



## ПРИМЕНЕНИЕ КУМУЛЯНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВОЗМУЩАЕМЫХ ВНЕШНИМ ШУМОМ

*А.Б. Нейман*

Рассматриваются проблемы бифуркационного анализа динамических систем с шумом. Изложена методика бифуркационного анализа стохастических систем, основанная на кумулянтном разложении. В качестве примера рассматривается влияние шума на последовательность квазипериодических бифуркаций в отображении окружности и на бифуркации удвоения периода в отображении Фейгенбаума.

### Введение

Проблема анализа динамических систем с учетом флуктуаций впервые была сформулирована и рассмотрена в классической работе Л.С.Понтрягина, А.А.Андропова и А.А.Витта [1]. Опубликованная в 1933 году, она остается актуальной и по сей день. Об этом свидетельствует ее перевод на английский язык и публикация в 1989 году в сборнике под редакцией профессоров F.Moss, P.V.E.McClintock [2]. Интересно отметить, что её авторы, создатели современной теории нелинейных колебаний, уже тогда отчетливо понимали необходимость введения в рассмотрение случайных сил. В своей работе они сформулировали две основные задачи. Первая задача вытекает из принципиальной неустраимости шумов в реальных диссипативных системах. Следовательно, описание реальной динамической системы дифференциальными уравнениями является с необходимостью неполным. **Первая задача** формулировалась так: «*Выяснить общее поведение системы при наличии случайных толчков и, в частности, дать теоретическое построение, которое позволило бы из экспериментальных данных подойти к выяснению характера «случайных толчков» в реальных динамических системах*». **Вторая задача:** «*Дополнить биркгоффовскую общую теорию движений соображениями, связанными с учетом случайных толчков, в частности, выделить из множества движений динамической системы те движения, которые осуществляются с наибольшей вероятностью при наличии таких толчков*». Эти проблемы, сформулированные свыше шестидесяти лет назад, остаются актуальными и по сей день.

Дальнейшее развитие теории влияния шумов на нелинейные системы в физике связано с именами Р.Л.Стратоновича [3], Ю.Л.Климонтовича [4], С.М.Рытова [5], А.Н.Малахова [6], В.И.Кляцкина [7] и других.

Развитие современной теории колебаний, открытие явления динамического хаоса поставило ряд новых проблем, связанных с одной стороны с влиянием шума на динамику систем. К таким новым задачам прежде всего следует отнести проблемы бифуркаций динамических систем в присутствии шума; проблемы статистических и динамических характеристик сложных автоколебаний с учетом флуктуаций; задачи, связанные с анализом временных рядов методами нелинейной динамики. С другой стороны, необходимость учета флуктуаций еще более подчеркивается последними открытиями в области качественной теории дифференциальных уравнений. Режимы динамического хаоса, реализующиеся в реальных физических системах чаще всего соответствуют так называемым квазигиперболическим аттракторам [8]. Для таких аттракторов характерно сосуществование в фазовом пространстве счетного числа предельных множеств различной природы. При малом шевелении параметров эти предельные множества претерпевают различные бифуркации. В результате становится невозможным дать полную картину динамических режимов и их бифуркаций [9]. Тем не менее, в реальных физических системах экспериментатор наблюдает один предельный режим, который представляет собой результат сложного взаимодействия внутренней динамики системы, внутренних шумов и окружающей среды. Очевидно, что учет шумов необходим для анализа подобных систем как с точки зрения полноты физического описания (неустранимость флуктуаций как следствие флуктуационно-диссипационной теоремы), так и с математической точки зрения (упрощение описания за счет сглаживающего действия флуктуаций).

Область исследований нелинейных систем с шумом чрезвычайно широка и бурно развивается в последнее время. В этой статье мы ограничимся лишь некоторыми проблемами влияния *внешнего шума* на динамику нелинейных систем, а именно: мы остановимся на рассмотрении вопросов, связанных с бифуркациями динамических систем с шумом. В разделе 1 мы кратко остановимся на математическом формализме марковских процессов для описания влияния шума на динамические системы. В разделе 2 обсуждаются проблемы бифуркационного анализа систем с шумом. Раздел 3 посвящен изложению кумулянтного подхода для бифуркационного анализа систем с шумом. В последних разделах кумулянтный метод применяется для исследования влияния шума на квазипериодическую последовательность бифуркаций в отображении окружности и на бифуркации удвоения периода.

## **1. Математический аппарат для описания влияния внешнего шума на динамические системы**

Рассмотрим для определенности нелинейную динамическую систему в одномерном фазовом пространстве, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (1)$$

где  $f$  - нелинейная функция переменной состояния  $x$  и  $\alpha$  - параметр системы. Существует два основных метода для описания влияния внешнего шума, которые основаны на теории марковских процессов [1, 4].

Первый подход основан на использовании стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) или уравнений Ланжевена. В правую часть системы вводятся случайные источники, которые моделируются  $\delta$ -коррелированными случайными гауссовыми процессами. Это приближение соответствует предположению о том, что временные масштабы внешнего шума и динамической системы несоизмеримы, причем процессы в системе без шума протекают гораздо медленнее. На спектральном языке это означает, что спектр шума является равномерным или белым. Итак, вместо детерминированной

системы (1) мы имеем стохастическую систему, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, \alpha) + (2D)^{1/2}g(x)\xi(t), \quad (2)$$

где  $g(x)$  описывает взаимодействие среды, генерирующей внешний шум, с системой; величина  $D$  является интенсивностью гауссова белого шума  $\xi(t)$ . Автокорреляционная функция шума является  $\delta$ -функцией:  $\langle \xi(t+s)\xi(t) \rangle = \delta(s)$ . Если функция  $g(x)$  является константой, то такой шум называется аддитивным. В противном случае шум называется мультипликативным.

Второй подход основан на использовании уравнения Эйнштейна - Фоккера - Планка (УЭФП) [10]. Переход от СДУ к УЭФП возможен в случае, когда случайный источник  $\xi(t)$  является белым шумом, то есть когда случайный процесс  $x(t)$  является марковским [11]. УЭФП описывает эволюцию во времени плотности вероятности процесса  $p(x,t)$

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x f(x,\alpha)p(x,t) + D\partial_{xx}p(x,t). \quad (3)$$

Однако такой переход неоднозначен в силу сложностей, возникающих при рассмотрении стохастических интегралов. Существует несколько форм записи УЭФП и СДУ, среди которых наиболее употребимые форма Стратоновича, форма Ито и кинетическая форма. Детали данного вопроса читатель может найти в серии недавних работ Ю.Л. Климонтовича [12]. Отметим только, что для рассмотрения естественных флуктуаций наиболее физически адекватные результаты дает кинетическая форма, которая вытекает из кинетической теории. Для описания влияния внешнего шума с физической точки зрения более подходит форма Стратоновича, которая будет использоваться в этой статье. В случае аддитивного шума подходы Ито и Стратоновича совпадают. Оба подхода позволяют определить статистические характеристики процесса. Например, стационарную плотность вероятности, спектр мощности, корреляционную функцию и другие.

Другими часто используемыми моделями для описания динамических систем являются системы с дискретным временем или дискретные отображения

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha), \quad (4)$$

здесь  $f$  - опять нелинейная функция, а  $\alpha$  - параметр системы. Для систем с дискретным временем также возможны два способа описания влияния внешнего шума. Один из них аналогичен СДУ и основан на решении стохастических разностных уравнений

$$x_{n+1} = f(x_n, \alpha) + D^{1/2}\xi_n, \quad (5)$$

где  $\xi_n$  - дискретный белый шум:  $\langle \xi_{n+m}\xi_n \rangle = \delta(m)$ . Уравнение, описывающее эволюцию плотности вероятности в дискретном времени  $p(x,n)$ , называется уравнением Фробениуса - Перрона или Чепмена - Колмогорова [13]

$$p(x,n+1) = \int (1/D) W\{[x - f(y,\alpha)]\}p(y,n)dy, \quad (6)$$

где  $W(z)$  - плотность вероятности внешнего шума.

Однако, далеко не всегда случайный источник  $\xi$  можно считать белым шумом. Часто временные масштабы случайных сил сопоставимы с временными масштабами возмущаемой системы. В этом случае корреляционная функция случайного источника отлична от  $\delta$ -функции и такой шум называется цветным. Основная трудность, возникающая здесь, это немарковость результирующего процесса  $x(t)$ . Аппарат УЭФП непосредственно неприменим для цветного шума. Один из методов анализа состоит в добавлении дополнительных СДУ, описывающих источник цветного шума [14]. Одной из наиболее распространенных

моделей цветного шума является экспоненциально коррелированный гауссов шум, который моделируется процессом Орнштейна - Уленбека

$$\dot{\xi} = (1/\tau) [-\xi + (2D)^{1/2}w(t)], \quad (7)$$

где  $w(t)$  -  $\delta$ -коррелированный гауссов шум,  $\tau$  - время корреляции шума  $\xi(t)$ . Автокорреляционная функция  $\langle \xi(t+s)\xi(t) \rangle = (D/\tau)\exp(-|s|/\tau)$ . Белый шум реализуется как предел  $\tau \rightarrow 0$ . Дополняя уравнение для переменной состояния стохастическим дифференциальным уравнением (7), получаем расширенную систему СДУ, в которую входят только гауссовы белые шумы, то есть случайный процесс  $\{x(t), \xi(t)\}$  будет марковским и возможность применения аппарата уравнений Эйнштейна - Фоккера - Планка сохраняется.

## 2. Бифуркации в динамических системах с шумом

Коль скоро шум принят во внимание, необходим переход от рассмотрения предельных множеств в фазовом пространстве динамической системы к анализу усредненных по ансамблю статистических характеристик стохастического процесса, описываемого СДУ или УЭФП. Так как УЭФП является линейным уравнением, то в общем случае трудно ожидать наличия бифуркаций в системе с шумом при изменении параметров в обычном понимании термина «бифуркация».

Проиллюстрируем последнее на простом примере бифуркации удвоения состояний равновесия (pitchfork bifurcation) [1]. В отсутствие шума эта бифуркация моделируется модельной системой

$$\dot{x} = \varepsilon x - x^3, \quad (8)$$

где величина  $\varepsilon$  является бифуркационным параметром. При  $\varepsilon < 0$  в фазовом пространстве системы (которое в данном случае есть просто прямая линия) имеется одно глобально устойчивое состояние равновесия в начале координат. При положительных значениях параметра в системе имеются два локально устойчивых состояния равновесия  $\pm\varepsilon^{1/2}$  и седловое состояние равновесия в нуле. Значение параметра  $\varepsilon=0$  является бифуркационным. При добавлении аддитивного белого шума интенсивности  $D$  система описывается УЭФП вида

$$\partial p(x,t) = -\partial_x[(\varepsilon x - x^3)p(x,t)] + D\partial_{xx}p(x,t), \quad (9)$$

которое имеет стационарное решение  $p_{st}(x)$

$$p_{st}(x) = C\exp[(1/D)(x^2/2 - x^4/4)]. \quad (10)$$

Очевидно, что при любых значениях параметра  $\varepsilon$  УЭФП имеет всегда одно глобально устойчивое стационарное решение. Шум индуцирует глобальную устойчивость системы [15], анализ которой может быть проведен в терминах соответствующих функционалов Ляпунова [4,10], что является аналогом  $H$ -теоремы Больцмана. Однако, при изменении управляющего параметра происходят качественные изменения структуры стационарной плотности вероятности (10). Действительно, при отрицательных значениях параметра стационарная плотность имеет один глобальный максимум в начале координат. Для положительных значений  $\varepsilon$  стационарная плотность вероятности характеризуется наличием двух локальных максимумов, соответствующих устойчивым состояниям равновесия детерминированной системы, и локальный минимум, соответствующий седлу в фазовом пространстве невозмущенной системы. Таким образом, в данном случае под бифуркацией следует понимать качественное изменение структуры стационарной плотности вероятности при изменении управляющего параметра.

Подобная идеология принята во многих работах, посвященных проблеме бифуркаций динамических систем с шумами [16-19]. Однако, в качестве величины для анализа могут быть выбраны различные статистические характеристики: спектр мощности [20], время первого достижения границы случайным процессом [21, 22] и другие.

Учет естественных флуктуаций ведет к нелинейности коэффициента диффузии. Последнее ведет к изменению асимптотики стационарного распределения [4]. Рассмотрение вопросов учета влияния естественных шумов выходит за рамки настоящей статьи. Обсуждение этой проблемы читатель может найти в работах Ю.Л.Климонтовича [4, 12].

Эффекты влияния внешнего шума могут быть условно разделены на две группы. К первой группе относятся явления сдвига бифуркационных точек и линий в пространстве параметров за счет шума. Однако такого же поведения можно достичь простым изменением управляющих параметров детерминированной системы [17, 23]. Другая группа явлений связана с понятием *индуцированных шумом переходов* [18]. Изменение интенсивности шума приводит к появлению новых режимов, которые не реализуются в соответствующей детерминированной системе. Параметры, определяющие свойства шума (интенсивность, время корреляции), становятся управляющими параметрами системы. Следовательно, бифуркационный анализ необходимо проводить в расширенном пространстве параметров, в которое дополнительно включаются параметры шума. Отметим, что впервые явление индуцированного шумом перехода было обнаружено в работе Р.Л. Стратоновича и П.С. Ланда [24], посвященной исследованию параметрических флуктуаций в автогенераторе.

Таким образом, для проведения бифуркационного анализа динамической системы с шумом прежде всего необходимо найти стационарное решение УЭФП или уравнения Фробениуса - Перрона для дискретных отображений. Затем проводится исследование структуры статистических характеристик при изменении управляющих параметров. Очевидно, что такая программа гораздо сложнее, чем бифуркационный анализ детерминированных систем. Для детерминированных систем бифуркационный анализ часто сводится к решению алгебраических задач (определение собственных значений матриц линеаризации или матриц монодромии). Численные методы бифуркационного анализа также хорошо разработаны [25]. Сложности анализа систем с шумом начинаются с определения стационарной плотности вероятности. Для УЭФП стационарная плотность вероятности может быть получена аналитически лишь для одномерных систем. Для двумерных динамических систем это сделать чаще всего не удается. Например, для классического генератора Ван-дер-Поля с аддитивным шумом точное стационарное решение УЭФП до сих пор неизвестно. Более того, уже для трехмерных динамических систем численное решение УЭФП представляет значительные вычислительные сложности. Что касается дискретных систем, то даже для одномерных отображений с шумом стационарное решение уравнения Фробениуса - Перрона аналитически найти не удается.

Аналитические результаты можно получить в предельных случаях малых и больших шумов [26].

Теория влияния слабого шума, основанная на понятии квазипотенциалов, была построена в классических работах А.Д.Вентцеля и М.И.Фрейдлина [27]. В дальнейшем в работах Ю.И. Кифера [28], Я.Г. Синая [29], М.Л. Бланка [30] было рассмотрено влияние слабого шума на странные аттракторы. В частности, было показано [28], что малые случайные возмущения динамической системы со странным аттрактором приводят к малым же изменениям инвариантной меры или стационарной плотности вероятности. В недавних работах [19, 31] теория квазипотенциалов была расширена на системы со сложной динамикой. Изложим вкратце основные идеи этой теории.

Предположим, что динамическая система имеет аттрактор в  $N$ -мерном фазовом пространстве и существует инвариантная мера на этом аттракторе. Пусть система возмущается слабым гауссовым белым шумом интенсивности  $D$ ,  $D \rightarrow 0$  и

описывается системой СДУ вида

$$\dot{x}_i = f_i(x) + g_{ij}(x)\xi_j(t), \quad i=1, \dots, N, \quad (11)$$

где  $\langle \xi_i(t+s)\xi_j(t) \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(s)$ . Тогда инвариантная мера или стационарная плотность вероятности  $p_{st}(x)$  выражается через квазипотенциал (или неравновесный потенциал)  $\Phi(x)$  следующим образом:

$$p_{st}(x) \propto \exp [-\Phi(x)/D]. \quad (12)$$

Квазипотенциал, который является аналогом свободной энергии [4] для неравновесного стационарного состояния, зависит только от переменных состояния и не зависит от интенсивности шума  $D$ . Квазипотенциал принимает минимальные значения на аттракторе и является решением уравнения Гамильтона - Якоби

$$f_i(x)\partial_i\Phi(x) + DQ_{ij}(x)\partial_i\Phi(x)\partial_j\Phi(x) = 0, \quad (13)$$

где  $Q_{ij}(x) = \sum_k g_{ik}(x)g_{jk}(x)$  - матрица диффузии. После получения квазипотенциала ставится задача определения числа экстремумов  $\Phi(x)$  при изменении управляющих параметров системы. Указанная методика была применена для исследования влияния шума на последовательность бифуркаций удвоения периода и на последовательность квазипериодических бифуркаций [32, 33]. Следует отметить, что большую часть исследований этим методом приходится проводить численно. При этом задача продолжения бифуркационных решений по параметрам, равно как и построение бифуркационных диаграмм в пространстве управляющих параметров, представляет собой нетривиальную численную проблему.

### 3. Применение кумулянтного анализа для исследования влияния шума на бифуркации

Идея метода кумулянтного анализа состоит в переходе от стохастических уравнений или соответствующего кинетического уравнения к системе детерминированных уравнений, описывающих эволюцию кумулянтов к некоторому стационарному состоянию [34]. В силу нелинейности системы цепочка уравнений, описывающих эволюцию кумулянтов (будем называть такие уравнения кумулянтными), является незамкнутой: в уравнение для  $n$ -го кумулянта входят кумулянты высших порядков, например,  $n+1$ ,  $n+2$  [35]. Для замыкания этой цепочки используют различные модельные приближения, простейшим из которых является гауссово приближение, учитывающее только кумулянты первых и вторых порядков. После замыкания цепочки кумулянтных уравнений получаем новую динамическую систему, описывающую эволюцию кумулянтов. Состояния равновесия системы кумулянтных уравнений описывают качественную структуру стационарной плотности вероятности. Бифуркационный анализ системы кумулянтных уравнений может быть проведен обычными методами теории динамических систем. Важно отметить, что анализ новой динамической системы кумулянтных уравнений проводится в расширенном пространстве параметров, куда помимо параметров невозмущенной системы входят параметры, характеризующие шум (например, интенсивность шума и время корреляции).

Во многих случаях гауссово приближение адекватно описывает влияние слабого шума. Это было показано на примерах исследования фазового перехода в глобально связанных стохастических осцилляторах [34], времен релаксации броуновского движения в потенциалах различной формы [35], систем фазовой синхронизации [36], бистабильного осциллятора с шумом [37], индуцированного цветным шумом перехода [38], стохастического резонанса [39]. В работе [40] этот подход был применен для исследования влияния цветного шума на

последовательность бифуркаций удвоения периода, а в работе [41] - для последовательности квазипериодических бифуркаций. В следующих разделах мы подробно рассмотрим применение кумулянтного метода на примерах отображения окружности, описывающего последовательность квазипериодических бифуркаций, и отображения Фейгенбаума, описывающего последовательность бифуркаций удвоения.

#### 4. Влияние шума на последовательность квазипериодических бифуркаций

Одним из путей перехода к хаосу в диссипативных системах является переход от квазипериодических колебаний на торе к хаотическому аттрактору. Этот сценарий сопровождается последовательностью квазипериодических бифуркаций (mode-locking bifurcations) на торе. Наиболее популярной моделью для исследования универсальных свойств этого сценария является отображение окружности (см., например, в [42, 43])

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Omega - (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_k). \quad (14)$$

Отображение (14) может рассматриваться как нелинейное преобразование фазы осциллятора с периодом 1. Параметр  $\Omega$  соответствует отношению невозмущенных частот, а параметр  $K$  определяет величину нелинейности. В суперкритической области ( $K > 1$ ) это отображение необратимо и может демонстрировать хаотическое поведение. Универсальные свойства скейлинга исследуются в нетривиальном критическом случае, когда  $K=1$  [44].

Рассмотрим последовательность квазипериодических бифуркаций, генерируемых числами Фибоначчи  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  с числом вращения  $\omega_n$

$$\omega_n = F_n / F_{n+1} = 1 / (1 + F_{n-1}/F_n). \quad (15)$$

Предел последовательности  $\omega_n$  при  $n \rightarrow \infty$  есть золотое сечение

$$\omega^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega^*. \quad (16)$$

На плоскости параметров  $(\Omega, K)$  это соответствует наличию языков Арнольда, которые ограничивают области существования резонансов на торе с числами вращения  $\omega_n$ . Ширина языков  $\Delta\Omega_n$ , генерируемая последовательностью (15), демонстрирует самоподобную структуру

$$\Delta\Omega_n \propto \delta^{-n}, \quad (17)$$

где  $\delta$  является универсальной константой,  $\delta = 2.8336\dots$ .

Рассмотрим теперь влияние аддитивного белого гауссова шума. Стохастическое отображение записывается в виде

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Omega - (K/2\pi)\sin(2\pi\theta_k) + \sigma\xi_k. \quad (18)$$

Действие шума ведет к уменьшению ширины языков Арнольда. Более того, существует максимально допустимая величина интенсивности шума  $\sigma_n^{\max}$  (для каждого из языков с числом вращения  $\omega_n$ ), при котором еще возможно различить данный резонанс. Существует универсальный закон скейлинга, связывающий эту максимально допустимую интенсивность шума и порядок резонанса,

$$\sigma_n \propto \beta^{-n}, \quad (19)$$

где  $\beta$  - другая универсальная постоянная,  $\beta = 2.306\dots$ . Этот результат был получен

аналитически методами частичных интегралов [45] и квазипотенциалов [33]. Мы рассмотрим эту проблему методом кумулянтного анализа в гауссовом приближении.

Введем сначала обозначения для кумулянтов

$$x_k \equiv \langle \theta_k \rangle, \quad y_k \equiv \langle \theta_k^2 \rangle - \langle \theta_k \rangle^2, \quad (20)$$

где скобки усреднения  $\langle \cdot \rangle$  означают усреднение по ансамблю реализаций стохастического процесса  $\xi_k$ . Уравнения, описывающие эволюцию кумулянтов, могут быть выведены непосредственно из стохастического отображения (18) или из соответствующего уравнения Фробениуса - Перрона. Принимая во внимание, что в гауссовом приближении  $\langle \sin(2\pi\theta_k) \rangle = \exp(-2\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k)$  [35], получаем

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Omega - K/(2\pi) \exp(-2\pi y_k) \sin(2\pi x_k), \\ y_{k+1} &= y_k + K^2/(4\pi^2) \{ (1/2) [1 - \exp(-8\pi^2 y_k) \cos(4\pi x_k)] - \exp(-4\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k)^2 \} - \\ &\quad - 2K \exp(-2\pi^2 y_k) \cos(2\pi x_k) y_k + \sigma^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Начальные условия для кумулянтного отображения определяются как

$$x_0 = \theta_0, \quad y_0 = 0, \quad (22)$$

где  $\theta_0$  является неподвижной точкой соответствующей детерминированной системы. Задание начальных значений кумулянтов в таком виде соответствует начальному распределению в виде  $\delta$ -функции:  $p(\theta, 0) = \delta(\theta - \theta_0)$ . Таким образом, мы получаем динамическую систему, которая содержит новый параметр - интенсивность шума, и дальнейшее рассмотрение будет проводиться в расширенном пространстве параметров  $(\Omega, K, \sigma)$ . Предмет интереса составляют неподвижные точки кумулянтного отображения (21). Бифуркаций кумулянтного отображения соответствуют качественным изменениям стационарной плотности вероятности. Однако, так как эволюция кумулянтов в гауссовом приближении описывается дискретным отображением, то бифуркационный анализ может быть проведен обычными методами [25]. В пределе слабого шума мы можем упростить отображение (21), оставляя только линейные члены по второму кумулянту  $y_k$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \Omega - K/(2\pi) (1 - 2\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k), \\ y_{k+1} &= [1 - K \cos(2\pi x_k)]^2 y_k + \sigma^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Прежде всего на рис.1 показан результат численного расчета плотности вероятности  $P(\theta)$  для стохастического отображения (18) и гауссова аппроксимация одного из максимумов. Значения параметров выбраны в области существования резонанса с числом вращения  $\omega_5 = 5/8$  и слабого шума  $\sigma = 10^{-3}$ . Плотность вероятности имеет восемь максимумов в силу существования неподвижной точки периода 8 в невозмущенной системе. Каждый из максимумов  $P(\theta)$  может быть аппроксимирован гауссовым распределением вида

$$P_G^{(i)}(\theta) = [1/(2\pi y_0^{(i)})^{1/2}] \exp[-(\theta - x_0^{(i)})^2 / (2y_0^{(i)})], \quad (24)$$

где  $x_0^{(i)}$  и  $y_0^{(i)}$  - координаты  $i$ -той компоненты неподвижной точки кумулянтного отображения (23). Аналогичная картина получается для других чисел вращения. Таким образом, гауссово приближение дает корректное описание структуры плотности вероятности.

Далее мы проводим двухпараметрический бифуркационный анализ на

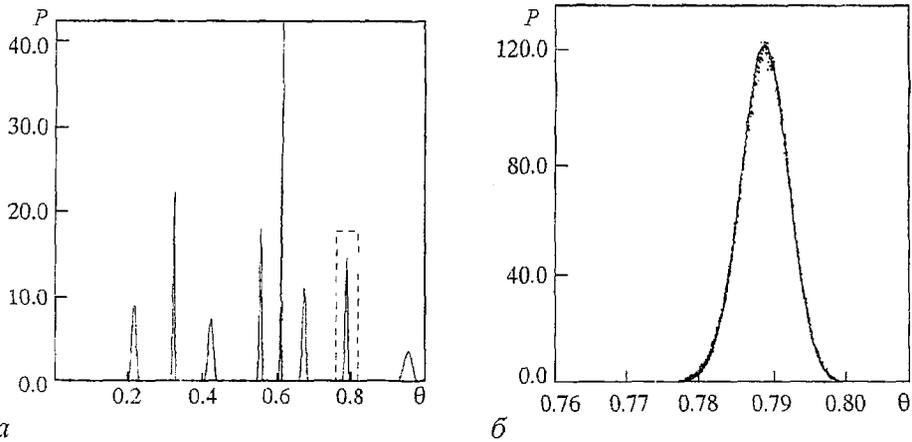


Рис. 1. Плотность вероятности отображения (18), полученная численным моделированием: *a* - полная структура; *б* - отмеченный максимум; точки соответствуют численному моделированию, непрерывная линия соответствует гауссовой аппроксимации (24)

плоскости параметров  $(\Omega, \sigma)$  при критическом значении параметра нелинейности  $K=1$  вдоль последовательности чисел вращения, ведущей к золотому сечению. Бифуркационные линии, изображенные на рис.2, соответствуют бифуркациям рождения резонансных циклов (неподвижных точек) с числами вращения  $\omega_n = 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13$ . Бифуркационным условием на этих линиях является равенство «+1» одного из мультипликаторов неподвижной точки (другой мультипликатор по модулю меньше единицы). Эти бифуркационные линии имеют коразмерность 1. Из рисунка видно, что существуют граничные значения интенсивности шума  $\sigma_n^{\max}$  для каждого резонанса, определяющие область существования резонанса на плоскости параметров  $(\Omega, \sigma)$ . Точки на бифуркационной диаграмме, соответствующие этим значениям, имеют коразмерность 2, так как эти бифуркационные точки определяются двумя условиями: первое - равенство «+1» одного из мультипликаторов; второе - максимум бифуркационной кривой  $\sigma(\Omega)$ .

Гауссово приближение корректно описывает ситуацию предельно малых шумов, когда потенциальные ямы, соответствующие устойчивым фиксированным точкам невозмущенной системы, хорошо разделены (см. рис.1). При приближении к точкам бифуркации существенным становится индуцированная шумом диффузия через потенциальные барьеры, разделяющие минимумы потенциала. В этом случае гауссово приближение, конечно, неудовлетворительно описывает динамику этой диффузии. Для корректного описания диффузии через потенциальные барьеры, в принципе, необходим учет всех кумулянтов. Однако в этом случае кумулянтные уравнения не будут демонстрировать бифуркации в обычном понимании этого термина. Этот факт отмечался в монографии В. Хорстхемке и Р. Лефевра [18]. Действительно, УЭФП имеет глобально устойчивое стационарное решение, которое не претерпевает ветвления при изменении управляющего параметра\*. Следовательно, бифуркации будут отсутствовать и для стационарных решений полной системы кумулянтных уравнений. Гауссово приближение, при котором каждый максимум плотности вероятности аппроксимируется гауссовым распределением, позволяет получить бифуркации в системе кумулянтных уравнений, которые фактически соответствуют изменению числа экстремумов стационарной плотности вероятности. Положение экстремумов определяется первыми кумулянтами, вторые кумулянты позволяют учесть действие шума в первом порядке по малому параметру интенсивности шума.

\* Напомним, что бифуркации невозмущенной системы отражаются в изменении числа экстремумов стационарной плотности вероятности системы с шумом

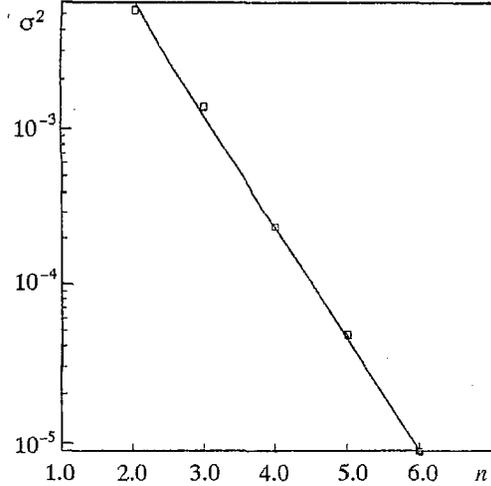
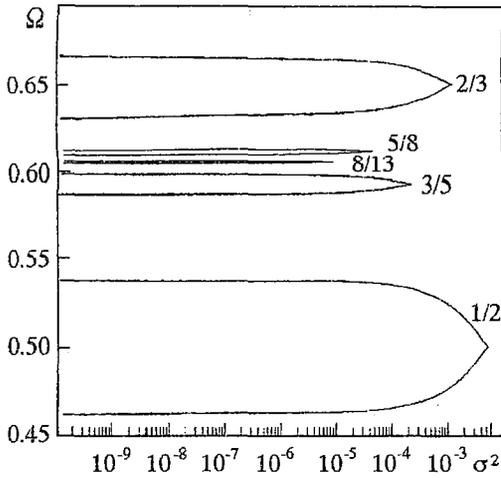


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма отображения (23)

Рис. 3. Зависимость  $\sigma_n^{\max}$  от  $n$  (квадраты) и аппроксимация ее законом  $\beta_{\text{cum}}^n$ ,  $\beta_{\text{cum}} = 2.23$  (линия)

Вернемся к рассмотрению бифуркационной диаграммы рис. 2. Важно отметить, что последовательность  $\sigma_n^{\max}$  удовлетворяет закону скейлинга  $\sigma_n^{\max} \propto \beta_{\text{cum}}^{-n}$  с показателем  $\beta \approx 2.23$  (рис. 3). Таким образом, кумулянтный анализ в гауссовом приближении дает константу скейлинга, находящуюся в хорошем соответствии с результатами строгой теории.

Включение в рассмотрение кумулянтов высших порядков не изменяет качественную картину поведения системы. Однако здесь возникают сложности, связанные с численными алгоритмами бифуркационного анализа динамической системы кумулянтных уравнений. Так как система рассматривается для очень малых значений интенсивности шума, то возникают проблемы с ошибками округления при исследовании циклов большого периода. При учете высших кумулянтов размерность системы кумулянтных уравнений возрастает и, следовательно, возрастают сложности при анализе бифуркаций циклов больших периодов. Поэтому исследование влияния учета высших кумулянтов на величину константы скейлинга в настоящей работе не рассматривается и будет предметом дальнейших исследований.

Применение кумулянтного анализа позволяет рассмотреть и случай мультипликативного шума, который может рассматриваться как стохастическая модуляция параметра нелинейности  $K$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \Omega - [(K + \xi_k)/(2\pi)] \sin(2\pi\theta_k). \quad (25)$$

Метод, изложенный выше, дает следующее кумулянтное отображение в гауссовом приближении

$$x_{k+1} = x_k + \Omega - K/(2\pi)(1 - 2\pi^2 y_k) \sin(2\pi x_k),$$

$$y_{k+1} = [1 - K \cos(2\pi x_k)]^2 y_k + K^2/(4\pi^2) \sigma^2 \sin(2\pi x_k). \quad (26)$$

Результат бифуркационного анализа этой системы для последовательности чисел вращения, ведущих к золотому сечению, дает результаты качественно аналогичные случаю аддитивного шума (см. рис.2). Для скейлинга интенсивности шума мы получили константу  $\beta_{\text{cum}} \approx 2.26$ . Необходимо отметить, что качественно аналогичные результаты для мультипликативного и аддитивного шума получаются только в пределе малых шумов. При определенных величинах интенсивности мультипликативного шума возможны индуцированные шумом переходы [18], которые не реализуются при возмущении аддитивным шумом.

## 5. Кумулянтный анализ влияния шума на последовательность бифуркаций удвоения периода

Традиционной моделью, описывающей последовательность бифуркаций удвоения периода, ведущей к динамическому хаосу, является семейство дискретных отображений  $x_{n+1}=f(x_n, a)$ , где  $f(x, a)$  - функция с квадратичным максимумом,  $a$  - управляющий параметр. В дальнейшем мы будем рассматривать конкретную форму, отображение Фейгенбаума

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2. \quad (27)$$

В отображении (27)  $a$  является бифуркационным параметром. Бифуркационная последовательность неподвижных точек периода  $2^k$  имеет место для значений параметров  $a_k$ :  $a_1=0.75$ ,  $a_2=1.25$ ,  $a_3=1.368099$ , ... Критическая точка  $a_{cr}=1.40115...$  соответствует накоплению бифуркаций удвоения периода и переходу к хаосу.

С учетом аддитивного шума получаем стохастическое отображение вида

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + \sigma \xi_n, \quad (28)$$

где  $\sigma$  - параметр, определяющий интенсивность белого шума  $\xi_n$ . Влияние шума на последовательность бифуркаций удвоения периода рассматривалось в ряде работ (см., например, [46] и литературу, указанную в ней). Основным результатом состоит в том, что в присутствии шума последовательность бифуркаций удвоения периода становится конечной. Более того, существует универсальный закон скейлинга, связывающий максимальную величину интенсивности шума  $\sigma_k^{max}$  и возможность наблюдения неподвижной точки периода (цикла)  $2^k$

$$\sigma_k \propto \mu^{-k}, \quad (29)$$

где  $\mu=6.557...$  является универсальной константой. Этот результат получен различными теоретическими методами. В настоящем разделе мы иллюстрируем применение кумулянтного анализа для исследования универсальных свойств системы.

Введем обозначения кумулянтов первого и второго порядков в виде

$$X_n \equiv \langle x_n \rangle, \quad Y_n \equiv \langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2. \quad (30)$$

Тогда в Гауссовом приближении получаем кумулянтное отображение вида

$$X_{n+1} = 1 - a(X_n^2 + Y_n), \quad Y_{n+1} = 4a^2 X_n^2 Y_n + \sigma^2. \quad (31)$$

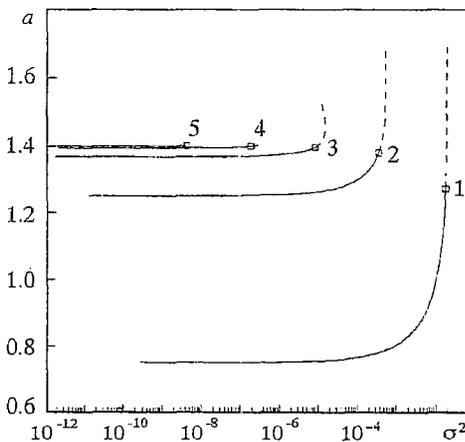


Рис. 4 Бифуркационная диаграмма отображения (31)

Здесь, как и в предыдущем примере отображения окружности, мы рассматриваем случай слабого шума, оставляя только линейные члены по второму кумулянту. Начальные условия для кумулянтной системы записываются в виде  $X_0=x_0$ ,  $Y_0=0$ , где  $x_0$  является неподвижной точкой соответствующего периода. Бифуркационная диаграмма на плоскости параметров  $(a, \sigma)$  для циклов периода  $2^1$ ,  $2^2$ ,  $2^3$ ,  $2^4$  и  $2^5$  показана на рис.4. Так же, как и для отображения окружности, бифуркационные линии соответствуют условию равенства «+1» одного из мультипликаторов неподвижной точки соответствующего периода. Бифуркационная диаграмма показывает наличие граничных значений интенсив-

ности шума  $\sigma_k^{\max}$ , которые обозначены квадратами на рис.4. Эти точки на бифуркационных линиях имеют коразмерность 2 и определяются дополнительным условием: равенство второго мультипликатора «-1». Последовательность  $\sigma_k^{\max}$  удовлетворяет закону скейлинга  $\sigma_k^{\max} \propto \mu_{\text{cum}}^{-k}$  с константой  $\mu_{\text{cum}}=6.592$ . Таким образом, мы получили результат, находящийся в хорошем соответствии с теоретическим значением константы скейлинга  $\mu=6.557$ .

### Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели некоторые проблемы бифуркационного анализа динамических систем, возмущаемых внешним шумом. Подробно изложена методика, основанная на применении кумулянтного анализа. Данный подход позволяет перевести задачу исследования стохастической системы (системы с шумом) в плоскость проблем бифуркационного анализа детерминированных динамических систем. Использование кумулянтного подхода иллюстрируется на примере исследования последовательности бифуркаций в отображении окружности и отображении Фейгенбаума.

Автор выражает искреннюю признательность Ю.Л. Климонтовичу и В.С. Анищенко за поддержку работы и ценные замечания. Автор благодарен J.Kurths, U.Feudel, W.Ebeling, A.S.Pikovsky и L.Schimansky-Geier за обсуждение результатов работы.

*Работа частично поддерживалась за счет средств Международного Научного Фонда (грант NRO 000) и Госкомитета по высшему образованию России (грант 93-8.2-10).*

### Библиографический список

1. Понтрягин Л., Андронон А., Витт А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т.3, вып.3. С.165.
2. Noise in Nonlinear Dynamical Systems // Eds. F.Moss, P.V.E. McClintock. Vol.1-3. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
3. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов.радио, 1961.
- Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985.
4. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
- Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. М.: Наука, 1990.
- Климонтович Ю.Л. Нелинейное броуновское движение // УФН. 1994. Т.164, № 8. С.811.
5. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. М.: Наука, 1976.
6. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.: Наука, 1968.
7. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.: Наука, 1975.
8. Shi'nikov L.P. Strange attractors and dynamical models // Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos / Ed. R.N.Madan. Singapore: World Scientific, 1993. P. 3.
9. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shi'nikov L.P. On models with nonrough Poincare homoclinic curves // DAN USSR. 1991. Vol. 320. P.269.
10. Risken H. The Fokker - Planck Equations // Methods of Solution and Applications. Berlin: Springer, 1989.
11. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов.радио, 1977.

12. *Klimontovich Yu.L.* Ito, Stratonovich, kinetic forms of stochastic equations // *Physica A*. 1990. Vol.163. P.515.

*Klimontovich Yu.L.* Alternative description of stochastic processes in nonlinear systems. «Kinetic form» of master and Fokker - Planck equations // *Physica A*. 1992. Vol.182. P.121.

13. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.

14. *Van Kampen N.G.* Langevin-like equation with colored noise // *J.Stat.Phys.* 1989. Vol.54, № 5/6. P.1289.

*Hänggi P.* Colored noise in continuous dynamical systems: a functional calculus approach // *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*. Vol.1. / Ed. F.Moss and P.V.E.McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. P. 384.

15. *Mackey M., Longtin A., Lasota A.* Noise-induced global asymptotic stability // *J.Stat.Phys.* 1990. Vol.60, № 5/6. P.735.

16. *Ebeling W.* Structural stability of stochastic systems // *Chaos and Order in Nature* / Ed. H.Haken. Berlin, 1981. P.188.

17. *Meunier C., Verga A.D.* Noise and bifurcations // *J.Stat.Phys.* 1988. Vol.50, № 1/2. P.345.

18. *Хорстхемке В., Лефевр Р.* Индуцированные шумом переходы. М.: Мир, 1987.

19. *Graham R.* Bifurcations under weak noise // *J.Stat.Phys.* 1989. Vol.54, №5/6. P.1207.

*Graham R.* Macroscopic potentials, bifurcations and noise in dissipative systems // *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*. Vol.1. / Ed. F.Moss and P.V.E.McClintock. Cambridge: Cambridge University Press, 1989. P.384.

20. *Wiesenfeld K.* Noisy precursors of nonlinear instabilities // *J.Stat.Phys.* 1985. Vol.38, № 5/6. P.1071.

21. *Пиковский А.С.* О влиянии шумов на статистику хаотических автоколебаний // *Изв.вузов. Радиофизика*. 1986. Т.29, № 5. С.526.

22. *Klosek-Dygas M.M., Matkovsky B.J., Schuss Z.* A first passage time approach to stochastic stability of nonlinear oscillators // *Phys.Lett.A*. 1988. Vol.130, № 1. P.11.

23. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.*, Structure and properties of chaos in presence of noise // *Nonlinear Dynamics of Structures* / Ed. R.Z. Sagdeev et al. Singapore: World Scientific, 1991. P.21.

24. *Стратонович Р.Л., Ланда П.С.* Воздействие шумов на генератор с жестким возбуждением // *Изв.вузов. Радиофизика*. 1959. Т.2, № 1. С.37.

25. *Khibnik A.I., Kuznetsov Yu.A., Levitin V. Nikolaev E.V.* Continuation techniques and interactive software for bifurcation analysis of ODEs and iterated maps // *Physica D*. 1993. Vol.62. P.360.

26. *Banke U., Ebeling W.* Large-noise expansions for the stationary solution of Fokker - Planck equation // *Annalen der Physik*. 1990. Vol.47, № 2/3. P.101.

27. *Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И.* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

28. *Кифер Ю.И.* О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем // *Изв. АН СССР. Математика*. 1974. Т.38, № 5. С.1091.

*Kifer Yu.* Attractors via random perturbations // *Commun.Math.Phys.* 1989. Vol.121. P.44.

29. *Синай Я.Г.* Стохастичность динамических систем // *Нелинейные волны* / Под ред. А.В.Гапонова-Грехова. М.: Наука, 1979. С.192.

30. *Бланк М.Л.* Эргодические свойства динамических систем со стохастическими аттракторами // *Взаимодействующие марковские процессы и их применение в биологии*. Пушино: НЦБИ АН СССР, 1986. С. 34.

31. *Graham R., Hamm A., Tel T.* Nonequilibrium potentials for dynamical systems with fractal attractors or repellers // *Phys.Rev.Lett.* 1991. Vol.66, № 24. P. 3089.

32. *Hamm A., Graham R.* Quasipotentials for simple noisy maps with complicated dynamics // *J.Stat.Phys.* 1992. Vol. 66. P. 689.

33. *Hamm A., Graham R.*, Scaling for small random perturbations of golden critical circle map // *Phys.Rev.E.* 1992. Vol.46, № 10. P. 6323.
34. *Desai R.C., Zwanzig R.* Statistical mechanics of a nonlinear stochastic model // *J.Stat.Phys.* 1978. Vol.19, № 1. P.1.
35. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов.радио, 1978.
36. *Татарникова Г.В., Шалфеев В.Д.* Исследование статистической динамики систем фазовой синхронизации // *Радиотехника.* 1986. Т.73, № 3. С.40.
37. *Just W., Sauermann H.* Ordinary differential equations for nonlinear stochastic oscillators // *Phys.Lett.A.* 1988. Vol.131, № 4/5. P.234.
38. *Anishchenko V.S., Neiman A.B.* Bifurcational analysis of bistable system excited by colored noise // *International J. Bif. & Chaos.* 1992. Vol.2, № 4. P. 979.
39. *Neiman A., Schimansky-Geier L.* Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic Noise // *Phys.Rev.Lett.* 1994. Vol.72, № 19. P. 2988.
40. *Neiman A., Anishchenko V., Kurths J.* Period-doubling bifurcations in the presence of colored noise // *Phys.Rev.E.* 1994. Vol.49, № 5. P.3801.
41. *Neiman A., Feudel U., Kurths J.* The cumulant approach for investigating the noise influence on mode-locking bifurcations // *J.Phys.A* (submitted).
42. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
43. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
44. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // *Physica D.* 1982. Vol.5, № 2. P. 370.
- Rand D., Ostlund S., Sethna J., Siggia E.D.* Universal transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // *Physica D.* 1983. Vol.8, № 3. P.303.
45. *Feigenbaum M.J., Hasslacher B.* Irrational decimations and path integrals for external noise // *Phys.Rev.Lett.* 1982. Vol.49. P. 605.
46. *Свитановић Р.* Universality in Chaos. Bristol & N.Y.: Adam Hilger, 1989.
- Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.Н.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм // *УФН.* 1984. Т.39, № 3. С. 3.

*Саратовский государственный университет*

*Поступила в редакцию 10.01.95  
после переработки 15.03.95*

## THE CUMULANT APPROACH FOR THE INVESTIGATION OF BIFURCATIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS DRIVEN BY THE EXTERNAL NOISE

*A.B. Neiman*

The problems of bifurcation analysis of noisy systems are considered. The technique of bifurcation analysis based on the cumulant expansion is proposed. The noise influence on the mode-locking bifurcations in the circle map and on the period-doubling bifurcations in the Feigenbaum map is considered as examples.



*Нейман Александр Борисович* - родился в октябре 1962 года. Окончил физический факультет Саратовского университета (1984). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности радиофизика (1991). В настоящее время - докторант кафедры радиофизики. Автор более 35 публикаций в международных и отечественных изданиях. Область научных интересов: нелинейная динамика, стохастическая динамика нелинейных систем, теория случайных процессов и теория информации.