



УСТОЙЧИВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА С ХАРАКТЕРИСТИКОЙ ТИПА НАСЫЩЕНИЯ

Ю.А. Брюханов, С.Д. Глызин

Рассматриваются динамические свойства нелинейного разностного уравнения второго порядка, описывающего простейший цифровой фильтр. Построено разбиение плоскости параметров на области, в которых качественное поведение модели не меняется. Численный анализ динамической системы показывает сложную структуру такого разбиения. При этом наблюдаются лишь периодические, сколь угодно большого периода, или квазипериодические решения.

Введение

Широкое внедрение компьютерных технологий в системы передачи информации обуславливает развитие цифровых систем передачи и методов обработки сигналов. Устройства цифровой обработки сигналов строятся на базе цепей, широкий класс которых можно отнести к числу цифровых колебательных систем. Основным элементом для построения сложных колебательных систем является цепь второго порядка - рекурсивный фильтр или цифровой осциллятор.

Структурная схема осциллятора изображена на рис. 1, где x_n - состояние системы, z^{-1} - элемент задержки, a и b - коэффициенты умножителей, y_{n+2} - входное воздействие. Специфическими эффектами для цифрового осциллятора являются переполнения сумматора, обуславливающие нелинейный характер всего устройства и колебательных процессов, протекающих в нем. Одной из типовых характеристик сумматора является характеристика насыщения, изображенная на рис. 2.

Состояние x_n рассматриваемого осциллятора описывается разностным соотношением

$$x_{n+2} - f(ax_{n+1} + bx_n) = y_{n+2}. \quad (1)$$

Рассмотрим поведение динамической системы (1) при отсутствии внешнего воздействия ($y_{n+2}=0$) и характеристике насыщения $f(x)$, изображенной на рис. 2. Нелинейное разностное уравнение второго порядка

$$x_{n+2} = f(ax_{n+1} + bx_n), \quad (2)$$

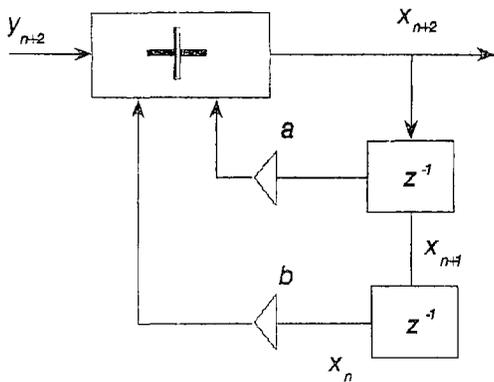


Рис. 1

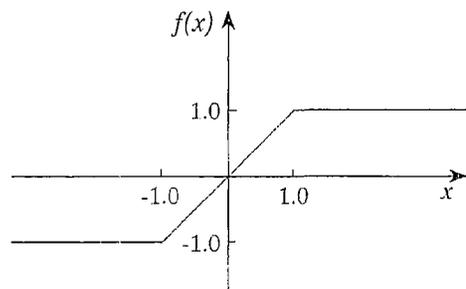


Рис. 2

в случае кусочно-линейной периодической функции $f(x)$ изучалось в статьях [1-3], причем в [3] рассмотрен интересующий нас тип нелинейности. Настоящая работа выполнялась независимо от [3] и дополняет предпринятые в ней исследования. Нами, в частности, получены аналитические формулы границ областей существования и устойчивости суперустойчивых циклов уравнения (2), построено разбиение фазовой плоскости данного уравнения в случае наличия нескольких устойчивых режимов и, наконец, несколько более подробно изучен случай близких к квазипериодическим движений. В настоящей работе изучение данной модели продолжено. Основные результаты статьи анонсированы в препринтах [4,5].

1. Общие свойства динамической системы

Введем некоторые определения. Разностное уравнение второго порядка (2) очевидным образом сводится к эквивалентному ему отображению

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} y_n \\ f(ay_n + bx_n) \end{bmatrix} \quad (3)$$

на плоскости xOy . Пары последовательных итераций (x_n, x_{n+1}) уравнения (2) или отображения (3) определяют точки траектории этого уравнения на фазовой плоскости xOy . Фазовой траекторией исследуемой динамической системы ниже будем называть последовательность пар (x_n, x_{n+1}) для n от единицы до бесконечности. Под циклом периода k будем понимать траекторию отображения, точки которой повторяются через k итераций. Асимптотическая устойчивость траектории имеет место, если существует такая δ -окрестность начальной точки, что любая другая траектория с начальными условиями из этой окрестности неограниченно приближается к данной. Очевидно, что для этого достаточно, чтобы мультипликаторы отображения, линеаризованного на данном решении, были меньше единицы. Наряду с обычным определением асимптотической устойчивости введем понятие суперустойчивости, которое предполагает, что мультипликаторы нулевые, а, следовательно, решение достигается за конечное число шагов.

Специфика функции f правой части уравнения (2) такова, что любая итерация его решения x_n не превосходит единицы по абсолютной величине, поэтому на фазовой плоскости рассмотрим лишь область $D_2 = \{(x,y): |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, в которой выделим три подобласти $D_1 = \{(x,y): ay + bx > 1\}$, $D_{-1} = \{(x,y): ay + bx < -1\}$ и $D_0 = \{(x,y): |ay + bx| \leq 1\}$. Уравнение (2) при этом сводится к соотношениям

в области D_1 $x_{n+2} = 1,$ (4)

в области D_{-1} $x_{n+2} = -1,$ (5)

в области D_0 $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,$ (6)

которые могут быть исследованы при конкретных значениях параметров a и b . Общий качественный анализ уравнения (2) при различных a и b затруднителен, поэтому естественно использовать вычислительную технику. Отметим, однако, что применение компьютера важно сочетать с аналитическими исследованиями, чтобы не пропустить тонкие эффекты, незаметные при неквалифицированных расчетах.

Задача построения разбиения плоскости параметров на области с одинаковым поведением траекторий состоит из двух частей: сначала в результате аналитических расчетов выделяются области с относительно простым поведением, а затем в областях, где аналитические методы приводят к громоздким результатам, применяется вычислительная техника. На рис. 3 плоскость параметров уравнения (2) разбита на шесть частей, из которых пять помечены числами, обозначающими, устойчивыми циклами каких периодов обладает динамическая система, когда ее параметры находятся в этих областях. При построении разбиений заштрихованных областей использовался компьютер. Рассмотрим более подробно поведение траекторий динамической системы в помеченных областях.

Нулевое состояние равновесия является решением (2) при любых значениях параметров, а его устойчивость определяется линейным уравнением (6). В треугольнике, обозначенном нулем (не включая границу) тривиальное решение асимптотически устойчиво и является единственным аттрактором уравнения (2), то есть глобально устойчиво. Отметим, что доказательство локальной асимптотической устойчивости элементарно и вытекает из того, что мультипликаторы уравнения (6) лежат в единичном круге комплексной плоскости, в то же время обоснование глобальной устойчивости существенно сложнее (см.[5]). На границах треугольника поведение траекторий негрубое. При этом на боковых сторонах треугольника один из мультипликаторов равен единице и состояния равновесия уравнения (2) заполняют некоторую ломаную в фазовом пространстве. На нижней стороне треугольника мультипликаторы комплексно сопряжены и равны по модулю единице, что влечет появление бесконечного числа вложенных циклов или квазипериодических траекторий.

Область, отмеченная числом 1, содержит значения параметров, при которых динамическая система имеет два суперустойчивых состояния равновесия (1,1) и (-1,-1), разделенные на фазовой плоскости неустойчивыми усам сепаратрисы нулевого состояния равновесия.

В области, помеченной двойкой, лежат значения параметров уравнения (2), при которых единственным аттрактором является суперустойчивый цикл периода 2: $(1,-1) \rightarrow (-1,1)$.

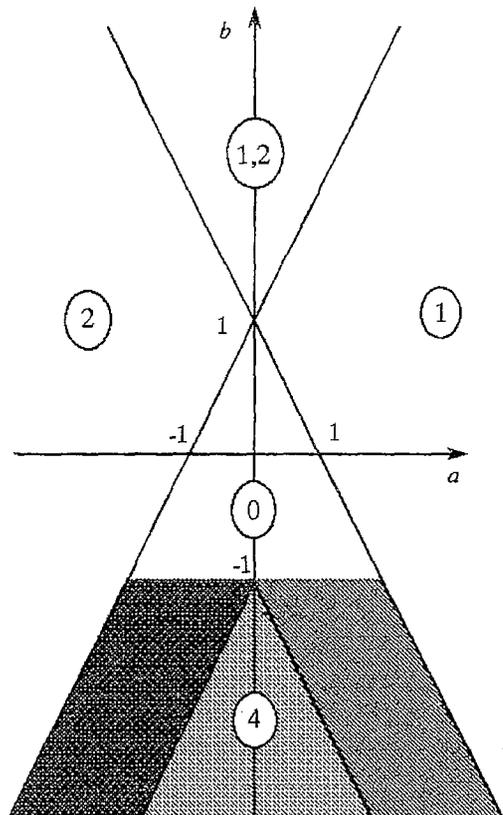


Рис. 3

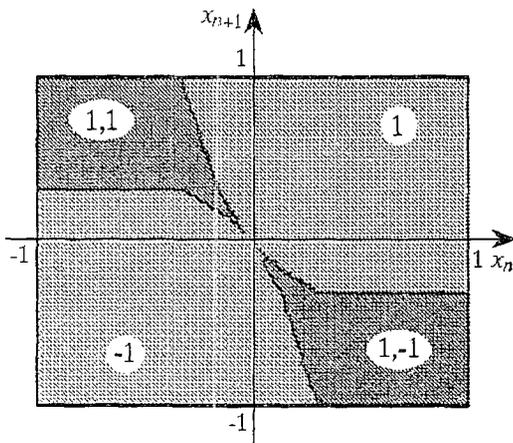


Рис. 4

Параметры, принадлежащие области, имеющей одновременно метки 1 и 2, соответствуют случаю трех суперустойчивых режимов: два состояния равновесия (1,1) и (-1,-1) и цикл периода 2 (1,-1) → (-1,1). Представляет интерес фазовый портрет динамической системы в этом случае. На рис. 4 изображено разбиение фазовой плоскости на области притяжения цикла и состояний равновесия при $a=1, b=4$. На рисунке единицей отмечена область притяжения состояния равновесия (1,1), цифрой -1 - состояния равновесия (-1,-1) и парой 1, -1 - цикл (1,-1) → (-1,1). Границы областей устойчивости являются устойчивыми многообразиями неустойчивых

ЦИКЛОВ

$$\begin{aligned}
 (1, a/(1-b)) &\rightarrow (a/(1-b), 1), \\
 (-1, -a/(1-b)) &\rightarrow (-a/(1-b), -1)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

и допускают аналитическое описание. Две пары ломаных, попарно соединяющих точки

$$\begin{aligned}
 &(\phi_2, \phi_1), (\psi_2, \psi_1), (\phi_4, \phi_3), (\psi_4, \psi_3) \dots \\
 &(\phi_3, \phi_2), (\psi_3, \psi_2), (\phi_5, \phi_4), (\psi_5, \psi_4) \dots \\
 &(-\phi_2, -\phi_1), (-\psi_2, -\psi_1), (-\phi_4, -\phi_3), (-\psi_4, -\psi_3) \dots \\
 &(-\phi_3, -\phi_2), (-\psi_3, -\psi_2), (-\phi_5, -\phi_4), (-\psi_5, -\psi_4) \dots,
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 \phi_m &= \{(-0.5)^{m+1}/[b^m(b-1)(a^2+4b)^{1/2}]\}[(a(a^2+4b)^{1/2}+(2b^2-2b-a^2))(a+(a^2+4b)^{1/2})^m + \\
 &\quad + (a(a^2+4b)^{1/2}-(2b^2-2b-a^2))(a-(a^2+4b)^{1/2})^m], \\
 \psi_m &= \{(-0.5)^{m+1}/[b^m(b-1)(a^2+4b)^{1/2}]\}[(a(a^2+4b)^{1/2}+(a^2-2b-2))(a+(a^2+4b)^{1/2})^m + \\
 &\quad + (a(a^2+4b)^{1/2}-(a^2-2b-2))(a-(a^2+4b)^{1/2})^m],
 \end{aligned}$$

дают сепаратрисы ячеек фазовой плоскости динамической системы.

Область параметров, помеченная числом 4 (см. рис. 3), содержит значения параметров, при которых единственным притягивающим множеством исследуемого отображения является суперустойчивый цикл периода четыре.

2. Суперустойчивые циклы

Перейдем к более подробному рассмотрению заштрихованной на рис.3 области параметров. Компьютерный анализ этой области производился с целью обнаружения устойчивых циклов различных периодов. Расчеты существенно облегчаются суперустойчивостью и единственностью, с точностью до симметричных, циклов. Отметим, что первоначальные вычисления позволили сформулировать и доказать серию утверждений качественного характера, упрощающих дальнейшие расчеты. На рис. 5 построена диаграмма областей

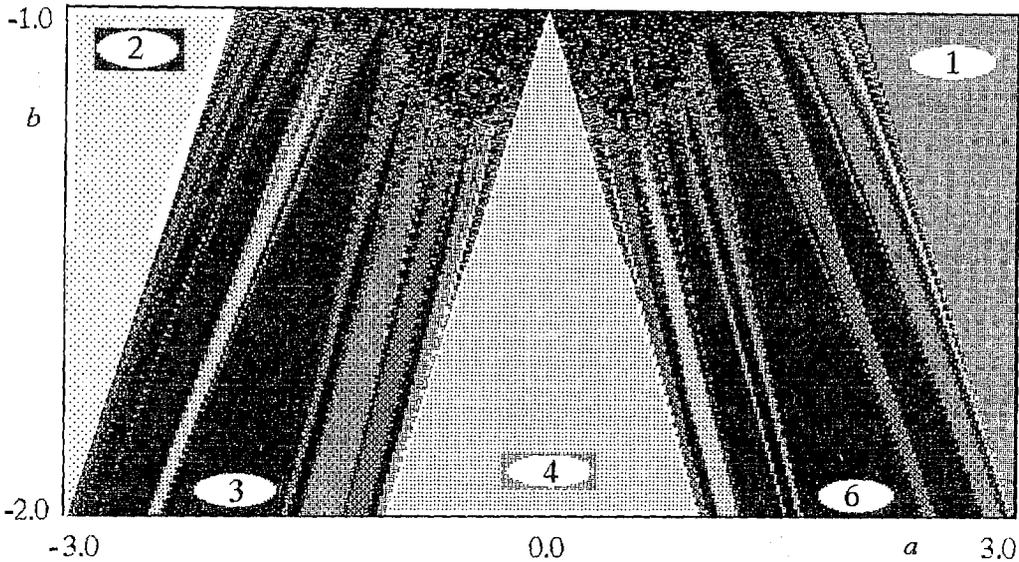


Рис. 5

параметров отображения, при которых единственным его аттрактором является цикл. В незакрашенных областях устойчивых циклов не найдено.

Рассмотрим структуру разбиения области

$$\Pi = \{(a, b) : b < -1, b + a < 1, b - a < 1\}$$

плоскости параметров. На рис. 5 хорошо заметны лучи, начинающиеся на нижней стороне треугольника устойчивости в точках с числом вращения $\pi/2$ при $a=0$; $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/5$... при $a>0$ и $2\pi/3$, $3\pi/4$, $4\pi/5$... при $a<0$. Очевидно, что при $b=-1$ динамическая система имеет циклы периода 6, 8, 10... при $a=1$, $2^{1/2}$, $2\cos(\pi/5)$... и 3, 8, 5... при $a = -1$, $-2^{1/2}$, $2\cos(4\pi/5)$..., причем в последнем случае любому циклу нечетного периода соответствует симметричный, который может быть получен сменой знаков в компонентах точек траектории. Тем самым, фазовые перестройки, происходящие с исследуемым отображением при $b < -1$, напоминают так называемые «языки Арнольда», однако, в силу специфики нелинейности f , области, содержащие циклы различных периодов, сохраняются при любом, сколь угодно большом по модулю, b в области параметров Π . Границы основных лучей (см. области, отмеченные числами 3 и 6 на рис. 5, а также 8, 5, 12 на рис. 6) имеют аналитическое представление. При $a > 0$ правые границы для циклов периода $2m$ ($m = 2, 3, 4, \dots$) являются ближайшими слева к числу $-b+1$ корнями многочленов для $m=2k$

$$P_{2k-1}(a) = a^{2k-1} - a^{2k-2}b - (2k-1)a^{2k-3}b + \dots + (k-2)a^2b^{k-1} - kab^{k-1} + b^k - 1, \quad (9)$$

для $m=2k+1$

$$P_{2k}(a) = a^{2k} - a^{2k-1}b - 2ka^{2k-2}b + \dots + (k-3)(k-2)a^2b^{k-1} - kab^{k-1} + b^{k+1} + 1, \quad (10)$$

а левые - многочленов

$$Q_m = a(-1)^m + b(P_{m-2}(a) - (-1)^m) + (-1)^{m+1} \quad (11)$$

(многочлен $P_0(a)$ примем равным нулю).

Интересующие нас корни многочленов (9), (10) допускают асимптотическое представление

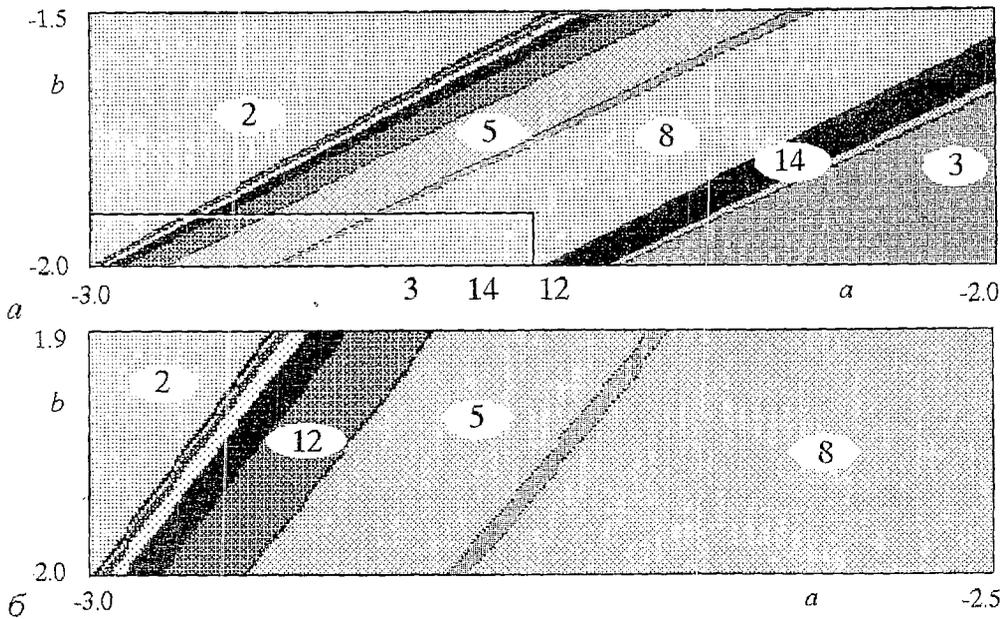


Рис. 6

$$a_m = -\frac{(b^m + (-1)^m)(b+1)}{b^m + (-1)^{m+1}} + O\left(\frac{1}{|b+1|b^{2m}}\right), \quad (12)$$

которое дает хорошее приближение корней $P_2(a)$ уже при $b < -1.5$, а для остальных многочленов и при больших b . Замена в формулах (9)-(12) a на $-a$ дает границы существования и суперустойчивости циклов периода $2m$ при $m=2k$ и пары симметричных циклов периода m при $m=2k+1$.

Рассмотрим более подробно структуру областей плоскости параметров, заключенных между главными лучами. На рис. 6, a хорошо видна область, обозначенная числом 14, заключенная между основными лучами пары циклов периода три (число 3) и цикла периода восемь (число 8). Период цикла в этой области равен 14 и есть как раз, с учетом парности цикла периода три, сумма длин циклов устойчивых режимов соседних областей. Естественно предположить, что и в других промежутках есть такие же циклы суммарной длины. Особой в этом смысле остается область, непосредственно примыкающая к нижней границе области устойчивости и ограниченная дугами уменьшающихся размеров (см. рис. 5), рассмотрение которой мы несколько отложим. Поведение же траекторий при значениях параметров ниже этих дуг можно пояснить следующим образом. В силу неустойчивости нулевого состояния равновесия в области параметров Π , траектория отображения (3) при любых начальных условиях за конечное число шагов выйдет за пределы области D_0 фазовой плоскости и перейдет в одну из областей D_1 или D_{-1} , которые за одну итерацию отображаются на границу фазового квадрата D_2 . Построение последующих итераций показывает, что точка любой траектории за конечное число шагов ложится на инвариантный многоугольник, содержащий в качестве одной из своих вершин точки

$$(1,1) \text{ и } (-1,-1) \text{ при } a > 0 \text{ или } (-1,1) \text{ и } (1,-1) \text{ при } a < 0 \quad (13)$$

Корни многочленов (9), (10) совместно с дугами, прилегающими к нижней границе треугольника устойчивости, попарно ограничивают области существования инвариантных шести-, восьми- ... $2m$ -угольников. В качестве примера на рис. 7 изображен инвариантный шестиугольник при $a = -1.5$, $b = -0.7$. Область параметров, при которых динамическая система обладает таким инвариантным

многоугольником, ограничена при $a > 0$ дугой окружности $a^2 + b^2 - a + b + 4$, кривой $a = (-b - (b^2 - 4b)^{1/2})/2$ и прямой $b = a - 1$. При $a < 0$ область параметров, соответствующих инвариантному шестиугольнику, симметрична описанной, а инвариантный многоугольник получается из имеющегося при $a > 0$ путем замены на фазовой плоскости (x, y) на $(x, -y)$. Области существования инвариантных многоугольников с большим числом вершин определяются аналогично. Наличие суперустойчивого инвариантного многоугольника еще не доказывает существование циклов соответствующих периодов. Строгое доказательство требует построения одномерного отображения на инвариантном множестве, тогда существование и глобальная устойчивость цикла такого отображения повлечет тот же результат для исходного. Развернутое доказательство этого утверждения приведено в [5]. Отметим, что доказательство связано с тем фактом, что все траектории, принадлежащие инвариантному многоугольнику, кроме быть может одной особой, содержат угловые точки (13). Таким образом, вычисляя последовательные итерации угловой точки, можно получить границы областей существования различных циклов.

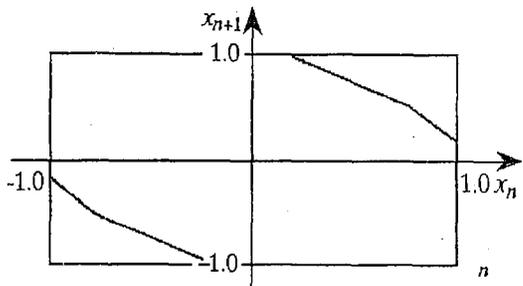


Рис. 7

3. Циклы больших периодов и квазипериодические движения

Рассмотрим поведение траекторий отображения в той части области П, которая прилегает к нижней границе треугольника устойчивости и ограничена арками уменьшающихся размеров. Результаты компьютерного анализа динамической системы в этой области представлены на рис. 8, причем на рис. 8, а параметры a и b менялись в пределах от -1.5 до 1.5 и от -1 до -1.2 соответственно. На рис. 8, а выделен прямоугольник, изображенный в увеличенном масштабе на рис. 8, б. Числами на рисунках обозначены, как обычно, области параметров, при которых отображение имеет суперустойчивый цикл соответствующего периода.

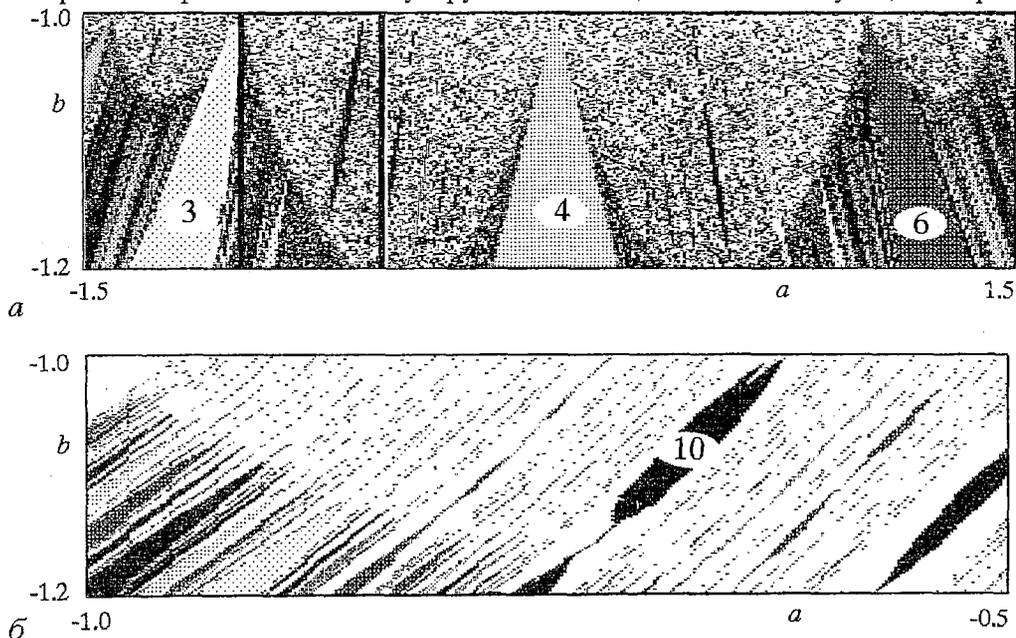


Рис. 8

Хорошо наблюдаемая на рис. 8, б так называемая «сосисочная» [3] структура не поддается простому аналитическому описанию. Численный анализ системы показывает, что и в этих областях сохраняются инвариантные многоугольники, однако аттрактор динамической системы в этом случае не содержит угловой точки, и рассуждения, приведенные в разделе 1, не проходят. Более того, при b , близком к -1 , существуют области параметров (они на рисунках не закрашены) такие, что довольно длительные вычисления не позволяют обнаружить для них устойчивых циклов. Движения при этом носят характер квазипериодических и целиком закрашивают инвариантный многоугольник. Построение последовательности полярных углов точек траектории отображения (3) показывает, что угол поворота изображающей точки при уменьшении параметра b меняется незначительно и остается близким к числу вращения системы для $b=1$. Таким образом можно судить о характере потери устойчивости нулевой неподвижной точки отображения (3) и режимах возникающих при этом.

Изменение параметра b до значений, меньших -1 , приводит к тому, что от точек нижней стороны треугольника устойчивости с рациональными относительно π числами вращения ветвятся расширяющиеся области циклов. Эти области тем шире, чем меньше период соответствующего цикла. Дальнейшее уменьшение b приводит сначала к расширению области («сосиски»), а затем к сужению на границах арок до точек, с последующим превращением в промежуточные лучи вне арок. Квазипериодические движения внутри арок могут существовать только на особых кривых, число которых континуально, а суммарная лебегова мера равна нулю. Аргументом в пользу справедливости предложенного сценария могут служить расчеты для помеченной десяткой на рис. 8, б области. Аналитически найденные как корни некоторых многочленов и проанализированные на компьютере границы области существования цикла периода десять, лежащей между основными лучами периодов 4 и 3 (заметим, что имеется, кроме того, еще основной луч периода 10) полностью совпадают, с точностью до небольших сглаживаний, с областью 10 рис. 8, а.

Заключение

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

1. Циклы, бифурцирующие в случае колебательной потери устойчивости нулевого состояния равновесия, порождают в плоскости параметров сложную структуру областей.

2. Все границы областей суперустойчивости циклов - особые, поскольку в их окрестности существуют значения параметров, при которых динамическая система имеет суперустойчивые циклы сколь угодно больших периодов.

3. Сложность устойчивых режимов исследуемого отображения оказалась не в возникновении хаотических колебаний, а в наличии в плоскости параметров многочисленных особых кривых таких, что малые изменения коэффициентов уравнения в их окрестности приводят к значительным перестройкам аттрактора динамической системы.

В заключение отметим, что исследование моделей цифровых фильтров до недавнего времени ограничивалось лишь определением областей пространства параметров, в которых наблюдается глобальная устойчивость некоторого состояния равновесия. Оказалось, однако, что режимы колебательного характера имеют вполне определенный физический смысл и знание их характеристик и областей реализации может дать практические результаты. Богатство динамики, обнаруженное уже в простейших моделях цифровых фильтров указывает на необходимость дальнейших исследований в этой области.

Библиографический список

1. Chua L.O., Lin T. Chaos in digital filters// IEEE Trans. Circuits and Systems. 1988. Vol. 35, № 6. P. 648.

2. Chua L.O., Lin T. Fractal pattern of second-order nonlinear digital filters: a new symbolic analysis // Int. J. Circuit theory and applications. 1990. Vol. 18, № 6. P. 541.

3. Ogorzalek M.J. Complex behavior in digital filters // Int. J. of Bifurcations and Chaos. 1992. Vol.2, № 1. P. 11.

4. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д., Рахманова Н.К. Динамические свойства разностной модели цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения // Препринт № 91. ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 1993. 20 с.

5. Брюханов Ю.А., Глызин С.Д., Рахманова Н.К. Динамика цифрового фильтра с кусочно-линейной характеристикой типа насыщения. Аналитическое исследование // Препринт № 17. ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 1994. 30 с.

Ярославский государственный
университет

Поступила в редакцию 4.10.94
после переработки 4.01.96

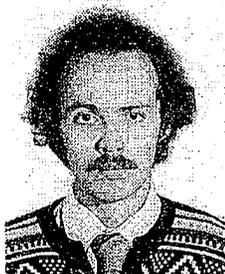
STABLE PERIODIC CONDITIONS OF SOME DIGITAL FILTER DIFFERENCE MODEL WITH SATURATION CHARACTERISTIC

U.A. Brukhanov, S.D. Glyzin

Dynamical properties of some nonlinear difference second-order equation with piecewise-linear right parts, modelling the simple digital filter, are considered. The breakdown of parameter plane was built. In each part of this breakdown the model quantitative behavior is the same. Numerical and analytical investigations showed the appearance of scaling structure on parameter plane. The existence of only periodical or quasiperiodical solutions was demonstrated.



Брюханов Юрий Александрович - родился в 1941 году в Красноярске, окончил Красноярский политехнический институт (1967). Работает в Ярославском государственном университете. Защитил кандидатскую диссертацию (1971) и докторскую диссертацию (1989) в области применения теории колебаний в задачах радиофизики и электроники. Автор монографии «Управление динамическим режимом колебательных систем» и более 140 статей.



Глызин Сергей Дмитриевич - родился в 1957 году в Новгородской области, окончил Ярославский государственный университет (1979). В настоящее время работает доцентом на кафедре математического моделирования ЯрГУ. Кандидат физико-математических наук (1990, Воронежский госуниверситет) по специальности дифференциальные уравнения. Область научных интересов - качественная теория дифференциальных уравнений, динамика нелинейных систем. Автор более 20 публикаций.