



## ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ИНВАРИАНТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ДИССИПАТИВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

*В. В. Зверев*

Исследуется простая модель нелинейной диссипативной динамической системы с дискретным временем, которая возмущается внешними флуктуациями. Предполагается, что нелинейность обусловлена функциональной зависимостью фазы комплексной переменной от модуля этой же переменной. Показано, что «стационарная точка» уравнения движения плотности распределения, рассмотренного в приближении перемешивания фаз, описывается функцией, выражающейся через интеграл по фрактальному носителю. Обсуждаются способы определения таких интегралов и другие примеры их использования. Приведены краткие сведения о физических системах, описываемых с помощью рассмотренной модели.

### Введение

Качественный анализ характера движения нелинейной неинтегрируемой динамической системы (и, в частности, анализ хаотических колебаний в такой системе) существенно упрощается, если дифференциальные уравнения движения сводимы к динамическому отображению  $X_{N+1} \equiv F(X_N)$ , указывающему функциональную связь между состояниями системы в дискретные моменты времени:  $X_N \equiv X(t_N)$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$  (нередко функция  $F(X)$  известна явно). Хотя и в этом случае моделирование глобальной динамики возможно только численными методами, знание вида отображения позволяет использовать более эффективные численные процедуры и накапливать большие объемы данных. Кроме того, некоторые характеристики динамического хаоса, порождаемого итерированием отображения, могут быть описаны приближенными аналитическими формулами (к примеру, геометрия аттрактора [1-4], максимальный показатель Ляпунова [5,6]). Другой подход, позволяющий использовать при описании хаоса традиционный математический аппарат, состоит в переходе к статистической трактовке хаотического движения и сведении точных динамических уравнений к приближенному кинетическому. Заметим, что последовательное описание диссипативной системы с неустойчивым движением должно учитывать флуктуации, которые с неизбежностью сопутствуют диссипативным процессам.

Используя оба подхода, можно сформулировать простую модель диссипативной нелинейной системы с дискретным временем, возмущенной шумом, вводя для ее описания уравнение типа Колмогорова - Чепмена [7]

$$P_{N+1}(X) = \iint dYdZ P_{\Pi}(X - Y) \delta^{(2)}(Y - F(Z)) P_N(Z). \quad (1)$$

Здесь  $P_N(X)$  - плотность распределения комплексной динамической переменной  $X$  в момент времени  $t_N$ , а  $P_{\Pi}(X)$  - плотность распределения аддитивной флуктуационной составляющей; предполагается, что для времени корреляции соответствующего случайного процесса выполняется неравенство  $\tau_{\text{кор}} \ll t_{N+1} - t_N$  (в уравнении (1) и далее мы опускаем пределы интегрирования, если интеграл берется по всей комплексной плоскости). В случае отсутствия флуктуаций ( $P_{\Pi}(X) = \delta^{(2)}(X)$ , где  $\delta^{(2)}(X) = \delta(\text{Re}X)\delta(\text{Im}X)$ ) и при начальном условии  $P_0(X) = \delta^{(2)}(X - X_0)$  выполнение итераций для (1) эквивалентно итерированию отображения  $X_{N+1} = F(X_N)$

$$P_N(X) = \delta^{(2)}(X - F^{[N]}(X_0)), \quad F^{[N]}(X) = F(F^{[N-1]}(X)). \quad (2)$$

Однако, как было показано в [5, 6] для

$$F(X) = 1 + \kappa X \exp[i\lambda |X|^{2\kappa} + i\phi_0], \quad (3)$$

при наличии флуктуаций (с несингулярной функцией распределения), диссипации ( $\kappa < 1$ ) и в пределе *сильного перемешивания* ( $\lambda \gg 1$ ) уравнение движения существенно упрощается и приобретает вид

$$P_{N+1}(X) = \iint dYdZ P_{\Pi}(X - Y) \langle \delta^{(2)}(Y - F_*(Z, \phi)) \rangle P_N(Z). \quad (4)$$

где

$$F_*(Z, \phi) = 1 + \kappa X \exp[i\phi]$$

и  $\langle \dots \rangle$  - усреднение по  $\phi$  с равномерным распределением. В приближении (4) неустойчивости, ведущие к возникновению хаотического аттрактора при детерминистском описании, реализуются как механизм фазового перемешивания, имеющий не динамический, а стохастический характер.

Кинетическое описание нелинейных систем в области динамической стохастизации движения, базирующееся на приближении хаотических фаз, получило определенное развитие в теории гамильтоновых систем [8]. Однако переход к диссипативным системам обычно вовсе не тривиален - прежде всего из-за проявления особых закономерностей в поведении таких систем при масштабных преобразованиях. В данной работе представлены некоторые результаты, касающиеся связи характеристик асимптотического распределения  $P_{st} = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N$  со

структурой *масштабно-инвариантных (фрактальных) множеств*.

Эволюционное отображение с функцией (3) и его многомерные аналоги, а также соответствующие отображения типа (1), (4) для распределений, описывают поведение нелинейных физических систем различной природы. Укажем на некоторые из них.

(а) Системы с задержанной обратной связью. Прежде всего это модель оптического кольцевого резонатора (модель Икеды) [9-11], а также модели электронных и гибридных оптико-электронных цепей, описываемых аналогичными уравнениями.

(б) Нелинейные спиновые системы, возбуждаемые периодическими последовательностями прямоугольных импульсов с радиочастотным заполнением. Примером является система ядерных спинов в ферромагнетике [4].

(в) Системы, в которых «быстрые» затухающие осцилляции параметрически возбуждаются последовательностями «медленных» модулирующих импульсов - если выполнено условие применимости метода медленно меняющихся амплитуд и метода усреднения [12].

Конкретные модели рассмотрены более подробно в Приложении.

## 1. Самоподобие и интеграл по фрактальному носителю

«Стационарная точка» отображения (4). Следуя [5], будем искать асимптотическое (стационарное) распределение вероятностей, соответствующее пределу  $N \rightarrow \infty$ . Это распределение удовлетворяет уравнению, получающемуся из (4) в результате замены  $N, N+1 \rightarrow st$ , и может быть представлено в виде

$$P_{st}(X) = \int dU \Lambda_{\Pi}(U) \tilde{\theta}_{st}(\kappa|U|) \exp[i\text{Re}((X-1)U^*)]. \quad (5)$$

Здесь  $\Lambda_{\Pi}(U)$  - характеристическая функция распределения флуктуаций, и  $\tilde{\theta}_{st}(u)$  - решение уравнения

$$\tilde{\theta}_{st}(u) = \mathcal{F}(u) \tilde{\theta}_{st}(\kappa u) \quad (6)$$

где

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\beta \Lambda_{\Pi}(ue^{i\beta}) e^{-i\kappa \cos\beta} \quad (7)$$

Заметим, что уравнение (6) определяет закон *обобщенного самоподобия* для функции  $\tilde{\theta}_{st}(u)$ : вид функции восстанавливается после масштабного преобразования и домножения на заданную функцию. Решение уравнения (6) может быть представлено в виде [5]

$$\tilde{\theta}_{st}(u) = (2\pi)^{-2} \prod_{\gamma=0}^{\infty} \mathcal{F}(u\kappa^{\gamma}); \quad (8)$$

вопрос о сходимости бесконечного произведения рассмотрен ниже. В случае, если  $\Lambda_{\Pi}(U)$  зависит только от  $u = |U|$ , распределение (5) можно записать как

$$P_{st}(X) = \int dY P_{\Pi^*}(X-Y) P_{ch}(Y). \quad (9)$$

Здесь  $P_{\Pi^*}(X)$  - распределение «накопленных» флуктуаций; связь этой функции с  $P_{\Pi}(X)$  определяется связью между характеристическими функциями

$$\Lambda_{\Pi^*}(u) = \prod_{\gamma=0}^{\infty} \Lambda_{\Pi}(u\kappa^{\gamma}). \quad (10)$$

Выражение (10) рассчитывается явно, в частности, для гауссовского распределения: если  $\Lambda_{\Pi}(u) = \Lambda_g(u, R)$  то  $\Lambda_{\Pi^*}(u) = \Lambda_g(u, R/(1-\kappa^2))$ , где  $\Lambda_g(u, R) = \exp(-Ru^2/4)$ . Распределение  $P_{ch}(X)$  описывает собственно «хаотический» вклад и обладает вращательной симметрией относительно  $X=1$ . В дальнейшем удобно иметь дело с функцией радиального распределения, определяемой равенством

$$P_{ch}(X) = (\pi\kappa^2)^{-1} f_{ch}(|X-1|/\kappa^2),$$

которая может быть представлена в виде

$$f_{ch}(G) = 1/2 \int_0^{\infty} w dw J_0(wG^{1/2}) \prod_{\gamma=0}^{\infty} J_0(u\kappa^{\gamma}). \quad (11)$$

Далее мы сосредоточим внимание на анализе этого выражения.

**Сходимость бесконечных произведений.** Найдем общие условия сходимости бесконечных произведений, входящих в выражения (8), (10), (11). Пусть в некоторой окрестности точки  $x = 0$  функция  $\mathcal{F}(x)$  является непрерывной, монотонной и определенное число раз дифференцируемой; пусть также  $\mathcal{F}(0) = 1$ . В

этом случае, если  $\kappa < 1$ , при любом фиксированном  $u$  найдется такое  $\gamma_1$ , что для всех значений  $\gamma \geq \gamma_1$  будут выполнены неравенства  $\mathcal{F}(u\kappa^\gamma) > 0$ , а величины  $\ln \mathcal{F}(u\kappa^\gamma)$  будут иметь одинаковый знак. Для доказательства сходимости бесконечного произведения функций  $\mathcal{F}(u\kappa^\gamma)$  при каждом фиксированном  $u$  достаточно рассмотреть произведение, в котором индекс  $\gamma$  пробегает значения начиная с  $\gamma = \gamma_1$ ; последнее сводится к ряду со знакоопределенными членами

$$\prod_{\gamma=\gamma_1}^{\infty} \mathcal{F}(u\kappa^\gamma) = \exp\left\{\sum_{\gamma=\gamma_1}^{\infty} \ln \mathcal{F}(u\kappa^\gamma)\right\}. \quad (12)$$

Используя признак Даламбера, полагая  $\delta = \kappa^\gamma$  и раскрывая неопределенность, имеем

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\ln \mathcal{F}(u\kappa^{\gamma+1}) / \ln \mathcal{F}(u\kappa^\gamma)) = \kappa \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mathcal{F}'(u\delta\kappa) / \mathcal{F}'(u\delta)). \quad (13)$$

При  $\mathcal{F}'(0) \neq 0$  выражение (13) равно  $\kappa$ ; если же в правой части (13) сохраняется неопределенность (в общем случае,  $\mathcal{F}^{(n)}(0) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, s-1$ ;  $\mathcal{F}^{(s)}(0) \neq 0$ ), после ее раскрытия получим  $\kappa^s$ . В обоих случаях при  $\kappa < 1$  имеет место сходимость как ряда, так и бесконечного произведения.

**Приближенное представление функций Бесселя.** Учитывая асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях аргумента, введем приближение, разделяя «колебательную» и монотонную части,

$$J_0(x) \approx \varphi(x) [2^{1/2} \cos(x - \pi/4)]. \quad (14)$$

Конечно, никаким выбором  $\varphi(x)$  приближенное равенство нельзя сделать точным, так как положение нулей функции  $J_0(x)$  и косинуса различны. Далее однако мы будем исходить из предположения о том, что в нашем случае эта неточность не играет существенной роли.

Подставляя (14) в (11), получим

$$f_{\text{ch}}(G) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty dw \Phi(w, G) \Gamma_n(w, G), \quad (15)$$

где

$$\Phi(w, G) = 1/2 w \varphi(wG^{1/2}) \prod_{\gamma=0}^{\infty} \varphi(w\kappa^\gamma) \quad (16)$$

- функция, быстро спадающая при  $w \rightarrow \infty$  (здесь и далее знак приближенного равенства указывает на то, что соотношение получено с помощью (14)). Выражение (15) можно записать через фурье-образ  $\tilde{\Phi}$  функции (16) в виде

$$f_{\text{ch}}(G) \approx \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(-n-1)/2} \sum_{s_n} (\tilde{\Phi}(G^{1/2} + (s_n, \chi_n(\kappa)), G) \exp\{-i\pi/4 [1 + (s_n, \chi_n(1))]\} + \text{к.с.}), \quad (17)$$

где

$$s_n = (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1), \quad \chi_n(\kappa) = (1, \kappa, \kappa^2, \dots, \kappa^{n-1}), \quad (18)$$

а (...) обозначено скалярное произведение векторов (18); суммирование в (17) ведется по различным векторам сигнатур  $s_n$ . Заметим, что множество таких векторов изоморфно множеству положительных двоичных дробей, меньших единицы и имеющих  $n$  позиций [13], и становится при  $n \rightarrow \infty$  не счетным, а континуальным.

**Интеграл по фрактальному носителю, лежащему на единичном отрезке.** Определим интеграл выражением

$$\int_{\mathcal{E}} f(x) d\mu(x|\kappa, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(s_n)} \eta_n \theta_n^{[s]} \int_{l_n^{[s]}} f(x) dx \quad (19)$$

полагая, что

$$l_n^{[s]} := [\lambda_n^{[s]} - \delta_n/2, \lambda_n^{[s]} + \delta_n/2], \quad \lambda_n^{[s]} = 1/2 + (1 - \kappa)(s_n, \chi_n(\kappa))/2, \quad (20)$$

$\delta_n = \kappa^n$ ,  $\eta_n = (2\kappa)^{-n}$ , где  $\kappa$  - коэффициент сжатия. Все величины, помеченные индексом  $[s]$ , являются функциями вектора сигнатуры; весовые множители  $\theta_n^{[s]} \equiv \theta_n[s_n]$  должны удовлетворять условию

$$\theta_n[s_{n-1} \oplus (+1)] + \theta_n[s_{n-1} \oplus (-1)] = 2\theta_{n-1}[s_{n-1}]. \quad (21)$$

При  $\kappa < 1/2$  отрезки  $l_n^{[s]}$  получаются с помощью известной процедуры построения канторовского множества: из единичного отрезка исключается средняя часть длиной  $1-2\kappa$ , затем в той же пропорции исключаются средние части получившихся отрезков и т.д. Хотя суммарная длина остающихся отрезков при этом стремится к нулю, выражение (19) отлично от нуля благодаря множителям  $\eta_n$  (использованная здесь конструкция меры на канторовском фрактале описана, к примеру, в [13]). При выбранной нормировке интеграл от  $f \equiv 1$  равен единице.

Применяя к интегралам в правой части (17) теорему о среднем, можно найти

$$\int_{\mathcal{E}} f(x) d\mu(x|\kappa, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \sum_{(s_n)} \theta_n^{[s]} f(\lambda_n^{[s]}). \quad (22)$$

Сравнивая выражения (22) и (17), мы видим, что

$$f_{ch}(G) \approx \frac{1}{2^{1/2}} \left[ e^{-i\pi/4} \int_{\mathcal{E}} \tilde{\Phi}(G^{1/2} + \frac{2x-1}{1-\kappa}, G) d\mu(x|\kappa, \theta) + \text{к.с.} \right], \quad (23)$$

если

$$\theta_n^{[s]} = 2^{n/2} \exp\left[(-1/4)i\pi(s_n, \chi_n(1))\right]. \quad (24)$$

**Интеграл по фрактальному носителю, лежащему в единичном квадрате.** Если  $1/2 < \kappa < 1$ , отрезки  $l_n^{[s]}$ , по которым берутся интегралы в правой части (19), перекрываются. В результате теряется удобное представление о том, что фрактальная область интегрирования вложена в единичный отрезок. Чтобы обойти эту трудность, следует «разнести» отрезки вдоль второй координаты. Это приводит нас к двумерному интегралу, определяемому как

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) d\mu(x, y|\kappa_x, \kappa_y, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{(s_n)} \eta_n' \theta_n^{[s]} \iint_{d_n^{[s]}} f(x, y) dx dy. \quad (25)$$

Здесь  $d_n^{[s]} = l_{x_n}^{[s]} \otimes l_{y_n}^{[s]}$  - прямоугольная ячейка со сторонами, параллельными координатным осям;

$$l_{an}^{[s]} := [\lambda_{an}^{[s]} - \delta_{an}/2, \lambda_{an}^{[s]} + \delta_{an}/2], \quad \lambda_{an}^{[s]} = 1/2 + (1 - \kappa_a)(s_n, \chi_n(\kappa_a))/2, \quad (26)$$

$\delta_{an} = \kappa_a^n$  при  $a=x, y$ ;  $\eta_n' = (2\kappa_x \kappa_y)^{-n}$ . Элементарные ячейки  $d_n^{[s]}$  не перекрываются, если для коэффициентов сжатия по осям выполнено хотя бы одно из условий:  $\kappa_x \leq 1/2$  или  $\kappa_y \leq 1/2$ .

Используя (25), можно записать выражение (17) как

$$f_{ch}(G) \approx 1/2^{1/2} \left[ e^{-i\pi/4} \int_{\mathcal{D}} \tilde{\Phi}(G^{1/2} + (2x-1)/(1-\kappa), G) d\mu(x, y|\kappa, 1/2, \theta) + \text{к.с.} \right], \quad (27)$$

здесь  $\theta_n^{[s]}$  также определяется формулой (24).

**Визуализация фрактальной структуры.** Фрактальный носитель  $\mathcal{D}$ , соответствующий интегралу (25), показан на рис. 1 как предфрактал, то есть объединение клеток  $d_n^{[s]}$ , при  $n = 9$  ( $\kappa_x = \kappa$ ,  $\kappa_y = 0.5$ ). Если  $\kappa_a \leq 0.5$  для  $a = x$  или  $a = y$ , проекция  $\mathcal{D}$  на соответствующую ось является обычным канторовским множеством, имеющим размерность подобия  $D_a = -(\log_2 \kappa_a)^{-1}$ . Размерность множества  $\mathcal{D}$  в целом можно ввести как критическую размерность некоторой  $d$ -меры [13]

$$\mathcal{M}_d = \mathcal{N}(S) S^{d/2} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } d > D, \\ \infty & \text{при } d < D, \end{cases} \quad (28)$$

здесь  $S$  - площадь элементарной ячейки предфрактала,  $\mathcal{N}(S)$  - число таких ячеек (условие  $S \rightarrow 0$  эквивалентно  $n \rightarrow \infty$ ). В интересующем нас случае  $\kappa_x = \kappa$  и  $\kappa_y = 0.5$  нетрудно найти

$$D = 2/(1 - \log_2 \kappa). \quad (29)$$

Отметим, что в случае  $\kappa = 0.5$ , когда  $D = 1$ , множество  $\mathcal{D}$  становится диагональю единичного квадрата  $x=y$ , а интеграл (25) превращается в обычный определенный интеграл по этому отрезку.

На рис. 2 представлены графики различных приближений функции (11), полученных путем усечения бесконечного произведения функций Бесселя; вертикальные пунктирные линии отмечают положения «канторовских» точек  $G = (1 \pm \kappa \pm \kappa^2 \pm \dots)^2$ . Мы видим, что в этих точках располагаются особенности функций низких порядков приближения или их производных. Эти особенности, локально сглаживаясь при увеличении числа учитываемых сомножителей, тем не менее остаются фактором, формирующим зрительный образ функциональной зависимости.

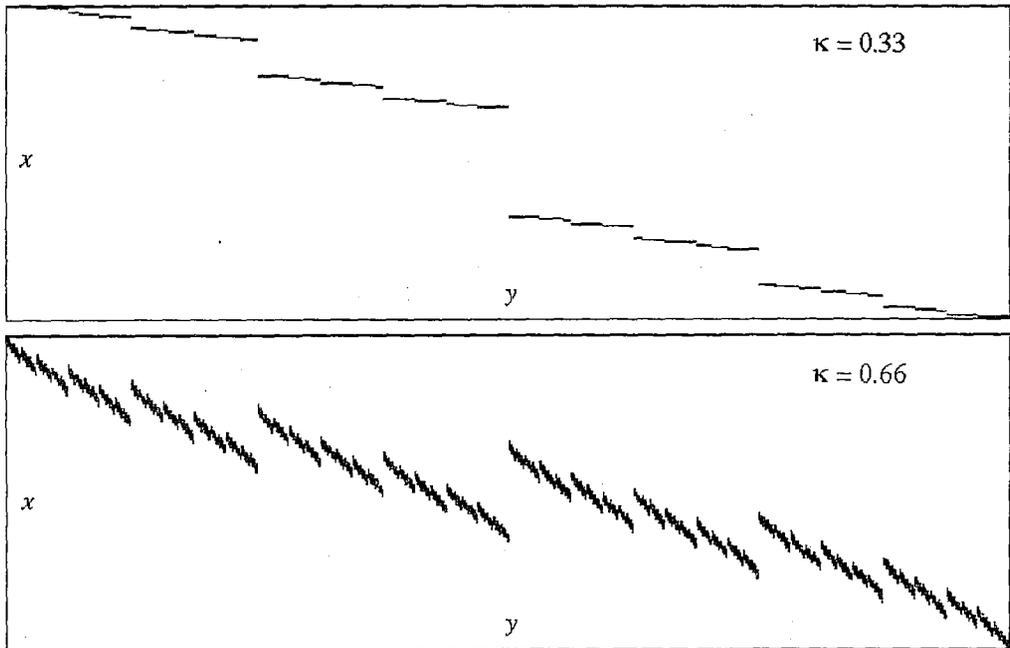


Рис. 1. Изображения фрактальных носителей для интеграла (25)

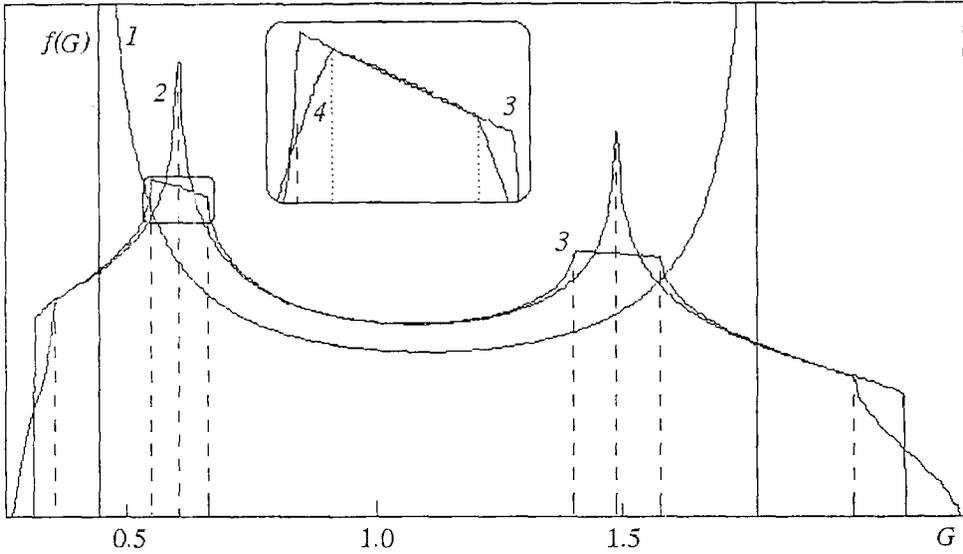


Рис. 2. Графики приближений для функции (11). При расчете бесконечное произведение заменялось конечным; число учтенных сомножителей указано вблизи каждого из графиков

## 2. Другие примеры применения фрактальных интегралов

Рассмотрим ряд простых моделей с дискретным временем и диссипацией, анализ которых также естественно приводит к процедуре интегрирования по фрактальному носителю.

**Линейное преобразование дихотомического шума в одномерной системе с запаздыванием.** Пусть в уравнение (1), в котором  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  считаются вещественными переменными, подставлено  $F(X) = \kappa X$  при  $\kappa < 1$  и

$$P_n(X) = P_g(X-1, R)/2 + P_g(X+1, R)/2, \quad (30)$$

где  $P_g(X, R)$  - плотность распределения гауссовского шума с  $\langle \xi \rangle = 0$  и  $\langle \xi^2 \rangle = R$ . Определенное таким образом уравнение будет описывать преобразование «внешнего» шумового сигнала, являющегося линейной суперпозицией гауссовского и дихотомического процессов, в линейной системе с задержанной обратной связью. Мы ограничиваемся здесь самым простым случаем, полагая, что  $\tau_{\text{сост}}$  для «внешнего» шума существенно меньше времени задержки. При этом дихотомический процесс реализуется через равновероятное появление независимых случайных приращений  $\pm 1$  на каждом шаге итерации. Отыскивая «стационарную точку» уравнения (1), получаем уравнение

$$P_{st}(X) = 1/(2\kappa) \int_{-\infty}^{\infty} dY P_g(X-Y) \{P_{st}[(Y-1)/\kappa] + P_{st}[(Y+1)/\kappa]\}. \quad (31)$$

Полагая

$$P_{st}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\theta}_{st}(u) \exp(iuX),$$

можно представить уравнение (31) в эквивалентной форме

$$\tilde{\theta}_{st}(u) = \mathcal{F}(u) \tilde{\theta}_{st}(\kappa u), \quad \mathcal{F}(u) = \exp(-u^2 R/2) \cos u. \quad (32)$$

Используя далее итерационное решение уравнения для  $\tilde{\theta}_{st}$ , можно записать стационарное распределение как интеграл типа (25) с  $\theta_n^{[s]} \equiv 1$

$$P_{st}(Z) = \iint_{\mathcal{D}} P_g(Z - (2x - 1)/(1 - \kappa), R/(1 - \kappa^2)) d\mu(x, y | \kappa, 1/2, 1). \quad (33)$$

**Преобразование дихотомического шума в двумерной системе с запаздыванием и фазовым перемешиванием.** Подставим в уравнение (4), считая переменные комплексными,  $F_*(X, \phi) = 1 + \kappa X \exp(i\phi)$  и

$$P_{fl}(X) = P_g(X+A, R)/2 + P_g(X+B, R)/2 \quad (34)$$

(равновероятно появление комплексных значений  $A$  или  $B$ ). При этих условиях формулы (5) - (8) сохраняют силу, если в них подставлены функции

$$\Lambda_{fl}(U) = (\exp(-R|U|^{2/4})/2)(\exp[i\text{Re}(UA^*)] + \exp[i\text{Re}(UB^*)]), \quad (35)$$

$$\mathcal{F}(u) = (\exp(-Ru^2/4)/2)(J_0(u|A-1|) + J_0(u|B-1|)). \quad (36)$$

Тем же путем, что и в разд.1, в рассматриваемом случае может быть найдено приближенное выражение для  $f_{ch}$ , содержащее интеграл по фрактальному носителю, имеющему коэффициент ветвления не два, а четыре.

**Трехмерная система со случайными блужданиями на сфере.** Постановка задачи, представленная во Введении и разделе 2, может быть перенесена на трехмерную модель; вместо усреднений по фазовому углу теперь естественно выполнять усреднения по ориентациям в пространстве. Поиск стационарной точки и в этом случае связан с решением уравнения (6), где

$$\mathcal{F}(u) = u^{-1} \sin u. \quad (37)$$

В заключение заметим, что распределения (23), (27), (33), выражающиеся через фрактальные интегралы, должны позволять корректно рассчитывать различные статистические средние. По этой причине важно знать, для каких классов функций интегралы (19), (25) существуют. Приведем без доказательства некоторые результаты. Интегралы с весовыми функциями (24) сходятся, если  $f(x)$  бесконечно дифференцируема; при этом же условии правые части (19) и (22) равны. В случае  $\theta_n^{[s]} \equiv 1$  то же верно, если  $f(x)$  равномерно непрерывна.

## Приложение

Приведем краткие сведения о физических системах, которые в простом модельном приближении описываются уравнениями (1), (3), (4) или уравнениями, близкими по форме.

**Нелинейный кольцевой резонатор [3, 9-11, 14].** Предполагается, что нелинейная (в ряде работ - двух или многоуровневая) среда помещена в оптический кольцевой резонатор, который возбуждается когерентной (частично-когерентной) световой волной через полупрозрачное зеркало; излучение через зеркала и поглощение в среде приводят к потерям энергии. В плосковолновом приближении, учитывая кольцевые граничные условия и предполагая, что поляризация «адиабатически» следует за амплитудой поля световой волны, можно свести исходную систему материальных и полевых уравнений (уравнений Максвелла - Блоха) к системе дифференциально-разностных уравнений

$$\mathcal{E}(t) = 1 + \kappa \mathcal{E}(t - T) \exp[(1 - i\delta)\chi_v(t) + i\phi_0], \quad (38)$$

$$\dot{\Psi}(t) = (1 + \Psi(t))/T_1 + 2\eta|\mathcal{E}(t - T)|^2[1 - \exp(2\chi_v(t))], \quad (39)$$

$$\chi_v(t) = \eta|g|^2T_2(1 + \delta^2)^{-1}|\mathcal{E}(t - T)|^{2\nu-2}\Psi(t). \quad (40)$$

Здесь  $\mathcal{E}(t)$  - «медленно меняющаяся» амплитуда поля световой волны (амплитуда возбуждающего поля принимается за единицу);  $T_1$  и  $T_2$  - время релаксации заселенностей и время потери когерентности для поляризации среды;  $\delta = (\omega_0 - \nu\omega)T_2$  - безразмерная расстройка;  $\omega_0$ ,  $\omega$  - частоты резонансного перехода и возбуждающего поля;  $\Psi(t)$  - интегральная разность заселенностей;  $\kappa$  - параметр потерь ( $\kappa < 1$ );  $T$  - время обхода резонатора световой волной;  $\eta$  и  $g$  - константы, характеризующие среду и резонатор (уравнения (38) - (40) описывают случай  $\nu$  - квантовых переходов; подробное описание процедуры вывода можно найти в [3, 14]). В случае  $\nu > 1$  пренебрежем изменением заселенностей и положим  $\Psi = -1$ . Считая также, что  $\delta \gg 1$ , можно перейти от системы (38) - (40) к конечно-разностному уравнению

$$\mathcal{E}(t) = 1 + \mathcal{E}(t - T)\exp[i\lambda|\mathcal{E}(t - T)|^{2k} + i\phi_0], \quad (41)$$

где  $\lambda = \delta\eta|g|^2T_2(1 + \delta^2)^{-1}$ ,  $k = \nu - 1$ . Полагая  $X_N = \mathcal{E}(t_0 - NT)$ ,  $0 < t_0 \leq T$ , представляем уравнение (41) в виде семейства отображений  $X_{N+1} = F(X_N)$  с функцией (3) в правой части. В случае  $\nu = 1$ , описывая изменение заселенностей в адиабатическом приближении (то есть полагая  $\dot{\Psi} = 0$  в (39)), можно также свести систему (38) - (40) к уравнению вида (41) путем исключения переменной  $\Psi$ .

**Ядерные спины в ферромагнетике [4].** Рассматривается однородное движение ядерной намагниченности с учетом «самовоздействия» ядер, обусловленного сверхтонким взаимодействием (механизм Сула - Накамуры [15]). Предполагается, что короткие резонансные радиочастотные (РЧ) импульсы порождают поперечную намагниченность. Свободная прецессия намагниченности в промежутках между импульсами, сопровождающаяся релаксацией, вследствие косвенного взаимодействия имеет нелинейный характер - частота прецессии зависит от продольной намагниченности. Как показано в [4], в ряде простых случаев можно проинтегрировать дифференциальные уравнения движения и свести их к конечно-разностному уравнению

$$\mathbf{M}(t) = \mathbf{e}_z M_{00} + R U_z (A + B(\mathbf{e}_z U_{\text{rf}} \mathbf{M}(t - T))) U_{\text{rf}} \mathbf{M}(t - T). \quad (42)$$

Здесь  $\mathbf{M}(t)$  - вектор ядерной намагниченности;  $T = T_{\text{rf}} + T_0$ , где  $T_{\text{rf}}$  - длительность РЧ импульса и  $T_0$  - интервал между соседними импульсами;  $R = \text{diag}(\kappa, \kappa, \gamma)$ ,  $\kappa = \exp(-T_0/T_2)$ ,  $\gamma = \exp(-T_0/T_1)$ , где  $T_1$ ,  $T_2$  - времена продольной и поперечной релаксации;  $M_{00} = M_0(1 - \gamma)$ ,  $M_0$  - равновесная ядерная намагниченность;  $U_z(\cdot)$  - матрица поворота вокруг вектора  $\mathbf{e}_z$  на угол  $A + B(\mathbf{e}_z U_{\text{rf}} \mathbf{M})$ , зависящий от намагниченности;  $U_{\text{rf}} \equiv U(\alpha, \mathbf{n}_0)$  - матрица поворота на угол  $\alpha = -\omega_{\text{eff}} T_{\text{rf}}$ ,  $\omega_{\text{eff}} = [(\Delta\omega)^2 + \omega_1^2]^{1/2}$  вокруг оси  $\mathbf{n}_0 = (\omega_1 \mathbf{e}_x + \Delta\omega \mathbf{e}_z) / \omega_{\text{eff}}$ ;  $\Delta\omega$  - расстройка и  $\omega_1$  - амплитуда РЧ-поля в единицах частоты;  $A$  и  $B$  - параметры среды.

Сосредоточим наше внимание на случае малых отклонений намагниченности от равновесия:  $\alpha \ll 1$ ,  $B \gg 1$ ,  $\alpha B^{1/2} \sim 1$ ; при этих условиях изменения продольной компоненты имеют второй порядок малости и могут не учитываться. В этом приближении, вводя комплексную переменную

$$X_N = 1 + (\alpha M_0)^{-1} (\mathbf{e}_y - i\mathbf{e}_x) \mathbf{M}(t_N), \quad t_N = NT, \quad (43)$$

можно свести уравнение (42) к двумерному отображению

$$X_{N+1} = 1 + \kappa X_N \exp[i\lambda \text{Re} X_N + i\phi_0], \quad (44)$$

где  $\lambda = -\alpha B^{1/2} M_0$ ,  $\phi_0 = B M_0 - A$ . Рассматривая движение в приближении сильного перемешивания, мы, как и в случае отображения с функцией (3) в правой части, приходим к кинетическому уравнению (4).

**Параметрическое возбуждение спиновых волн [12].** При параллельной накачке спиновых волн в магнетиках важную роль играют процессы магнон-магнонного рассеяния высших порядков, обеспечивающие нелинейный механизм ограничения амплитуды колебаний [16]. В том случае, если амплитуда высокочастотной накачки или внешнее магнитное поле дополнительно промодулированы низкочастотным сигналом, в системе возможно возникновение хаотических колебаний (на низких частотах) [17]. Во многих практически интересных ситуациях параметрические и модуляционные процессы в магнетиках могут быть описаны уравнениями [16]

$$(2\gamma_k)^{-1} \dot{\theta}_k + b \sin \theta_k = a f(\omega_m t) + \Delta - N_k, \quad (45)$$

$$(2\gamma_k)^{-1} \dot{N}_k = N_k (b \cos \theta_k - 1 - \zeta N_k). \quad (46)$$

Здесь  $N_k$  - число параметрически возбужденных волн (нормированное специальным образом);  $\theta_k$  - угол фазового рассогласования для пары волн с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $-\mathbf{k}$ ;  $\gamma_k$  - скорость релаксации одиночной спиновой волны;  $a$  и  $\omega_m$  - амплитуда и частота модуляции;  $f$  - функция формы модуляционного импульса;  $\Delta = \gamma_k^{-1}(\omega_p/2 - \omega_k)$  - безразмерная расстройка;  $\omega_k$  и  $\omega_p$  - частоты волны и поля накачки;  $\zeta$  - параметр нелинейного затухания. Будем считать, что (а) амплитуда накачки существенно превышает значение порога параметрической неустойчивости (то есть  $b \gg 1$ ); (б) глубина модуляции в определенном смысле мала (точное условие см. в [12]); и (в) импульсы модуляции имеют прямоугольную форму: «высокий» и «низкий» уровни сигнала модуляции сменяют друг друга, устанавливаясь на время  $T_+$  и  $T_-$ , соответственно. Можно показать, что при больших  $b$  процесс установления равновесия, нарушенного модуляционным воздействием, имеет характер «медленно» затухающих «быстрых» осцилляций. Обозначим  $\Omega_{\pm} = \Omega_0 \pm \delta\Omega$  частоты осцилляций в случаях «высокого» (знак +) и «низкого» (знак -) модуляционных уровней. Используя метод медленно меняющихся параметров и метод усреднения, можно свести уравнения (45), (46) к отображению [12]

$$X_{N+1} = F_{\pm}(X_N), \quad F_{\pm}(X) = \pm 1 + \kappa_{\pm} X \exp[i\lambda_{\pm}|X|^2 + i\phi_{\pm}], \quad (47)$$

где

$$\kappa_{\pm} = \exp(-\gamma_k T_{\pm}), \quad \lambda_{\pm} = (\Omega_0^{-1} - \Omega_0)(1 - \kappa_{\pm}^2)\delta\Omega^2 b,$$

$$X_N = (4i\delta\Omega)^{-1} \{ \delta\theta_k(t_N) + i\Omega_0 \delta \ln N_k(t_N) \}, \quad t_N = NT, \quad (48)$$

динамические переменные  $\delta\theta_k(t)$  и  $\delta \ln N_k(t)$  характеризуют отклонение от равновесного состояния, достигаемого в отсутствие модуляции;  $T = T_+ = T_-$ .

*Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований России. Грант ФФИ 93 - 02 - 2011.*

### Библиографический список

1. Bridges R., Rowlands G. // Phys. Lett. 1977. Vol. 63A. P. 189.

2. Yamaguchi Y., Mishima N. // Phys. Lett. 1984. Vol. 104A. P. 179.
3. Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. // Оптика и спектроскопия. 1987. Т. 62. С. 873.
4. Зверев В.В. // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1. С. 72.
5. Zverev V.V., Rubinstein B.Ya. // J.Stat. Phys. 1991. Vol. 63. P. 221.
6. Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. // Оптика и спектроскопия. 1988. Т. 65. С. 971.
7. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1985.
8. Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984.
9. Ikeda K. // Opt. Commun. 1979. Vol. 30. P. 257.
10. Ikeda K., Daido H., Akimoto O. // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 709.
11. Snapp R.R., Carmichael H.J., Schieve W.C. // Opt. Commun. 1981. Vol. 40. P. 68.
12. Сафонов В.Л., Зверев В.В. // ФТТ. 1994. Т. 36. С. 1939.
13. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.
14. Surendra Singh, Agarwal G.S. // Opt. Commun. 1983. Vol. 47. P. 73.
15. Туров Е.А., Куркин М.И., Николаев В.В. // ЖЭТФ. 1973. Т. 64. С. 283.
16. Захаров В.Е., Львов В.С., Старобинец С.С. // УФН. 1974. Т. 114. С. 609.
17. Андриенко А.В., Ожогин В.И., Сафонов В.Л., Якубовский А.Ю. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 2164.

Уральский государственный  
технический университет

Поступила в редакцию 10.08.94  
После переработки 13.09.95

## FRACTAL STRUCTURE OF INVARIANT DISTRIBUTIONS OF DISSIPATIVE RANDOM MAPS

V.V. Zverev

The simple model of a discrete-time dissipative nonlinear dynamical system perturbed by the external fluctuations is studied. It is supposed that the nonlinearity is caused by the intensity-dependent phase rotation of the complex dynamical amplitude. We have shown that the «stationary point» of the equation of motion for a probability distribution (in mixing phase approximation) can be described by the function that is expressed using the fractal set integral. The different determinations of this integrals and the examples of its usage are discussed. We also report some information about the physical systems are described by our simple model.



*Зверев Владимир Владимирович* - родился в 1949 году, окончил физико-технический факультет Уральского политехнического института в 1973 году. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по теоретической и математической физике в Институте физики (Киев, 1978). В настоящее время работает доцентом на кафедре математики Уральского государственного технического университета. Область научных интересов - когерентные и статистические явления в нелинейной оптике и магнетизме. Опубликовал около 40 работ по указанным направлениям.