.Д. Ван-дер-Ваальса. Его первая докторская диссертация (1878) была посвящена движению вязкой жидкости в упругой трубе применительно к артериальному течению крови. С 1881 по 1918 год Кортевег возглавлял в Амстердамском университете кафедру математики и механики. Весьма занятно, что в его биографии нет упоминания о его работе о волнах на воде и, более того, нет ссылки на совместную работу со своим учеником де Вризом [1]. Судя по всему ни Кортевег, ни де Вриз не знали упомянутую выше работу Буссинеска. Де Вриз после защиты диссертации преподавал в гимназиях и опубликовал в Трудах голландской королевской академии наук и искусств две статьи о циклонах. Больше о нем ничего не известно.

В диссертации де Вриза уравнение КдВ было получено для описания длинных гравитационных волн в невязкой несжимаемой жидкости конечной глубины h, причем, в качестве переменной использовалось смещение $y(x,t)$ свободной поверхности жидкости от равновесного уровня. Уравнение имело следующий вид:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c_0\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{3}{2h} y \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) = 0, \tag{1}$$

где x - продольная координата, t - время, $c_0 = (gh)^{1/2}$, g - ускорение свободного падения. Несомненная ценность уравнения КдВ в том, что оно является модельным (иногда говорят эталонным) для любой физической системы с приближенным законом дисперсии

$$\omega/k = c_0(1 - bk^2), \tag{2}$$

и слабой квадратичной нелинейностью. Здесь $b \ll l^2$, l - характерный масштаб длины вдоль направления распространения волны, c_0 - фазовая скорость линейных волн.

В общем случае, когда нелинейные и дисперсионные добавки в исходных уравнениях, описывающих распространение волн, одного порядка величины и малы по сравнению с линейными членами, уравнение одноволнового приближения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c_0 + v(u))\frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{3}$$

В уравнении (3) все переменные безразмерные. В системе координат, движущейся со скоростью c_0, полагая $v(u)=u$, находим наиболее распространенную форму уравнения КдВ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{4}$$

Современный интерес к уравнению (4) и непрекращающееся число публикаций, связанных с изучением (4) и родственных ему эволюционных уравнений, начался с проблемы Ферми, Паста, Улама [2] и привел к переоткрытию Забуски и Крускалом в 1965 году солитона [3] (еще один юбилей!) и развитию метода обратной задачи рассеяния [4,5].

Солитону, как известно, соответствует точная компенсация изменений, происходящих в волне за счет дисперсионных свойств среды, изменениями, связанными с ее нелинейностью. Аналитически локализованное в пространстве решение уравнения (4), соответствующее одиночному возвышению или уединенной волне - солитону, записывается в виде

$$u(x,t) = u_{\text{макс}}\, \mathrm{ch}^{-2}[(x - Vt)/\Delta], \tag{5}$$

где $u_{\text{макс}}=3V$, V - постоянная скорость солитона, Δ -характерная ширина солитона. Решение (5) удовлетворяет уравнению КдВ при выполнении равенств

$$4\beta/\Delta^2 = V, \quad 6\beta/\Delta^2 = u_{\text{макс}}/2,$$

из которых следует, что: 1) чем выше солитон, тем он уже; 2) чем солитон шире, тем он медленнее бежит и тем меньше его амплитуда.

У КдВ-уравнения много «родственников». К ним относятся: модифицированное уравнение КдВ (кубичная нелинейность); уравнение Бенджамина, Бонн и Магони (вместо $\partial^3 u/\partial x^3$ в уравнение входит $\partial^3 u/\partial x^2 \partial t$); уравнение Бенджамина - Оно для описания внутренних волн в тонком стратифицированном слое, расположенном в однородной жидкости; наконец, нелинейное уравнение Шредингера для волнового пакета, решением которого являются солитоны огибающей (см., например, [1]).

Все перечисленные уравнения по свойствам решений аналогичны юбиляру - уравнению Кортевега - де Вриза. Хороший обзор этих вопросов можно найти в статье [6].

Библиографический список

1. *Майлс Дж.* Уравнение Кортевега - де Вриза (исторический очерк). Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / Под ред. Дж.Бэтчелора и Г.Моффата. М.: Мир, 1984. С. 186.

2. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems. I. Nonlinear Wave Motion // Lectures in Applied Mathematics. Ed. A.C. Newell. Amer. Math. Soc. Providence, R.1., 1955/1974. Vol.15. P.143-156.

3. *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. Vol.15. P. 240.

4. *Gardner C.S. Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteveg - de Vries equation // Phys.Rev.Let. 1967. Vol.19. P. 1095.

5. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова. М.: Наука, 1980.

6. *Корпел А., Банерджи П.П.* Эвристический подход к нелинейным волновым уравнениям с дисперсией и к решениям солитонного типа // ТИИЭР. 1984. Т.72, № 9. С. 6.

Саратовский государственный университет — *Д.И. Трубецков*