



СТОХАСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ЦЕПИ ЧУА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ АТТРАКТОРОВ СИСТЕМЫ

В.С. Анищенко, И.А. Хованов, Б.В. Шульгин

Методами численного анализа и физического эксперимента исследуется стохастический резонанс в цепи Чуа при различных режимах ее собственной динамики. В качестве состояний бистабильной системы рассматриваются состояния равновесия, предельные циклы, хаотические аттракторы. Проводится сравнение основных характеристик стохастического резонанса для различных режимов в условиях адиабатического приближения, с точки зрения использования его для усиления сигнала в радиотехнике.

Введение

Одним из интересных явлений, привлекающих пристальное внимание специалистов по нелинейной динамике, является стохастический резонанс (СР) в бистабильных системах [1-3]. Эффект СР проявляется в резонансном усилении слабого регулярного сигнала и в увеличении отношения сигнал/шум (*SNR*), за счет когерентности между процессом переключений, индуцированных внешним шумом, и сигналом [2]. Теоретический анализ СР наталкивается на ряд сложностей математического характера и приближенные аналитические расчеты удается провести пока что для бистабильных осцилляторов с размерностью фазового пространства $N \leq 2$ [4-7].

К настоящему времени наиболее детальное теоретическое и экспериментальное исследование совокупности характеристик СР проведено для бистабильных систем типа диссипативный осциллятор Дуффинга с двумя симметричными взаимодействующими аттракторами в виде устойчивых состояний равновесия [4, 6]

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = -dU(x)/dt + F(t), \quad (1)$$

где $U(x)$ - бистабильный потенциал, а $F(t)$ - внешний сигнал, представляющий собой сумму гармонической и шумовой компонент [2]

$$U(x) = -ax^2/2 + bx^4/4, \quad (2)$$

$$F(t) = A \sin[\omega_0 t + \varphi(t)] + (2D)^{1/2} \xi(t), \quad \langle \xi(t+\tau) \xi(t) \rangle = \delta(\tau), \quad (3)$$

A , ω_0 - амплитуда и частота гармонического сигнала, соответственно; $\varphi(t)$ -

равномерно распределенная случайная величина, изменяющаяся в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; D - интенсивность внешнего шума.

Большинство работ посвящено исследованию предельного случая, так называемого «передемпфированного» осциллятора. В этом пределе уравнения системы становятся одномерными, что значительно упрощает математические проблемы при использовании методов теории стохастических процессов [6-9].

В случае большого трения $\ddot{x} = 0$ в безразмерных переменных [6] уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} = -dU(x)/dx + F(t). \quad (4)$$

Однако, бистабильное поведение можно реализовать в системах размерности $N > 2$, когда взаимодействующими аттракторами могут являться симметричные предельные циклы, торы или хаотические аттракторы [10-12]. Более того, эффект СР проявляется и в мультистабильных системах [13], и в системах общего положения (несимметричных). В последнем случае СР может быть реализован при взаимодействии различных типов аттракторов, например, «состояние равновесия - предельный цикл» или «состояние равновесия - хаотический аттрактор» и т.д.

Теоретический анализ СР в указанных выше типах систем как правило невозможен по целому ряду причин. Основные из них связаны с трудностями решения уравнений Фоккера - Планка, определением потенциала и т.д. Поэтому исследование таких систем проводится численными или экспериментальными методами, а также методом аналогового моделирования [10-15].

В режиме СР внешний шум определенной интенсивности индуцирует взаимодействие аттракторов (переключение между ними), при котором частота слабого внешнего периодического сигнала становится близкой к средней частоте переключений - частоте Крамерса [16]. При этом основными, практически важными характеристиками эффекта СР являются коэффициент усиления и SNR [5, 14, 17, 18]. В частности, одним из важных (и до сих пор открытым) является вопрос о возможности получения положительной разности ΔSNR на выходе и входе системы. Для случая передемпфированного осциллятора ответ ясен: $SNR_{\text{вых}} \leq SNR_{\text{вх}}$. В общем случае более сложных систем ответа на этот вопрос пока нет. Кроме того, не совсем ясна проблема зависимости коэффициента усиления от характера движения на каждом из взаимодействующих аттракторов, то есть от типа «внутриямной» динамики системы.

Сказанное выше определило главную цель настоящей работы. Представляется интересным рассмотреть бистабильную систему, в которой реализуется эффект СР при взаимодействии различных типов аттракторов. Исследование позволяет ответить на ряд вопросов, связанных с влиянием типа внутриямной динамики на характеристики СР. Изучение эффекта СР мы будем проводить численными и экспериментальными методами, которые позволяют выйти за пределы ряда ограничений, используемых в той или иной степени при построении теоретических моделей.

1. Исследуемая бистабильная система

В качестве объекта исследования эффекта СР нами была выбрана классическая цепь Чуа, описываемая уравнениями [19]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, \end{aligned} \quad (5)$$

где $h(x)$ - кусочно-линейная характеристика нелинейного диода Чуа [19]

$$h(x) = m_1x + (m_0 - m_1)(|x+1| - |x-1|)/2. \quad (6)$$

Система (5) характеризуется двумя управляющими параметрами α и β собственно цепи Чуа и двумя параметрами m_0 и m_1 , задающими разные наклоны характеристики диода Чуа. В наших экспериментах мы зафиксировали вид нелинейной характеристики ($m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$) и один из параметров цепи Чуа ($\beta = 14.286$). Таким образом для управления режимами колебаний в автономной цепи Чуа был выбран единственный контрольный параметр - параметр α .

Динамическая система (5) задает векторное поле в \mathbb{R}^3 , инвариантное к преобразованию симметрии

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z) \quad (7)$$

при условии, что параметры m_0 и m_1 отличны от нуля. На рис.1 представлена бифуркационная диаграмма симметричных режимов колебаний в цепи Чуа. Если мы будем менять параметр α в интервале $2 < \alpha < 10$ в сечении $\beta = 14.286$, то последовательно будут наблюдаться симметричные режимы двух состояний равновесия ($2 < \alpha < 6.8$), предельных циклов T_1 ($6.8 < \alpha < 8.2$), циклов удвоенных периодов T_2 ($8.2 < \alpha < 8.4$), хаотических аттракторов типа Ресслера ($8.7 < \alpha < 8.9$) и, наконец, режимы «double-scroll» (DS) ($8.9 < \alpha$), как это показано на рис. 2.

Для реализации эффекта СР в систему (5) аддитивно вводился сигнал $F(t)$ (3). Анализировались две ситуации: сигнал вводится в последнее уравнение или в

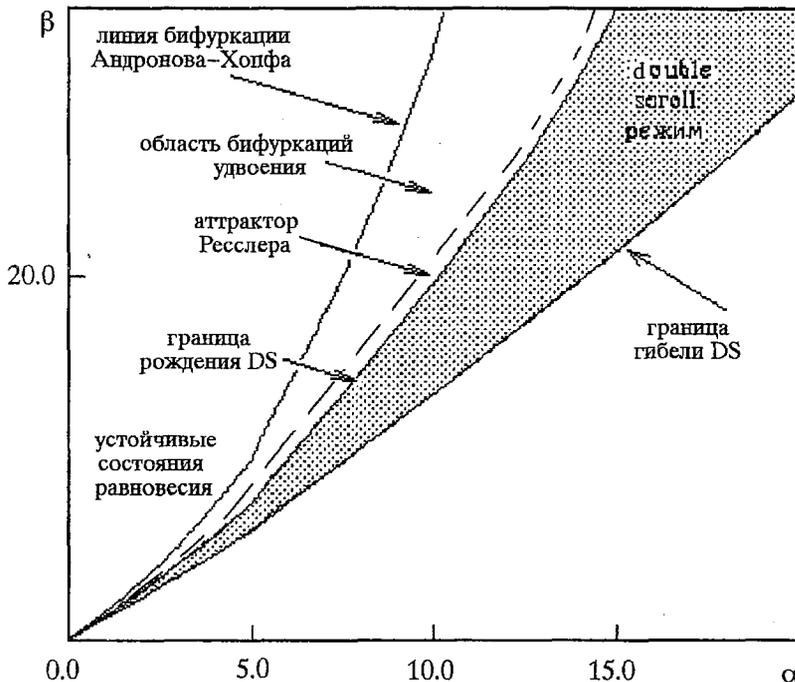


Рис. 1. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма системы (5), $m_0 = -1/7$, $m_1 = 2/7$ (качественное изображение)



Рис. 2 Последовательность динамических режимов, выступающих в роли состояний бистабильной системы (5), с изменением параметра α при $\beta = 14.286$. Треугольниками обозначены значения α в исследуемых точках; T_n - цикл периода n ; R - аттрактор Ресслера; DS - аттрактор Double scroll

первое уравнение системы (5). В качестве сигнала на выходе системы был выбран процесс $x(t)$, характеристики которого подвергались всестороннему анализу.

2. Методы исследования

Эффект СР в системе (5) исследовался численными методами и экспериментально. Алгоритм численного моделирования описан в [20]. В эксперименте использовалась реальная цепь Чуа, любезно предоставленная нам профессором университета Беркли Л.О. Чуа. Совокупность численных и экспериментальных методов была проверена на примере модели передемпфированного осциллятора с потенциалом

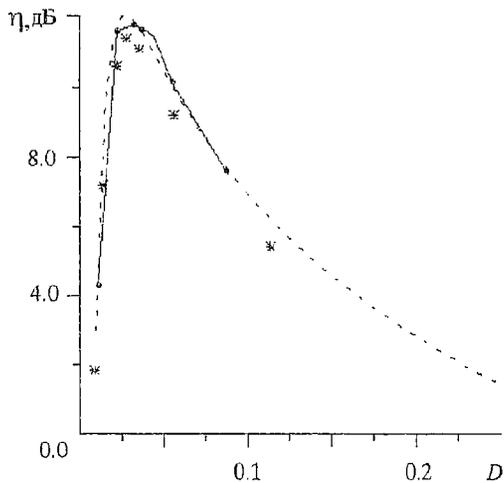


Рис. 3. Зависимости усиления сигнала η от интенсивности шума D для системы (4) с потенциалом (9); сравнение теории и эксперимента: --- теория; ●-●-● - численное моделирование; ***- эксперимент; $A=20$ мВ, $f = 400$ Гц, D - безразмерная величина

$$dU(x)/dx = a_1x - a_3x^3 + a_5x^5 - a_7x^7 \quad (8)$$

Исследования показали хорошее соответствие между теоретически, численно и экспериментально полученными характеристиками эффекта СР в системе (1). В качестве примера на рис. 3 представлены результаты работы [20], иллюстрирующие работоспособность и точность используемых нами методов анализа эффекта СР. Специально отметим, что для исключения эффекта алиасинга (который заключается в зеркальном отражении спектра из области частот больших максимальной частоты быстрого преобразования Фурье (БПФ) в область низких частот [21] и всегда сопровождает расчет спектров мощности с использованием БПФ), анализируемые сигналы пропускались через специальный фильтр низких частот с частотой среза равной частоте Найквиста БПФ.

3. Результаты численного моделирования в условиях адиабатического приближения

При проведении исследований влияния типа внутриямной динамики на характеристики СР на первом этапе мы зафиксировали параметры регулярной компоненты сигнала (3), которые оптимизировались для случая $\alpha=5$. При этом СР

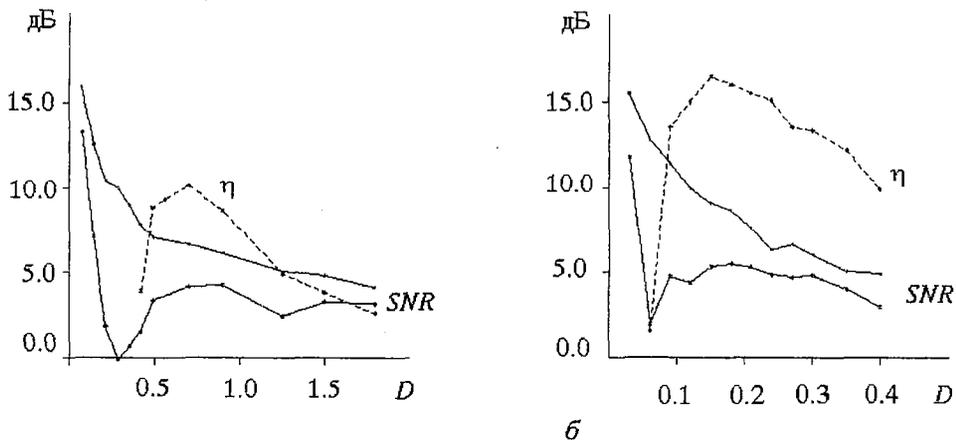


Рис. 4. Зависимость усиления η и SNR от интенсивности шума D при $\alpha = 5.0, f = 0.008, a = 8.1, b = 14.286$: *a* - сигнал (3) аддитивно вводится в третье уравнение системы (5); *б* - сигнал аддитивно вводится в первое уравнение системы (5); D - безразмерная величина

обуславливался переключениями между двумя состояниями равновесия в системе (5) (см.рис. 2). Для значения $\alpha=5$ оптимальная амплитуда и частота гармонической компоненты сигнала были $A = 0.04$ и $f_0 = \omega_0/2\pi = 0.008$, соответственно.

На рис. 4, *a* приведены зависимости коэффициента усиления входного и выходного SNR от интенсивности шума D , когда сигнал аддитивно добавлялся в правую часть третьего уравнения системы (5). Аналогичные данные приведены на рис. 4, *б* для случая введения сигнала $F(t)$ в первое уравнение системы. Нетрудно видеть, что рис. 4, *б* иллюстрирует заметное улучшение характеристик СР: увеличивается усиление η и уменьшается разность $\Delta SNR = |SNR_{\text{ввых}} - SNR_{\text{вх}}|$. Подобное качественное улучшение характеристик было отмечено для всех других режимов колебаний в цепи Чуа, и в дальнейшем мы будем использовать результаты, соответствующие введению сигнала $F(t)$ в первое уравнение системы (5).

На рис. 5 приведена зависимость средней частоты переключений от интенсивности шума. Частота Крамерса $f_{\text{кр}}$ соответствует удвоенной средней «частоте переключений» $f_{\text{п}}$ системы. Под «частотой переключений»^{*} мы понимаем величину обратную среднему времени пребывания системы в одном, а затем в другом состоянии.

Как видно из графика на рис.5, при интенсивности шума $D \approx 0.12$ частота переключений $f_{\text{п}}$ близка к частоте сигнала $f_0 \approx f_{\text{п}} = 0.008$ и именно при этой интенсивности шума фиксируется резкое увеличение усиления (см. рис. 4,б).

Если изменять параметр α , в системе (5) реализуется последовательность усложняющихся автоколебательных режимов от предельных циклов

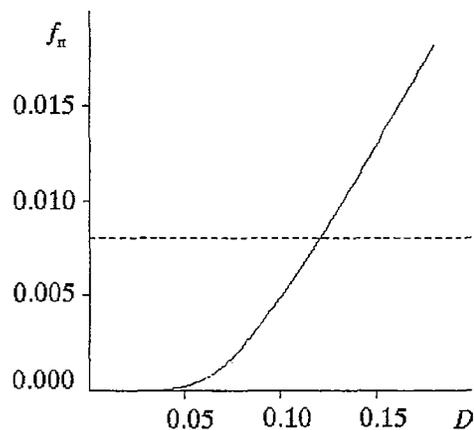


Рис. 5. Зависимость средней частоты переключений $f_{\text{п}}$ от интенсивности шума D ; пунктиром обозначена величина $f_{\text{кр}} = 2f_0$, D - безразмерная величина

* Частота Крамерса определялась путем вычисления среднего времени пребывания траектории на одном из взаимодействующих симметричных аттракторов $\tau_{\text{ср}} = T_{\text{п}}/2, f_{\text{кр}} = 2T_{\text{п}}^{-1} = 2f_{\text{п}}$.

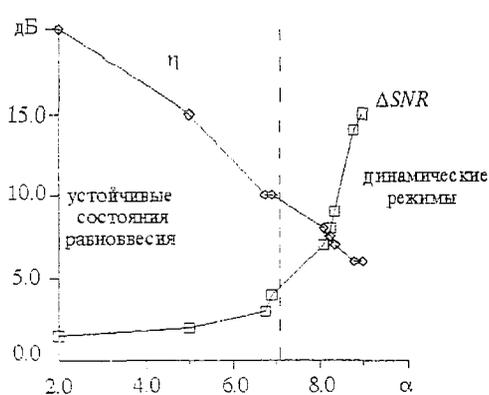


Рис. 6. Зависимости максимального усиления η в области с минимальным ΔSNR и среднего минимального ΔSNR от параметра α ; пунктиром разделены области до и после бифуркации Андронова - Хопфа

Сигнал модуляции, оптимальный для случая $\alpha=5.0$, естественно не будет удовлетворять этим условиям в случае $\alpha>5.0$. Мы проводили оптимизацию параметров гармонического сигнала и шума на предмет улучшения характеристик СР для $\alpha>5.0$, оставаясь в рамках адиабатического приближения, когда частота Крамерса много меньше частоты релаксации и амплитуда сигнала существенно меньше высоты потенциального барьера. Исследования показали, что качественных изменений в сравнении с данными рис. 6 не происходит, хотя при этом можно добиться некоторого улучшения количественных характеристик СР.

4. Экспериментальные результаты

Физический эксперимент по изучению характеристик СР в наших исследованиях обладает заметным преимуществом в сравнении с численным. Практически не уступая в точности (ср. результаты, представленные на рис. 3), физический эксперимент проводится в реальном масштабе времени (то есть в десять раз быстрее вычислительного), позволяет легко варьировать не только параметры системы и регулярного воздействия, но и статистические характеристики внешнего шума. Для обработки выходного сигнала используется компьютер с тем же программным обеспечением, что и в численном эксперименте. Таким образом, «физика» эксперимента заключается по сути дела лишь в том, что сигнал на выходе бистабильной системы (цепи Чуа) представляет реальный электрический сигнал, для анализа характеристик которого в дальнейшем используется цифровая техника. Методика эксперимента в деталях описана в работе [20], и мы не будем останавливаться на этом вопросе.

В исследуемой цепи Чуа, соответствующей математической модели (5), (6), параметры β , m_0 и m_1 несколько отличаются от используемых в численном моделировании, что обусловлено особенностями эксперимента. В связи с этим значения α , для которых наблюдаются различные динамические режимы, близки, но не совпадают с приведенными на диаграмме рис. 2. Внешнее воздействие на цепь соответствует введению сигнала $F(t)$ в последнее уравнение системы (5), что связано с удобством эксперимента.

На рис. 7 представлены зависимости коэффициента усиления η в функции эффективного значения интенсивности шума D для различных режимов работы цепи Чуа, которые реализуются в интервале значений параметра $4.62 \leq \alpha \leq 7.022$.

до хаоса (см. рис.1 и 2). На рис. 6 представлены результаты зависимости максимального значения усиления η в области, где ΔSNR минимально, и зависимости средней минимальной разности ΔSNR от параметра α для фиксированных значений амплитуды и частоты внешней модуляции. Результаты наглядно демонстрируют эффект ухудшения характеристик СР с усложнением типов взаимодействующих аттракторов: коэффициент усиления η практически линейно спадает, а ΔSNR резко возрастает с увеличением α .

С изменением α меняются величина и форма потенциального барьера, разделяющего взаимодействующие симметричные аттракторы.

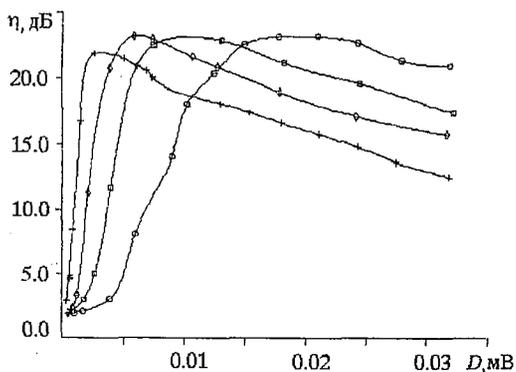


Рис. 7. Экспериментальные зависимости усиления сигнала η от интенсивности шума D для различных значений параметра α ; устойчивые состояния равновесия: ● - $\alpha = 4.62$, ■ - $\alpha = 5.6$, ◆ - $\alpha = 6.303$; предельный цикл: +- $\alpha = 7.022$

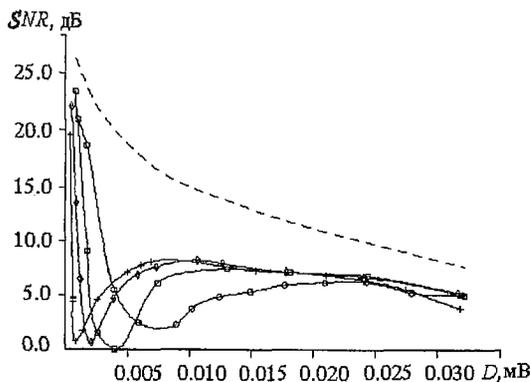


Рис. 8. Экспериментальная зависимость SNR на выходе от интенсивности шума D для различных значений параметра α ; устойчивые состояния равновесия: ● - $\alpha = 4.62$, ■ - $\alpha = 5.6$, ◆ - $\alpha = 6.303$; предельный цикл: +- $\alpha = 7.022$; пунктиром обозначено значение SNR на входе системы

Как видно из результатов, коэффициенты усиления в оптимальных условиях (оптимальные значения интенсивности шума D) практически совпадают ($\eta_{\text{опт}} \approx 16.5 \div 17.5$) дБ, но явно уменьшаются с ростом α в области $D > (0.015 \div 0.02)$ мВ. На рис. 8 даны результаты зависимости $SNR_{\text{вх}}$ и $SNR_{\text{вых}}$ от интенсивности D для тех же, что и на рис. 7, значений α . Как видно из рис. 8, оптимальная разность $\Delta SNR = |SNR_{\text{вых}} - SNR_{\text{вх}}|$ достигается именно в области $D > 0.015$ мВ! В связи с этим, если анализировать зависимость коэффициента усиления, измеренного в области значений D , отвечающей оптимальной разности ΔSNR (см. рис. 8), мы получим качественно тот же результат, что представлен на рис. 6. Рис. 9 иллюстрирует результаты измерений усиления η при оптимальных значениях ΔSNR и величину ΔSNR в зависимости от параметра α , включая области взаимодействия аттракторов Ресслера ($8.2 < \alpha < 8.59$) и режим DS ($8.59 < \alpha < 9.0$). Численные (см. рис. 6) и экспериментальные (см. рис. 9) данные находятся в хорошем качественном соответствии. С ростом параметра α , когда в цепи Чуа устойчивые состояния равновесия последовательно сменяются режимами предельных циклов, циклов удвоенного периода, аттракторами Ресслера, а затем режимом перемежаемости типа «хаос-хаос» [22] (режим DS), характеристики эффекта СР ухудшаются

Отметим, что в приведенных результатах амплитуда и частота гармонической компоненты сигнала $F(t)$ были зафиксированы и соответствовали условиям адиабатического приближения: частота $\omega_0 = 60.06$ Гц и амплитуда $A = 10$ мВ. Выход за рамки этих условий (например, увеличение частоты внешнего регулярного воздействия) может повлиять на количественные характеристики СР и привести к новым эффектам так называемого высокочастотного стохастического резонанса [13].

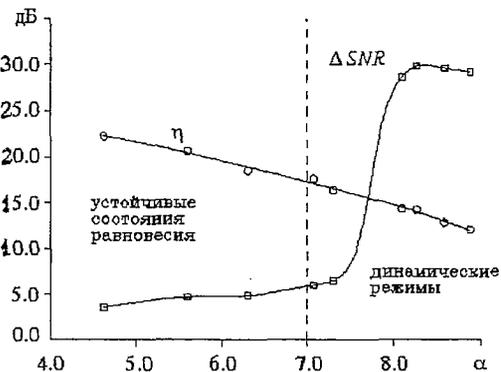


Рис. 9. Экспериментальные зависимости максимального усиления η в области с минимальным ΔSNR и среднего минимального ΔSNR от параметра α ; пунктиром разделены области до и после бифуркации Андронова - Хопфа

Выводы

В настоящей работе мы провели вычисление и измерение характеристик СР (усиления и разности отношения сигнал/шум на входе и выходе) в цепи Чуа в зависимости от параметра α . При этом эффект СР реализовался при бистабильном взаимодействии двух симметричных состояний равновесия, предельных циклов периода T_1 , циклов удвоенного периода, аттракторов Фесслера и DS-аттрактора. Исследования проводились для классического адиабатического приближения, когда амплитуда внешнего гармонического воздействия мала в сравнении с потенциальным барьером, а частота воздействия много меньше частоты, определяемой временем релаксации системы [4]. В условиях адиабатического приближения с усложнением структуры взаимодействующих аттракторов (с усложнением типов внутриямной динамики) характеристики СР однозначно ухудшаются: уменьшается усиление и возрастает ΔSNR !

Однако, это не означает, что пути оптимизации характеристик СР в этом направлении являются закрытыми. Дело в том, что усложненная внутриямная динамика системы требует детального учета новых характерных временных масштабов и поиска новых условий их когерентного взаимодействия с сигналом внешней модуляции. Мы убеждены в том, что для оптимизации характеристик СР в более сложных случаях необходимо выйти за пределы адиабатического приближения, рассматривать высокочастотный СР [13] и перейти к более детальному исследованию нелинейных аспектов явления СР [23].

Настоящая работа частично финансировалась Международным научным фондом (грант NRO 000) и Госкомитетом по высшему образованию России (грант 93-8.2-10).

Библиографический список

1. Benzi R., Sutera S., Vulpiani V. The mechanism of stochastic resonance // J.Physica A. 1981. Vol.14. P.453.
2. Moss F. Stochastic Resonance: From the Ice Ages to the Monkey Ear // Some problems in Statistical Physics / Ed. G.Weiss. SIAM, Philadelphia, 1992.
3. J.Stat. Phys.: special issue // Proc. NATO Advanced Research Workshop on Stochastic Resonance. 1992. Vol.70, № 1/2.
4. McNamara B., Wiesenfeld K. Theory of stochastic resonance // Phys.Rev. A. 1989. Vol.39, № 9. P. 4854.
5. Jung P., Hänggi P. Amplification of small signals via stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1991. Vol.44, № 12. P. 8032.
6. Jung P. Periodically Driven Stochastic Systems // Phys. Rep. 1994. Vol.234, № 175.
7. Dykman M., Haken H., Hu Gang, etc. Linear Response Theory in Stochastic Resonance // Phys.Lett.A. 1993. Vol.180. P. 332.
8. Gardiner K. Handbook of Stochastic methods. Berlin: Springer, 1985.
9. Risken H. The Fokker - Planck Equations. Berlin: Springer, 1988.
10. Anishchenko V.S., Safonova M.A., Chua L.O. Stochastic resonance in Chua's circuit // Int.J.Bif. and Chaos. 1992. Vol.2, № 2. P. 397.
11. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Safonova M.A. Stochastic Resonance in Chaotic Systems // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. P. 183.
12. Nicolis G., Nicolis C., McKernan D. Stochastic Resonance in Chaotic Dynamics // J.Stat.Phys. 1993. Vol.70, № 1/2. P. 125.
13. Dykman M., Luchinsky D., McClintock P., Stein N., Stocks N. High frequency stochastic resonance in periodically driven systems // Письма в ЖЭТФ. 1993. Т.58, № 2. С. 145.
14. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Использование стохастического резонанса для повышения отношения сигнал/шум в радиотехнических системах // РЭ. 1994. Т.39, № 12. С. 2004.

15. Zhou T., Moss F. Analog simulation of stochastic resonance // Phys.Rev.A. 1990. T.41, № 8.

16. Kramers H.. Brownian motion in field of force and the diffusion model of chemical reactions // Physica. 1940.Vol.7. P. 284.

17. Gammaitoni L., Menichella-Saetta E., Marchesoni F. // Phys. Lett.A. 1989. Vol. 142. P. 59.

18. Анищенко В.С., Нейман А.Б., Сафонова М.А., Хованов И.А. Стохастический резонанс при многочастотном воздействии // РЭ. 1994. Т.39, № 8/9. С. 1380.

19. Chua L., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Trans. in circuits and systems. 1986. Vol. 33. P. 1073.

20. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Хованов И.А., Шульгин Б.В. Стохастический резонанс в бистабильной электрической цепи // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. № 4-5 (в печати).

21. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W. Numerical Recipies in C. Cambridge, 1988.

22. Anishchenko V.S., Neiman A.B., Chua L. Chaos-chaos intermittency and 1/f noise in Chua's circuit // Int. J. of Bif. and Chaos. 1994. Vol.4, № 1. P. 99.

23. Dykman M.I., Luchinsky D.G., Mannella R., McClintock P., Stein N., Stocks N. Stochastic Resonance in Perspective // special issue of Nuovo Cimento D. 1995 (in press).

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 18.01.95
после переработки 31.03.95

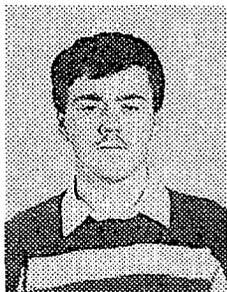
STOCHASTIC RESONANCE IN CHUA'S CIRCUIT WHEN DIFFERENT TYPES OF ATTRACTORS OF THE SYSTEM INTERACT

V.S. Anishchenko, I.A. Khovanov, B.V. Shulgin

Stochastic resonance in Chua's circuit is investigated by numerical simulations and physical experiments for different regimes of its own dynamics. The main characteristics of stochastic resonance for different regimes under adiabatic approximation are compared from the points of view of the using of stochastic resonance for the amplification of the signal in radioengineering.



Хованов Игорь Александрович - родился в 1971 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1993). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и статистическая физика. Автор 5 научных работ.



Шульгин Борис Владимирович - родился в 1970 году в Саратове, окончил физический факультет Саратовского университета (1992). После окончания университета поступил в аспирантуру на кафедру радиофизики. Область научных интересов - нелинейная динамика и стохастические процессы. Автор 4 научных работ.