



## ДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ХАОСОМ

*И.М. Старобинец, В.А. Угриновский*

Предлагается метод управления траекториями на странном аттракторе, позволяющий переводить их в заданное неустойчивое состояние с помощью малых возмущений параметров. В отличие от классической процедуры Отта - Гребоджи - Йорке, данный метод основан на дискретном и непрерывном принципах максимума и позволяет оптимизировать среднее время достижения управления. Исследуется случай многомерного управления. Предложенный подход апробируется в ряде моделей, как дискретных, так и непрерывных.

### Введение

Данная статья посвящена некоторым вопросам, относящимся к задаче управления хаосом. Несколько лет назад Отт, Гребоджи и Йорке (OGY) предложили метод управления хаотическими динамическими системами, позволяющий стабилизировать одну или несколько неустойчивых периодических орбит, погруженных в хаотический аттрактор, с помощью малых (зависящих от времени) возмущений управляющего параметра [1]. Этот метод привлек внимание многочисленных исследователей в различных областях науки. Существует уже большое число примеров успешного управления хаосом в задачах механики жидкостей [2], физиологии [3], лазерной физики [4], химической кинетики [5] и др. Позднее OGY-метод был теоретически развит для систем с запаздывающими координатами [6], а также использован в многомерных системах [7, 8].

Все перечисленные работы базируются на OGY-методе, использующем уравнения, линеаризованные в окрестности требуемой неподвижной точки или периодической орбиты. Таким образом, если система находится далеко от искомого состояния, управление не применимо: необходимо ждать, пока точка попадет в малую окрестность этого состояния, и лишь затем включать управление. Поэтому одна из важнейших характеристик - среднее время достижения управления из произвольной начальной точки - может оказаться очень велико. Задача оптимизации управления хаосом к настоящему времени исследована весьма слабо. Так называемый «тагетинг-метод» [9] хотя и примыкает к данной проблеме, однако управление в нем носит случайный характер. Отметим также, что OGY-метод и связанные с ним работы используют однопараметрическое управление, стремясь перевести систему на устойчивое многообразие желаемого состояния. Очевидно, что в сильно развитом хаотическом режиме сделать это далеко не

всегда возможно. Поэтому естественно возникает необходимость в методах многомерного управления хаосом.

В настоящей статье мы описываем иной подход, основанный на дискретном и непрерывном принципах максимума и оптимизирующий среднее время достижения управления даже на больших расстояниях от искомого состояния. В отличие от OGY-процедуры, в предлагаемом методе траектория направляется не к устойчивому многообразию, а непосредственно к требуемой цели. Такой подход позволяет использовать не только дискретное, но и непрерывное управление, и допускает как однопараметрический, так и многомерный вариант управления хаосом. Некоторые предварительные сведения, относящиеся к предлагаемому методу, анонсированы в заметках [10, 11].

В разделе 1 с помощью общей методики [12] получены необходимые условия оптимальности для дискретной задачи, моделирующей оптимизационный вариант управления хаосом. На их основе построены одномерный и многомерный численные алгоритмы, определяющие стратегию управления вдали от требуемого состояния и в его окрестности. В разделе 2 эти алгоритмы апробируются в задачах управления одномерными и двумерными отображениями и сравниваются по эффективности как между собой, так и с классическим методом OGY. В разделе 3 по схеме [12] строятся условия оптимальности в модели непрерывного управления хаосом, а на их основе - численная процедура квазинепрерывного управления. Данный алгоритм используется в задаче управления системой непрерывных уравнений типа Гинзбурга - Ландау. В разделе 4 сконструирован метод многомерного управления хаотическими системами. На примере управления цепочкой связанных одномерных отображений иллюстрируется преимущество такого подхода перед однопараметрическими алгоритмами.

## 1. Дискретное управление хаосом

Для простоты изложения рассмотрим задачу о стабилизации системы в неустойчивом состоянии равновесия  $x_F$  (предлагаемый подход может быть также применен к задаче стабилизации неустойчивых периодических орбит, торов и т.д.). Рассмотрим дискретную отображающую систему, стартующую из точки  $\bar{x}$  на аттракторе. Зафиксируем некоторое число шагов  $N$  и будем стремиться максимально приблизить точку за  $N$  шагов к требуемому состоянию  $x_F$ . Тогда можно сформулировать задачу оптимизации [10]

$$\begin{cases} \bar{x}_{k+1} = F(x_k, u_k), & x_0 = \bar{x}, \\ J(x) = (x_N - x_F)^2 \rightarrow \min, & U \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $u \in R^m$ ,  $x_F = F(x_F, 0)$ ,  $U = \{|u_k| \leq \bar{u}\}$ , а максимально допустимое управление  $\bar{u}$ , как правило, достаточно мало.

Будем далее использовать общую методику получения условий оптимальности, разработанную в [12]. Предположим, что  $\{u_k^*, x_k^*\}$  - оптимальный процесс в задаче (1). Возьмем классическое однопараметрическое семейство вариаций управления

$$u_k^\varepsilon = u_k^* + \varepsilon \cdot \delta u_k,$$

соответствующую ему траекторию  $x_k^\varepsilon$  и приращение функционала  $J$

$$\Delta J(\varepsilon) = J(x^\varepsilon) - J(x^*).$$

Тогда вариацию функционала  $J$  можно представить [11] в виде

$$\delta J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \Delta J(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \delta \mathbf{u}_k,$$

где

$$\partial F(k) / \partial x = \partial F(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*) / \partial x, \quad \partial F(k) / \partial u = \partial F(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*) / \partial u, \quad \partial J / \partial x = \partial J(\mathbf{x}_N^*) / \partial x,$$

а  $\psi_k$  суть решения сопряженной системы [12]

$$\psi_k = \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial x, \quad \psi_N = \partial J / \partial x. \quad (2)$$

Из условия оптимальности  $\delta J \geq 0$  получаем, что для всех  $k$  должны выполняться неравенства

$$\psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \delta \mathbf{u}_k \geq 0,$$

откуда находим оптимальное управление

$$\mathbf{u}_k^* = -\bar{u} \{ \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \} / | \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u | \quad (3)$$

(в случае, когда знаменатель отличен от нуля). В частности, если  $m=1$ , то

$$u_k^* = -\bar{u} \operatorname{sgn} \{ \psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u \}, \quad (4)$$

либо должно быть

$$\psi_{k+1} \partial F(k) / \partial u = 0$$

(так называемое сингулярное управление).

Теперь применим полученные условия оптимальности (3), (4) для построения алгоритмов управления. В начале ограничимся случаем  $m=1$

(однопараметрическое управление) и ввиду малости  $\bar{u}$  будем рассматривать упрощенный вариант уравнений (1), полагая

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k) + \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) u_k, \quad (5)$$

где  $\mathbf{b} \in R^n$ . Тогда сопряженная система (2) запишется как

$$\psi_k = \psi_{k+1} \partial f(\mathbf{x}_k^*) / \partial x, \quad \psi_N = 2(\mathbf{x}_N^* - \mathbf{x}_F),$$

поэтому из условий (4) находим оптимальное управление в виде

$$u_k^* = -\bar{u} \operatorname{sgn} \{ (\mathbf{x}_N^* - \mathbf{x}_F) [ \prod_{i=k+1}^{N-1} \partial F(\mathbf{x}_i^*) / \partial x ] \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^*) \}, \quad (6)$$

либо реализуется сингулярное управление

$$(\mathbf{x}_N^* - \mathbf{x}_F) [ \prod_{i=k+1}^{N-1} \partial F(\mathbf{x}_i^*) / \partial x ] \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^*) = 0. \quad (7)$$

На основе соотношений (6), (7) можно построить одношаговый ( $N=1$ ) и многошаговый ( $1 < N < \infty$ ) алгоритмы управления. Для  $N=1$  используем

$$u_0^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn} r_0, & |r_0| > \bar{u}, \\ -r_0, & |r_0| \leq \bar{u}, \end{cases} \quad (8)$$

где  $r_0 = (f(\bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{x}_F) \mathbf{b}(\bar{\mathbf{x}}) / \|\mathbf{b}(\bar{\mathbf{x}})\|^2$ . В случае  $N > 1$  имеем более «дальновидную» (и, следовательно, более эффективную) стратегию управления (при  $\bar{u} \ll 1$ )

$$u_k^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn} r_k, & |r_k| > \bar{u}, \\ -r_k, & |r_k| \leq \bar{u}, \quad k = 0, N-1, \end{cases} \quad (9)$$

где  $r_k = (\mathbf{x}_N^0 - \mathbf{x}_F) W_k \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^0) / \|W_k \mathbf{b}(\mathbf{x}_k^0)\|^2$ ,  $W_k = \prod_{i=k+1}^{N-1} \partial f(\mathbf{x}_i^0) / \partial \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_{k+1}^0 = f(\mathbf{x}_k^0)$ .

На практике, стратегия многошагового управления выглядит следующим образом [10]. Выбрав начальное управление  $\bar{\mathbf{x}}$ , мы последовательно для каждого  $N=1, 2, \dots, N_{\max}$  с помощью (9) вычисляем управляющую серию  $u_k^*$ , а затем из (5) находим соответствующее  $\mathbf{x}(N)$ . Если при малом  $\varepsilon$  выполнено условие

$$\|\mathbf{x}(N) - \mathbf{x}_F\| < \varepsilon, \quad (10)$$

то данное  $N$  дает удовлетворительное управление, и мы используем его, применяя на конечной стадии одношаговый метод или метод OGY. Если (10) не достигается ни при каких  $1 \leq N \leq N_{\max}$ , то мы вовсе не применяем управления и делаем итерацию с  $u_0=0$ . Затем вся процедура повторяется.

## 2. Многошаговый метод: переход к глобальной управляемости

Эффективность алгоритмов (8), (9) была проанализирована на примерах систем, описываемых известными дискретными отображениями с хаотическим поведением траекторий. Наиболее наглядно специфика этих алгоритмов проявляется в случае одномерных отображений. Рассмотрим, например, задачу о стабилизации неустойчивого состояния равновесия в хорошо известном отображении отрезка

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - 2|x_k - 0.5| + u_k, & 0 \leq x \leq 1, \\ J(x) = (x - x_F)^2 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (11)$$

где  $|u| \leq \bar{u}$ ,  $x_F = 2/3$ .

При  $u_k = 0$  система демонстрирует хаотическое поведение (рис.1,а). Применяя одношаговый алгоритм (8), получаем управление

$$u_k^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn} r_k, & |r_k| > \bar{u}, \\ -r_k, & |r_k| \leq \bar{u}, \end{cases}$$

где  $r_k = -1/3 + 2|x_k - 0.5|$ , то есть мы имеем скорректированное отображение

$$x_{k+1} = f^*(x_k) = 1 - 2|x_k - 0.5| + u_k^*,$$

представленное на рис. 1, б. Для него точка  $x_F$  становится устойчивой, но она сосуществует с переходным хаосом, и система может долгое время случайно блуждать, прежде чем будет стабилизирована в  $x_F$ . Многошаговый алгоритм приводит к управлению (9), в котором  $r_k$  имеет вид

$$r_k = (x_N^0 - 2/3) \prod_{i=k+1}^{N-1} (x_i^0 - 0.5),$$

а  $x_i^0$  соответствует  $u_i=0$ . Для некоторого  $N_{\max}$  последняя неустойчивая орбита исчезает, и отображение принимает вид, приведенный на рис. 1, в. Здесь более нет

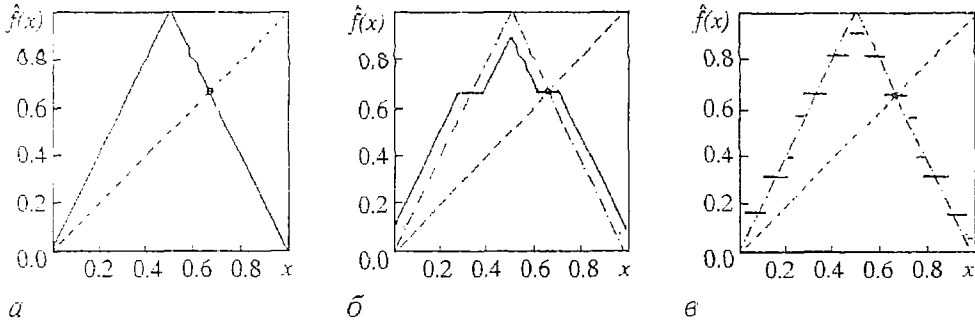


Рис. 1. Управляемое отображение (11): а - без управления; б - одношаговый метод - локальная управляемость,  $u=0.1$ ; в - многошаговый метод - глобальная управляемость,  $u=0.1$ ,  $N_{\max}=5$

участков с экспоненциально разбегающимися траекториями: для любых начальных условий за конечное время  $k \leq N_{\max}$  траектория стабилизируется в точке  $x_F$ . Данное явление можно трактовать как глобальную управляемость системы.

В качестве другой модели, позволяющей сравнить эффективность алгоритмов (8), (9), было выбрано двумерное отображение Хенона

$$\begin{cases} x_{1,k+1} = \xi - x_{1,k}^2 + \eta x_{2,k} + u_k, \\ x_{2,k+1} = x_{1,k}, \end{cases}$$

где  $J(x) = (x - x_F)^2$ ,  $|u| \leq \bar{u}$ ,  $x_{F,1} = x_{F,2} = (\eta - 1)/2 + [(\eta - 1)^2 + 4\xi]^{1/2}$ ,  $\xi = 1.4$ ,  $\eta = 0.3$ . (Заметим, что это отображение рассматривалось в работе [1] в качестве иллюстрации к методу OGY). Здесь одношаговое управление принимает вид (8), где

$$r_0 = \xi - \bar{x}_1^2 + \eta \bar{x}_2 - x_{F,1}.$$

$N$ -шаговый алгоритм записывается соотношением (9), в котором

$$r_k = (x_N^0 - x_F) W_k^1 / |W_k^1|^2,$$

$$W_k^1 = \prod_{i=k+1}^{N-1} \begin{pmatrix} -2x_{1,i}^0 & \eta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов по этим алгоритмам представлены на рис. 2. Здесь также приводятся для сравнения данные, полученные для тех же параметров с помощью OGY-метода. Во всех случаях очевиден значительный выигрыш многошагового метода по сравнению с одношаговой процедурой и методом OGY.

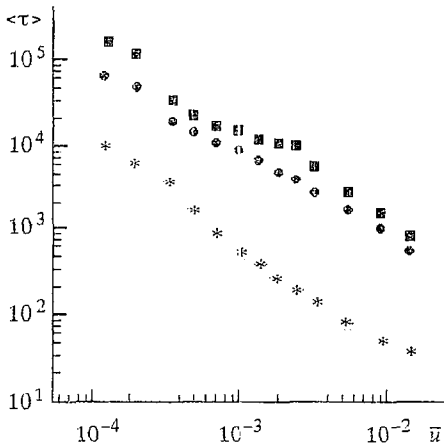


Рис. 2. Среднее время достижения управления  $\langle \tau \rangle$  для отображения Хенона в зависимости от  $\bar{u}$ .  $\blacksquare$  - OGY-метод;  $\odot$  - одношаговый алгоритм (8);  $*$  - многошаговый алгоритм (9) с  $N_{\max}=30$

### 3. Непрерывное управление хаосом

Существующие к настоящему времени алгоритмы управления хаосом в непрерывных системах имеют дискретный характер, то есть позволяют использовать управление лишь в отдельные моменты времени (например, через период вынуждающей силы, или на секущей Пуанкаре). Однако в прикладных задачах чрезвычайно важной явилась бы возможность корректировать управление непрерывно (или достаточно часто) с тем, чтобы использовать его в полной мере.

Однако попытки получения таких алгоритмов на основе метода ОГУ серьезных успехов пока не принесли.

Мы рассмотрим непрерывный аналог задачи (1) и на основе метода вариаций [12] получим алгоритм квазинепрерывного управления. Предположим, что система задается дифференциальными уравнениями, и будем стремиться максимально приблизиться к требуемому состоянию  $\mathbf{x}_F$  за некоторое время  $T$  с помощью непрерывного управления  $\mathbf{u}(t)$ . Формулировка задачи примет вид

$$\begin{cases} dx/dt = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}), & \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \\ J(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}(T) - \mathbf{x}_F)^2 \rightarrow \min_{U}, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{u} \in R^m$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,  $U = \{\mathbf{u}(t) | \|\mathbf{u}(t)\| \leq \bar{u}\}$ ,  $\varphi(\mathbf{x}_F, 0) = 0$ .

Пусть  $\{\mathbf{u}^*, \mathbf{x}^*\}$  - оптимальный процесс в задаче (12). Построим однопараметрическую вариацию управления

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t) = \mathbf{u}^*(t) + \varepsilon \delta \mathbf{u}(t),$$

соответствующую ей траекторию  $\mathbf{x}^\varepsilon$  и приращение функционала  $J$

$$\Delta J(\varepsilon) = J(\mathbf{x}^\varepsilon(T)) - J(\mathbf{x}^*(T)).$$

Тогда вариацию функционала  $J$  можно записать [11] в виде

$$\delta J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \Delta J(\varepsilon) = \int_0^T \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} \delta \mathbf{u}(t) dt,$$

где  $\partial \varphi(t) / \partial \mathbf{x} = \partial \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) / \partial \mathbf{x}$ ,  $\partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} = \partial \varphi(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*) / \partial \mathbf{u}$ ,  $\partial J / \partial \mathbf{x} = \partial J(\mathbf{x}^*(t)) / \partial \mathbf{x}$ , а  $\psi(t)$  - решение сопряженной системы [12]

$$d\psi/dt = -\psi \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{x}, \quad \psi(T) = \partial J(T) / \partial \mathbf{x}. \quad (13)$$

Условие оптимальности  $\delta J \geq 0$  приводит к неравенству

$$\psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} \delta \mathbf{u}(t) \geq 0$$

для почти всех  $t \in [0, T]$ . Это дает выражение для оптимального управления

$$\mathbf{u}^*(t) = -\bar{u} \{ \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} \} / | \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial \mathbf{u} |,$$

справедливое при почти всех  $t$  (если знаменатель отличен от нуля).

В частности, если  $m=1$ , то для почти всех  $t$  справедливо

$$u^*(t) = -\bar{u} \operatorname{sgn} \{ \psi(t) \partial \varphi(t) / \partial u \}, \quad (14)$$

либо должно реализоваться особое управление

$$\psi(t) \partial \varphi(t) / \partial u = 0.$$

Теперь применим условие (14) для управления непрерывной системой вида

$$dx/dt = g(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u, \quad 0 \leq t \leq \Delta \tau,$$

где  $\Delta \tau \ll 1$  (как правило, шаг интегрирования исходной системы). В этом случае сопряженная система (13) записывается как

$$d\psi/dt = -\psi \partial g / \partial \mathbf{x}, \quad \psi(\Delta \tau) = \partial J(\Delta \tau) / \partial \mathbf{x},$$

и ее решение

$$\psi(t) = \psi(\Delta\tau) \exp\left\{\int_t^{t+\Delta\tau} \partial g / \partial x d\tau\right\} \approx \psi(\Delta\tau)(E + \Delta\tau \partial g(t) / \partial x),$$

где  $E$  - единичная ( $n \times n$ )-матрица. Поэтому (14) определяет управление

$$u^*(t) \approx -\bar{u} \operatorname{sgn}\left\{\partial J(\Delta\tau) / \partial x (E + \Delta\tau \partial g(t) / \partial x) \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))\right\}. \quad (15)$$

Кроме того, заметем, что при  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_F| \ll 1$

$$d\mathbf{x}/dt \approx \partial g(\mathbf{x}_F) / \partial x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u \approx 0. \quad (16)$$

На основе (15), (16) строим алгоритм, использующий на интервале  $[0, \Delta\tau]$  управление

$$u^* = \begin{cases} -\bar{u} \operatorname{sgn}\left\{\partial J^0(\Delta\tau) / \partial x (E + \Delta\tau \partial g^0(t) / \partial x) \mathbf{b}(\mathbf{x}^0(t))\right\}, & |r| > \bar{u}, \\ -r, & |r| \leq \bar{u}, \end{cases} \quad (17)$$

где  $r = |\mathbf{b}(\mathbf{x})|^{-2} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \partial g(\mathbf{x}_F) / \partial x (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F)$ , а выражения  $\partial J^0 / \partial x$ ,  $\partial g^0 / \partial x$ ,  $\mathbf{x}^0$  соответствуют управлению  $u(t) = 0$ . Этот алгоритм в дальнейшем включается в численную схему интегрирования системы.

Метод квазинепрерывного управления (17) был апробирован нами на примере системы уравнений

$$dw_j/dt = w_j - (1 + i\beta) |w_j|^2 w_j + \varepsilon(1 - ic)(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}), \quad j = \overline{1, M} \quad (18)$$

с периодическими условиями  $w_0 = w_M$ ,  $w_{M+1} = w_1$ , моделирующей комплексное уравнение Гинзбурга - Ландау [13]. Делая замену

$$v_j = w_j \exp(i\beta t)$$

и добавляя управление, получаем систему

$$dv_j/dt = (1 + i\beta)(1 - |v_j|^2)v_j + \varepsilon(1 - ic)(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}) + b_j u, \quad j = \overline{2, M}, \quad (19)$$

где  $b_1 = (1, 0)$ ;  $b_j = (0, 0)$ ;  $|u| \leq \bar{u}$ .

Задачи о стабилизации неустойчивых периодических орбит ставились как задачи минимизации функционалов двух видов

$$J(v) = \sum_{j=1}^N (v_j - 1)^2 \quad \text{либо} \quad J(v) = (|v_1|^2 - 1)^2 + \sum_{j=2}^N (v_j - v_1)^2.$$

При решении были использованы как алгоритмы дискретного управления (для отображения на секущей Пуанкаре), так и квазинепрерывное управление (17).

Некоторые результаты численных расчетов представлены на рис. 3-5 (см. также [11]). На рис. 3 показана стабилизация в системе (18) периодической орбиты, имеющей одно неустойчивое собственное направление, с помощью непрерывного алгоритма (17). На рис. 4 продемонстрировано преимущество непрерывного управления перед дискретным для случая стабилизации неустойчивого тора в фазовом пространстве системы (19). Режим развитой стохастичности (см. рис. 4,а) удается частично стабилизировать с помощью дискретного управления (см. рис. 4,б) и полностью - с помощью непрерывного алгоритма (17) (см. рис. 4,в). Наконец, на рис. 5 изображен случай, когда даже с помощью непрерывного управления удается добиться лишь частичной стабилизации режима, имеющего несколько неустойчивых собственных

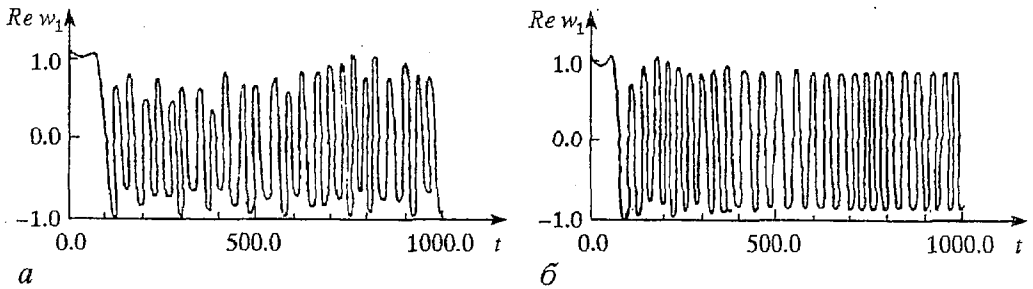


Рис. 3. Стабилизация периодической орбиты в системе (18) с  $\beta=c=3^{1/2}$ ,  $\epsilon=0.2$ : *a* - реализация в отсутствие управления; *б* - траектория, стабилизированная квазинепрерывным управлением (17),  $\bar{u}=0.01$

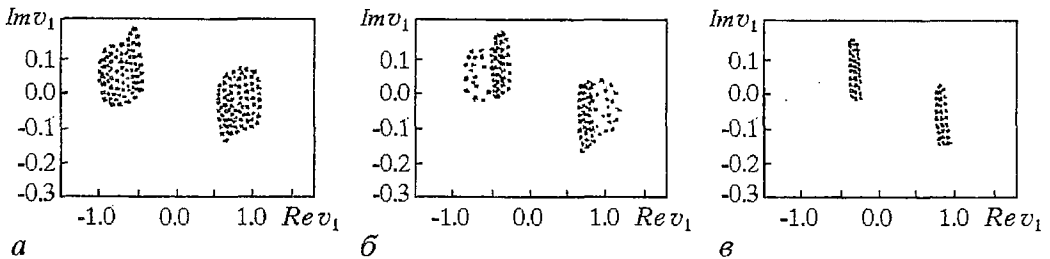


Рис. 4. Стабилизация тора в системе (19). Отображение Пуанкаре на секущей  $Re v_M=0$ : *a* - хаотический аттрактор, управление отсутствует; *б* - дискретное управление на секущей (частичная стабилизация); *в* - квазинепрерывное управление (17)

направлений. Видно, что управляемый режим (см. рис. 5, *б*) имеет более упорядоченную структуру, чем исходный неуправляемый (см. рис. 5, *a*). Это подтверждают и оценки фрактальной размерности соответствующих аттракторов.

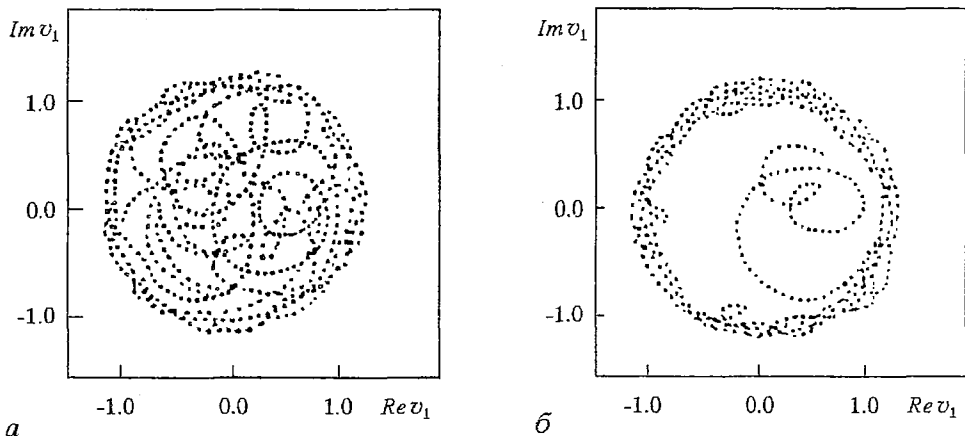


Рис. 5. Частичная управляемость в системе (19): *a* - проекция траектории на плоскость  $v_1$  в случае развитого хаоса, управление отсутствует; *б* - то же для квазинепрерывного управления (17)

#### 4. Многомерное управление

Заметим, что отсутствие полной управляемости в последнем примере вполне естественно. В случае развитой стохастичности неустойчивые инвариантные состояния могут иметь несколько (и даже много) неустойчивых собственных направлений, то есть несколько положительных характеристических показателей Ляпунова. Трудно гарантировать стабилизацию таких режимов с помощью



одномерного управляющего параметра. Естественно предположить, что стабилизации можно добиться, повышая размерность управления (что вполне допустимо с помощью предложенных выше методов).

Рассмотрим такую возможность на примере дискретной периодически замкнутой цепочки диффузионно связанных одномерных отображений отрезка  $[0, 1]$

$$x_{k+1}^l = (1 - 4D)(1 - \bar{u}b^l)f(x_k^l) + D(\Delta x_k^l + 2) + \frac{1-4D}{2}(\bar{u} + u_k^l)b^l, \quad (20)$$

где  $f(x) = \alpha x(1-x)$ ;  $\Delta x^l = x^{l-1} - 2x^l + x^{l+1}$ ;  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$  - вектор состояния;  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$  - управление;  $\mathbf{b} = (b^1, \dots, b^m)$  - весовой вектор, позволяющий использовать управление различной размерности (от 1-мерного при  $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)$  до  $m$ -мерного при  $\mathbf{b} = (1/m^{1/2}, \dots, 1/m^{1/2})$ ).

При  $\alpha = 3.83$  и  $\mathbf{u} = 0$  в системе (20) существует странный аттрактор, содержащий неустойчивую неподвижную точку  $\mathbf{x}_F = (x_F^1, \dots, x_F^m)$ ,  $x_F^l = 0.735$ , которую требуется стабилизировать, то есть

$$J(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_F)^2 \rightarrow \min_U, \quad (21)$$

где  $U = \{ |u_k^l| \leq \bar{u} \}$ .

Используя в задаче (20), (21) одношаговую стратегию, на основе условий (3) получаем алгоритм многомерного управления

$$\mathbf{u}_k = \begin{cases} -\bar{u} \mathbf{r}_k / |\mathbf{r}_k|, & |\mathbf{r}_k| > \bar{u}, \\ -\mathbf{r}_k, & |\mathbf{r}_k| \leq \bar{u}, \end{cases} \quad (22)$$

где  $\mathbf{r}_k^l = (1 - 4D)(1 - \bar{u}b^l)f(x_k^l) + 1/2(1-4D)\bar{u}b^l + D(\Delta x_k^l + 2) - x_F^l$ .

При  $m=1$  и малых  $\bar{u}$  ситуация аналогична той, что описана выше для задачи (11) в случае локальной управляемости (см. рис. 1, б). Из почти любых начальных условий, пройдя период переходного хаоса, траектория стабилизируется в требуемой точке. Заметим, однако, что при увеличении  $\bar{u}$  точка  $\mathbf{x}_F$  теряет почти всю свою область притяжения: система очень быстро выходит на периодический режим, изображенный на рис. 6, а, что связано с появлением при  $\bar{u} \approx 0.04$  6-кратного суперустойчивого цикла в отображении  $x_k \rightarrow x_{k+1}$  (рис. 6, б). Подобная

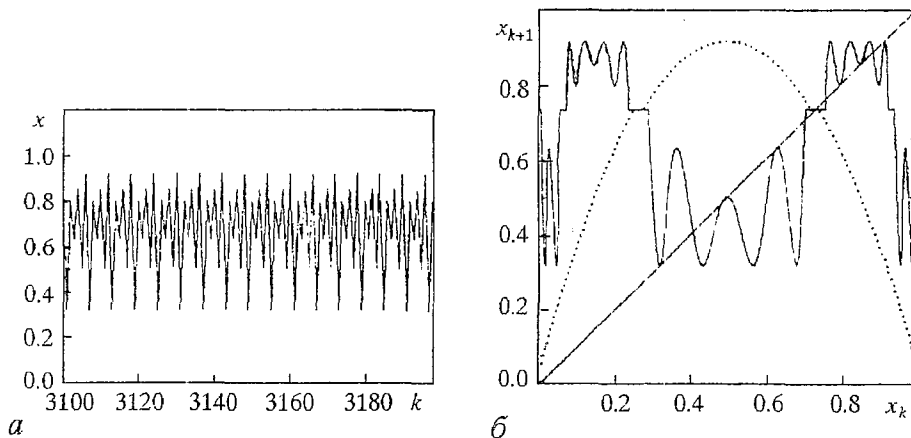


Рис. 6. Рождение устойчивого цикла в модели (20) при  $m=1$ : а - реализация  $x_k$  при  $D=0.001$ ,  $\bar{u}=0.04$ ; б - отображение  $x_k \rightarrow x_{k+1}$  (пунктир) и его 6-я итерация (сплошная линия),  $k$  - номер итерации

картина наблюдается и при больших  $m$ , если  $\bar{u}$  достаточно велико, а управление одномерно (то есть все  $u_k^1 = \dots = u_k^m = u_k$ ). На рис. 7, 8 изображены временные (по  $k$  при  $l=1$ ) и пространственные (по  $l$  при  $k=1000$ ) реализации системы (20). В первом случае в системе реализуется указанный выше 6-кратный цикл (см. рис. 7, а); кроме того, управление приводит к частичной пространственной синхронизации (см. рис. 7, б). Во втором случае появляется устойчивый цикл кратности 2 (см. рис. 8, а) и полная синхронизация в пространстве (см. рис. 8, б). Таким образом, за счет увеличения  $\bar{u}$  систему удается стабилизировать с помощью одномерного управления, однако не всегда в желаемом состоянии (подобная же ситуация, по-видимому, приводит к частичной стабилизации в задаче (19) из предыдущего раздела).

Если же  $\bar{u}$  мало ( $\bar{u} \lesssim 0.02$ ), а  $m > 1$ , то разрушить хаотический режим в системе (20) посредством однопараметрического (одношагового) управления не удастся. В этом случае мы использовали управление соответствующей размерности  $m$  (то есть  $\mathbf{b} = (1/m^{1/2}, \dots, 1/m^{1/2})$ ), задаваемое одношаговым алгоритмом (22). Этого оказалось вполне достаточно для стабилизации состояния  $\mathbf{x}_F$  (рис. 9). Естественно, что при этом среднее время достижения управления  $\langle \tau \rangle_m$  растет с увеличением размерности системы  $m$ . В частности, проведенные расчеты показывают, что для  $\bar{u} = 0.02$ .  $\langle \tau \rangle_4 \approx 330$ ,  $\langle \tau \rangle_5 \approx 2600$ ,  $\langle \tau \rangle_6 \approx 22000$  и т.д. Однако, как следует из раздела 2 настоящей статьи, значения  $\langle \tau \rangle_m$  можно существенно уменьшить, перейдя к многошаговой стратегии управления.

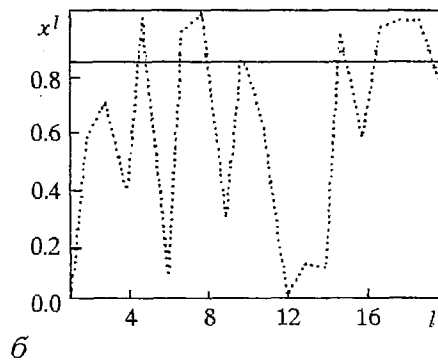
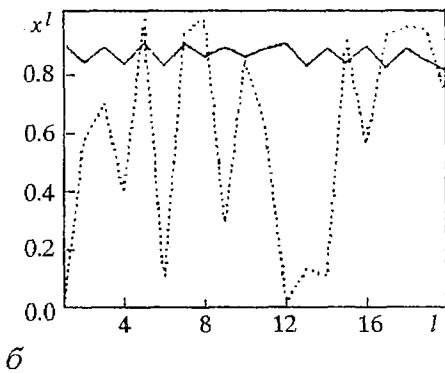
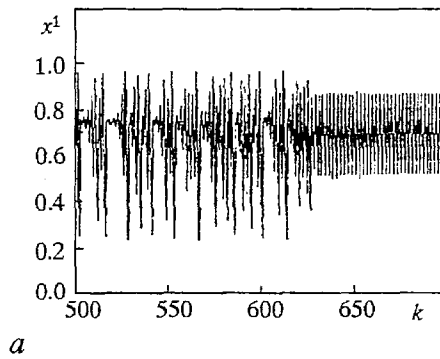
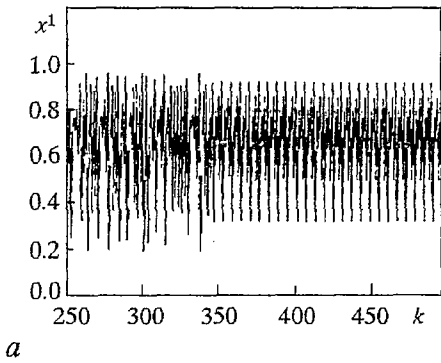


Рис. 7. Временная (а) и пространственная (б) реализации системы (20) при  $m=20$ ,  $D=0.001$ ,  $\bar{u}=0.04$  (пунктирная линия - распределение начальных условий);  $k$  - номер итерации,  $l$  - номер отображения

Рис. 8. Временная (а) и пространственная (б) реализации системы (20) при  $m=20$ ,  $D=0.001$ ,  $u=0.1$  (пунктирная линия - распределение начальных условий);  $k$  - номер итерации,  $l$  - номер отображения

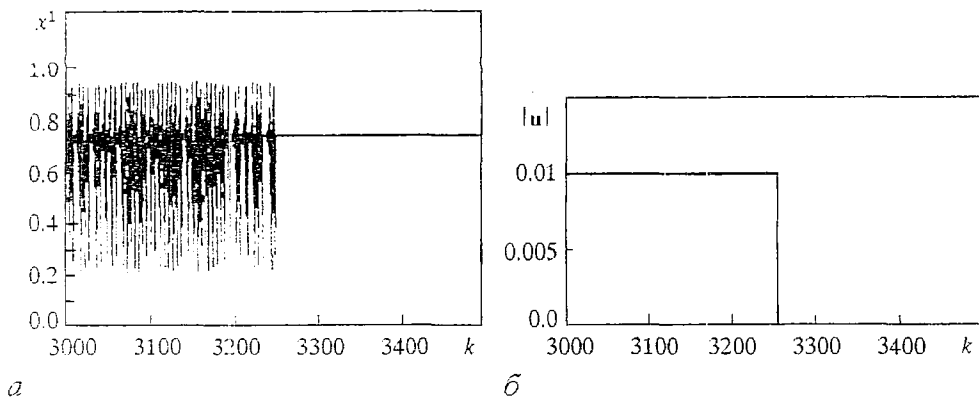


Рис. 9. Многомерное управление в системе (20) при  $m=3$ : а - реализация  $x_k^1$ ,  $D=0.001$ ,  $\bar{u}=0.01$ ; б - соответствующее распределение  $|u_k|$ ;  $k$  - номер итерации

Авторы признательны М.И. Рабиновичу и Л.Н. Корзинову за интерес к данной работе и многочисленные полезные обсуждения.

*Исследования, описанные в данной публикации, стали возможны, в частности, благодаря поддержке гранта NP2300 Международного научного фонда, Российского правительства и гранта Российского фонда фундаментальных исследований (проект 94-02-03263).*

#### Библиографический список

1. Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol.64, № 11. P.1196.
2. Singer J., Wang Y., Bau H. Controlling chaotic systems // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol.66, № 9. P.1123.
3. Garfinkel A., Spano M., Ditto W., Weiss J. Controlling cardiac chaos // Science. 1992. Vol.257. P.1230.
4. Roy R., Murphy T., Maier T., Gills Z., Hunt E. Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68, № 9. P.1259.
5. Petrov V., Gáspár V., Masere J., Showalter K. Controlling chaos in the Belousov - Zhabotinsky reaction // Nature. 1993. Vol.361. P.240.
6. Dressler U., Nitsche C. Controlling chaos using delay coordinates // Phys. Rev. Lett. 1992. Vol.68, № 1. P.1.
7. Aranson I., Levine H., Tsimring L. Controlling spatio-temporal chaos // Phys. Rev. Lett. 1994. Vol.72, № 16. P.2561.
8. Sepulchre J., Babloyants A. Controlling chaos in a network of oscillators // Phys. Rev. E. 1993. Vol.48, № 2. P.945.
9. Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Using small perturbations to control chaos // Nature. 1993. Vol.363. P.411.
10. Starobinets I., Pikovsky A. Multistep method for controlling chaos // Phys. Lett. A. 1993. Vol.181. P.149.
11. Starobinets I., Chugurin V. Optimization method for controlling chaos problems: theory and applications // Proc. SPIE's Photonic conf. Mobile Robots IX. USA, Boston. 1994. Vol.2352. P.38.
12. Казимиров В.И., Плотников В.И., Старобинец И.М. Абстрактная схема метода вариаций в необходимые условия экстремума // Изв. АН СССР. Сер. Математическая. 1985. Т.49, № 1. С.141.

13. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Рождение многомерного хаоса в активных решетках // ДАН СССР. 1984. Т.283, № 3. С.596.

Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию 26.04.95

Научно-исследовательский  
радиофизический институт

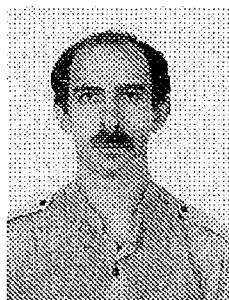
## A DYNAMICAL METHOD FOR CONTROLLING CHAOS OPTIMIZATION

*I.M. Starobinets, V.A. Ugrinovskii*

A control method is presented to direct a trajectory on a strange attractor towards a desirable unstable set by small parameters perturbations. The method is alternative to the classical Ott - Grebogi - Yorke control procedure. The proposed approach is based on the discrete and continuous maximum principles and optimizes the mean time to achieve control. The case of multidimensional control is investigated. The proposed method is tested both in discrete models and continuous systems.



*Старобинец Игорь Михайлович* - родился в 1957 году в Горьком, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета (1979). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области теории оптимального управления динамическими системами (1986). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН, доцент Нижегородского государственного технического университета. Область научных интересов - динамические системы, пространственно-временной хаос, оптимальное управление, управление хаосом. Имеет свыше 50 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.



*Угриновский Валерий Аронович* - родился в 1960 году в г.Хмельник Винницкой области, окончил факультет вычислительной математики и кибернетики Горьковского государственного университета (1982). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в области системного анализа (1990). Старший научный сотрудник Научно-исследовательского радиофизического института (в настоящее время - по контракту в Институте эволюции университета Хайфы, Израиль). Область научных интересов - теория обработки сигналов, теория стохастической устойчивости и управления, теория робастной устойчивости. Имеет свыше 30 публикаций в отечественных и зарубежных журналах.