



АТТРАКТОРЫ И БИФУРКАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ЗАПИСАННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ю.В. Андреев

Рассматривается динамика одномерного отображения с записанной информацией. Исследуются аттракторы, существующие в системе при записи информации на устойчивых и неустойчивых предельных циклах. Для этого изучены бифуркационные явления в отображении с записанной информацией, возникающие при изменении параметра s , определяющего устойчивость информационных предельных циклов. Анализ бифуркационных диаграмм показывает, что потеря устойчивости предельных циклов при переходе параметра $|s|$ через единицу сопровождается рождением хаотических аттракторов типа циклов интервалов.

Показано, что принцип использования динамических аттракторов для записи информации может быть обобщен на класс хаотических аттракторов типа циклов интервалов. На простых примерах продемонстрирована возможность записи информации на хаотических циклах интервалов.

Существование хаотических циклов интервалов - носителей информации позволяет использовать явление перемежаемости в отображениях с записанной информацией для хаотического сканирования памяти.

Введение

Несколько лет назад был предложен принцип записи информации в одномерных динамических системах, использующий в качестве носителей информации предельные циклы в фазовом пространстве этих систем [1, 2]. Для этого была разработана процедура синтеза одномерных кусочно-линейных отображений с соответствующими предельными циклами. Устойчивость циклов в такой динамической системе определяется единственным параметром s - наклоном информативных участков функции отображения.

Запись информации с использованием в качестве информационных носителей динамических аттракторов - предельных циклов - позволяет органично реализовать ряд таких функций обработки информации, как ассоциативная память (при записи на устойчивых циклах), распознавание образов, в том числе в присутствии ошибок (при записи на неустойчивых циклах), фильтр новизны и некоторых других [3-6].

Однако, до сих пор оставались неизученными вопросы о характере движения в системе и эволюции информационных предельных циклов при изменении параметра устойчивости s , а также возможность записи информации на более сложных динамических структурах, например, на хаотических аттракторах. Эти вопросы и составляют предмет исследования настоящей работы.

1. Принцип записи информации в одномерных динамических системах

Прежде чем приступить к обсуждению вопросов, рассматриваемых в настоящей статье, вкратце определим основные понятия и термины на примере записи на отображении двух блоков информации - английских слов *dad* и *babe* (подробное описание принципа записи см. в [1-5]). Информационный блок - это конечная одномерная цепочка символов, принадлежащих упорядоченному конечному множеству A , которое далее будем называть алфавитом. В качестве алфавита в данном случае возьмем подмножество латиницы $A = \{a, b, c, d, e\}$, содержащее $N = 5$ элементов. Под записью будем понимать синтез одномерной динамической системы с дискретным временем с двумя предельными циклами в ее фазовом пространстве, соответствующими этим двум блокам информации. Запись будем вести на втором уровне, это означает, что каждая точка предельного цикла определяется двумя последовательными элементами соответствующего информационного блока.

Фазовое пространство динамической системы - единичный отрезок $I=[0,1]$ - разделим на N регионов первого уровня (интервалов длины $1/N=0.2$) и каждому из них поставим в соответствие свой элемент алфавита. Каждый из регионов первого уровня разделим в свою очередь на N регионов второго уровня (интервалов длины $1/N^2 = 0.04$) и каждому из них тоже поставим в соответствие свой элемент алфавита (рис.1).

Теперь построим два цикла $\gamma_n=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, однозначно связанных с записываемыми информационными блоками. Для блока *dad* три точки цикла связаны с парами *da*, *ad*, *dd* (информационный блок мысленно сшивается в кольцо). Точка цикла, соответствующая фрагменту блока *da*, является центром региона второго уровня *a*, расположенного на регионе первого уровня, соответствующего букве *d* (рис.1). Аналогично строятся другие точки цикла. Точки цикла, соответствующего блоку *babe*, связаны с фрагментами блока *ba*, *ab*, *be*, *eb*.

После того, как в одномерном фазовом пространстве построен скелет замкнутых траекторий - циклов γ_n , приступаем к синтезу динамической системы с фазовым пространством такой структуры. Для этого на плоскости (X_m, X_{m+1}) откладываем пары последовательных точек всех циклов (x_i, x_{i+1}) . Для управления устойчивостью циклов через эти точки на плоскости (X_m, X_{m+1}) проводим короткие отрезки с фиксированным наклоном s (далее называемые информативными участками). Как известно, устойчивость предельного цикла определяется его мультипликатором μ . В случае одномерного отображения для цикла $\gamma_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ он равен $\mu = f'(x_1) \dots f'(x_n)$, а в данном случае определяется величиной тангенса

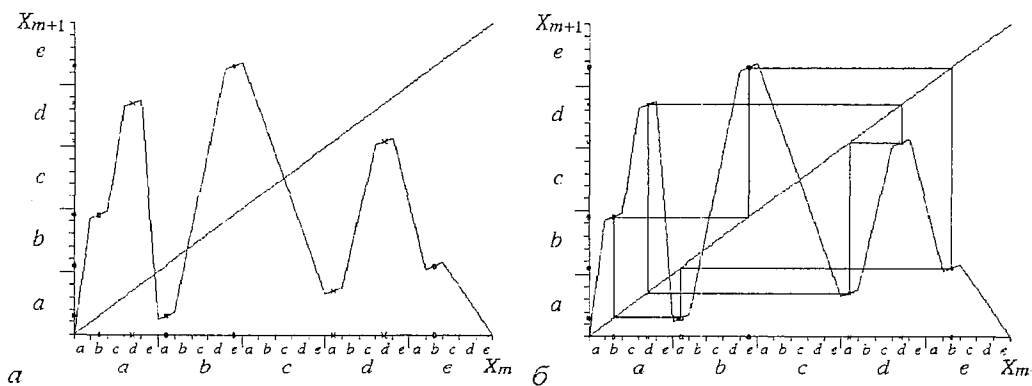


Рис. 1. Синтез одномерного отображения при записи информационных блоков *dad* и *babe* на втором уровне

угла наклона информативных участков: $\mu = s^n$. При $|\mu| < 1$ ($|s| < 1$) цикл устойчив, при $|\mu| > 1$ ($|s| > 1$) - неустойчив.

Синтез функции $f(x)$ искомого одномерного отображения завершается последовательным соединением концов информативных участков между собой и с концами отрезка $[0,1]$ прямыми линиями. График функции отображения с устойчивыми предельными циклами ($s = 0.5$) приведен на рис.1, а.

Извлечение информации происходит при итерировании отображения $x_{n+1} = f(x_n)$: когда фазовая траектория x_n попадает на те или иные регионы первого уровня, это трактуется как «генерация» или появление на «выходе» системы соответствующего элемента алфавита. Последовательность элементов алфавита на «выходе» системы будем называть информационным потоком. Циклы, соответствующие блокам *dad* и *babe*, показаны на рис.1, б.

2. Бифуркационные явления в отображениях с записанной информацией

Для эффективной обработки информации в нелинейной динамической системе необходимо понимание характера движений и существования и устойчивости тех или иных динамических структур в ее фазовом пространстве. Ниже рассматриваются явления, сопровождающие потерю устойчивости предельных циклов с записанной информацией при увеличении наклона $|s|$ от значений, меньших единицы.

Однопараметрические бифуркационные диаграммы для одномерных отображений с записанной информацией показаны на рисунках, приведенных в конце этого и в следующем разделе. При построении такой диаграммы отображение $x_{n+1} = f(x_n, s)$ итерируется и 5000 последовательных значений переменной x_n откладываются вдоль оси ординат для текущего значения s . После этого делается приращение s на относительную величину $\sim 10^{-3}$ и просчитывается переходной процесс длиной 5000 шагов для нового значения s без вывода на диаграмму. Начальные условия x_0 задаются только один раз, а последовательные точки x_n находятся всегда как бы на одной и той же фазовой траектории системы. Выбирая соответствующим образом начальные условия x_0 , можно просматривать эволюцию того или иного конкретного аттрактора.

Анализ бифуркационных диаграмм будем вести, опираясь на результаты, полученные в [7, 8]. Там показано, что в кусочно-линейных отображениях помимо обычных циклов точек $\gamma_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ могут иметь место циклы интервалов* $\Gamma_m = \{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ - хаотические притягивающие множества, состоящие из конечного числа отрезков I_k . При движении на таком аттракторе фазовая траектория системы проходит через точки $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = f(x_n), \dots$, последовательно попадающие на интервалы I_1, I_2, \dots, I_m . В работах [7, 8] построена теория кусочно-линейных отображений с единственным экстремумом, и подробно исследованы механизмы возникновения и динамические свойства этих аттракторов.

Рассмотрим схематически явления в окрестности информативных отрезков во время бифуркации потери устойчивости предельных циклов при $s = 1$ ($\mu = +1$).

Устойчивость периодического решения с периодом m отображения $f: I \rightarrow I$ удобно анализировать с помощью отображения f^m . Предельный цикл $\gamma_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ периода m отображения f соответствует неподвижной точке x_c отображения f^m , где

* Циклы интервалов, известные также под именем «шумящие интервалы», могут иметь место и в гладких отображениях. В качестве примера можно привести аттрактор - цикл интервалов периода 1 отображения логистической параболы $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$ при $\lambda = 4$ с непрерывным хаотическим множеством на отрезке $[0,1]$.

x_c - одна из точек цикла. Устойчивость предельного цикла γ_m однозначно связана с устойчивостью неподвижной точки x_c отображения f^m : цикл γ_m устойчив, если устойчива x_c , то есть $|f^m(x_c)'| < 1$, и наоборот: $|f^m(x_c)'| = |f'(x_1) \dots f'(x_m)'| = |\mu|$, где μ - мультипликатор цикла γ_m .

В критической точке $s = 1$ все точки информативного отрезка на $f^m: I \rightarrow I$ неподвижны и лежат на биссектрисе $x_{n+m} = x_n$. При прохождении s через $+1$ на границе информативного и неинформативного отрезков появляется «уголок», подобный изображенному на рис. 2, а, где показана правая половина информативного участка. x_c - середина информативного отрезка, точка цикла, O_R - вершина уголка, x_R вначале совпадает с правой границей информативного интервала. Наклон отрезка $x_c O_R$, являющегося образом правой половины

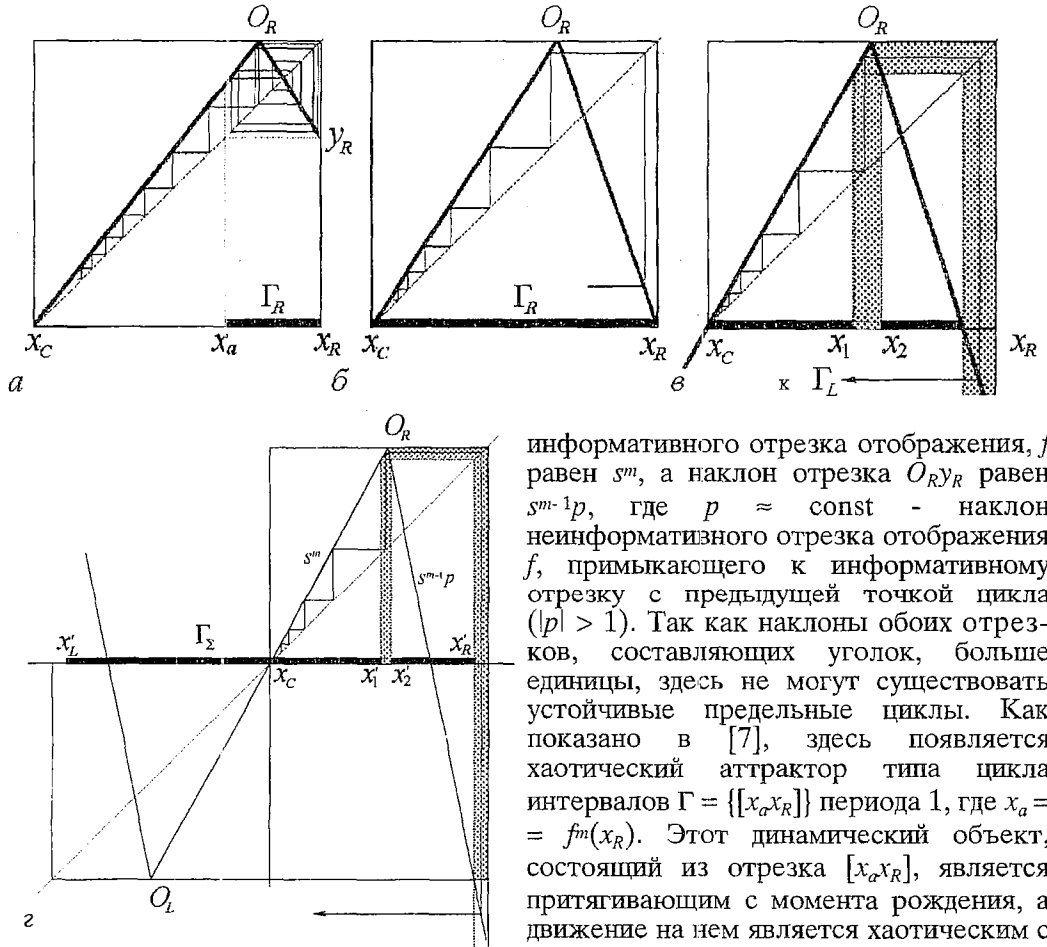


Рис. 2. Эволюция хаотического цикла интервалов в окрестности информативного отрезка на отображении f^m . x_c - неподвижная точка f^m (точка цикла периода m отображения f). а - цикл интервалов Γ_R на правой половине информативного отрезка, $\Gamma_R = [x_a x_R]$; б - бифуркация потери устойчивости Γ_R (кризис Γ_R): $x_a = x_R$; в - появление «дырки» $[x_1 x_2]$ - канала ухода траекторий с Γ_R ; г - разрушение общего аттрактора Γ_Σ , уход траектории с Γ_Σ через «дырку» $[x_1 x_2]$

информативного отрезка отображения, f равен s^m , а наклон отрезка $O_R y_R$ равен $s^{m-1}p$, где $p \approx \text{const}$ - наклон неинформативного отрезка отображения f , примыкающего к информативному отрезку с предыдущей точкой цикла ($|p| > 1$). Так как наклоны обоих отрезков, составляющих уголок, больше единицы, здесь не могут существовать устойчивые предельные циклы. Как показано в [7], здесь появляется хаотический аттрактор типа цикла интервалов $\Gamma = \{[x_a x_R]\}$ периода 1, где $x_a = f^m(x_R)$. Этот динамический объект, состоящий из отрезка $[x_a x_R]$, является притягивающим с момента рождения, а движение на нем является хаотическим с положительным показателем Ляпунова. Этому хаотическому аттрактору периода 1 отображения f^m соответствует интервальный цикл Γ_m периода m отображения f , полученный итерациями интервала $[x_a x_R]$ под действием f . Этот, очевидно, притягивающий цикл проходит через краевые области соответствующих информативных отрезков потерявшего устойчивость предельного цикла γ_m .

Эволюция интервального цикла Γ_R отображения f^m зависит от наклона отрезков $[x_c O_R]$ и $[O_R x_R]$.

В момент своего рождения цикл интервалов совпадает с вершиной «уголка» - точкой O_R . По мере роста s растут наклоны составляющих «уголок» отрезков, и аттрактор $\Gamma = \{[x_c x_R]\}$ увеличивается, расширяясь в обе стороны от O_R . При некотором критическом значении $s = s_1$, когда выполняется условие $f^m(x_R) = x_c$, интервальный цикл занимает всю правую половину информативного интервала исходного отображения и часть неинформативного (рис.2, б). При дальнейшем росте s в аттракторе появляется «дырка» $[x_1 x_2]$, где $f^m(x_1) = x_R$ и $f^m(x_2) = x_c$, через которую фазовая траектория покидает аттрактор (рис.2, в), уходя на левую половину информативного отрезка.

Это явление можно рассматривать как кризис аттрактора - трансформацию в переходной (метастабильный) хаос хаотического аттрактора при столкновении его границы с неподвижной точкой x_c . Следуя подходу, развитому в [9], можно оценить среднее время пребывания фазовой траектории на метастабильном аттракторе Γ_R как

$$T \propto P^{-1} = \left(\frac{|x_1 x_2|}{|x_c x_R|} \right)^{-1} = \left(\frac{s^m}{1 + s/|P|} - 1 \right)^{-1}, \quad (1)$$

где вероятность ухода траектории с интервального цикла $P=0$ при $s=s_1$. Для s , близких к s_1 ,

$$T \propto P^{-1} \approx (m(s - s_1))^{-1}. \quad (2)$$

Отметим, что при $s = s_1$ фазовая траектория системы, покидая данный аттрактор, попадает в центр информативного отрезка (точку x_c), а при больших s забрасывается все ближе к его левому краю, и если на левой половине информативного отрезка происходят аналогичные явления с аттрактором Γ_L , образуется общий аттрактор Γ_Σ , объединяющий Γ_R и Γ_L на обеих половинах информативного отрезка. Это устойчивый аттрактор, так как единственные каналы ухода траектории с Γ_R и Γ_L направлены в сторону друг друга. С ростом s он теряет устойчивость: при некотором $s=s_2$ возникает «дырка» $[x_1' x_2']$, где $f^m(x_1') = x_R'$ и $f^m(x_2') = x_c'$, и траектория покидает уже окрестность информативного отрезка, отправляясь блуждать по фазовому пространству (рис.2, г). Зависимость среднего времени T пребывания фазовой траектории на неустойчивом множестве Γ_Σ аналогична (1).

Проиллюстрируем эти качественные рассуждения анализом бифуркационных диаграмм для отображения с информационным блоком 375, записанным на первом уровне (рис.3). Алфавит - набор цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $N = 10$. Если фазовая траектория системы в момент бифуркации рождения циклов интервалов при $s = 1$ находилась на правой стороне информативных отрезков (относительно точек предельного цикла), она притягивается к интервальному циклу, проходящему через правую половину информативных

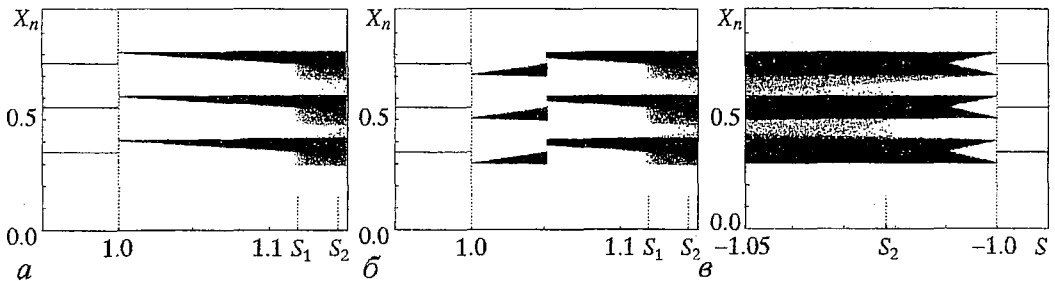


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма для отображения с информационным блоком 375, записанным на первом уровне: а - при $\mu = 1$ фазовая траектория притягивается к Γ_R ; б - при $\mu = 1$ фазовая траектория притягивается к Γ_L ; в - рождение удвоенного цикла интервалов при $\mu = -1$

отрезков («правый» аттрактор Γ_R). Показатель Ляпунова для этого аттрактора $\lambda \approx 0.3$. При увеличении s мера этого интервального цикла на отрезке $[0,1]$ увеличивается, и при $s_1 \approx 1.12$ аттрактор доходит до x_c - середины информативного отрезка. Это момент потери устойчивости «правого» цикла интервалов. При $s > 1.12$ через появившийся канал траектория покидает окрестность этого аттрактора. Однако, как следует из рис. 2, в, характер потери устойчивости таков, что фазовая траектория, покидая аттрактор на правой половине информативного отрезка, попадает на его левую половину. Если бы аттрактор на левом краю информативного отрезка («левый» аттрактор Γ_L) был в этот момент устойчивым, то траектория осталась бы на нем. Однако он потерял устойчивость раньше (при $s \approx 1.05$), поэтому после некоторого блуждания по нему траектория уходит обратно на «правый» аттрактор, и так далее.

Таким образом, при $s = s_1 \approx 1.12$ образуется общий хаотический аттрактор Γ_Σ периода 3, охватывающий все информативные отрезки. Этот аттрактор состоит из двух неустойчивых интервальных циклов Γ_R и Γ_L , однако единственный канал потери траектории для каждого из них направлен в сторону другого, так что любая траектория, попавшая в Γ_Σ , останется в нем.

С ростом s канал ухода на краю информативного отрезка «углубляется» (как на рис.2, г), и при $s = s_2 \approx 1.14$ общий аттрактор Γ_Σ теряет устойчивость, и траектория покидает его. Таким образом, при $s = s_2$ происходит бифуркация потери устойчивости Γ_Σ . Через s_2 будем далее обозначать момент потери устойчивости в отображении всех циклов интервалов. При больших s в системе наблюдается глобальный хаос.

На рис. 3, б изображена бифуркационная диаграмма для случая, когда фазовая траектория системы в момент бифуркации $s = 1$ находилась с левой стороны информативного отрезка относительно точки предельного цикла. В этом случае она притягивается к интервальному циклу Γ_L с показателем Ляпунова $\lambda \approx 0.2$. Однако его время жизни по параметру s существенно меньше: он теряет устойчивость уже при $s \approx 1.05$. При больших s траектория уходит с Γ_L к устойчивому Γ_R . Дальнейшие события совпадают с уже описанными для рис. 3, а.

Характер бифуркационных явлений при $\mu = -1$ (при $s = -1$ и нечетной длине информационного цикла) заметно отличается от рассмотренной: потеря устойчивости предельного цикла приводит к рождению удвоенного интервального цикла (см. рис. 3, в), так как для отображения $f^m: I \rightarrow I$ наклон отрезка, проходящего через неподвижную точку цикла x_c , становится равным $s^m = -1$, и при каждой итерации f^m края информативного отрезка меняются местами. Реальный период интервального цикла при этом получается не m , а $2m$. Вместо бифуркации слияния интервальных циклов с разных краев информативного отрезка с ростом $|s|$ здесь (при $s_1 \approx -1.009$) происходит заполнение всего информативного отрезка в результате расширения интервального цикла, что можно интерпретировать как обратную бифуркацию удвоения периода интервального цикла.

Если в динамической системе записаны несколько информационных блоков, то при переходе $|\mu|$ через 1 в окрестности каждого из соответствующих предельных циклов независимо рождаются либо два притягивающих цикла интервалов (при $\mu = 1$), либо удвоенный цикл интервалов ($\mu = -1$). Их эволюция с ростом s совпадает в общих чертах с описанной выше. Однако наклоны неинформативных участков, примыкающих к разным информативным отрезкам, различны, поэтому различаются «время жизни», и условия устойчивости по параметру s каждого из этих интервальных циклов. Это видно из рис. 4, на котором изображены бифуркационные диаграммы для отображения с двумя информационными блоками 12345 и 97583, записанными на втором уровне. Размер информативных участков

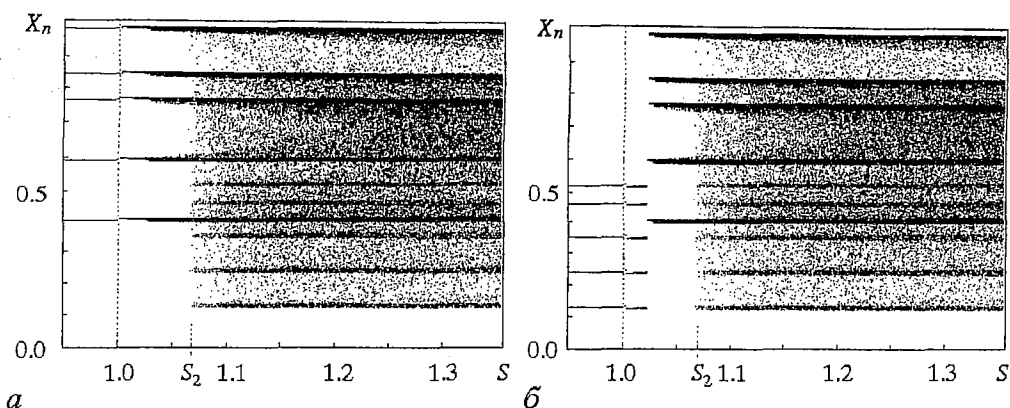


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма для отображения с информационными блоками 12345 и 97583, записанными на втором уровне. Начальные условия на цикле для: а - блока 97583; б - блока 12345

здесь в $N = 10$ раз меньше, чем в предыдущем случае и равен 0.01. На рис. 4, а изображена диаграмма для случая, когда при бифуркации потери устойчивости предельного цикла, несущего информационный блок 97583, фазовая траектория притягивается к правому интервальному циклу в окрестности этого информационного цикла. При $s \sim 1.03$ цикл интервалов на правой границе информативных отрезков теряет устойчивость и траектория уходит с него через «дырку», аналогичную $[x_1, x_2]$ с рис.2, в. Однако она уходит в сторону аттрактора на левой границе информативных отрезков. Если бы он был в этот момент устойчив, траектория там и осталась бы. Но ввиду того, что он обладает аналогичной неустойчивостью, траектория остается на нем некоторое время, и возвращается на первый аттрактор, и так далее. При этом наблюдается рождение общего интервального цикла, охватывающего целиком информативные отрезки цикла 97583.

На рис. 4, б изображен случай, когда во время бифуркации потери устойчивости предельного цикла точек, соответствующего информационному блоку 12345, траектория притягивается к новорожденному устойчивому циклу интервалов, проходящему через правый край информативных отрезков. Но он практически сразу же теряет устойчивость, и траектория уходит к интервальному циклу на другом краю информативных отрезков. При $s \sim 1.015$ рождается общий цикл интервалов $\Gamma_{5, \Sigma}$. В тот момент, когда и он теряет устойчивость при $s \sim 1.025$, еще существует устойчивый цикл интервалов, связанный с другим информационным блоком 97583, и фазовая траектория притягивается к нему.

При $s = s_2 \sim 1.07$ теряет устойчивость общий интервальный цикл для блока 97583, то есть в аттракторе появляется «дырка», через которую фазовая траектория может покидать его, как показано на рис.2, г. Таким образом, в фазовом пространстве динамической системы не остается устойчивых структур. При этом фазовая траектория системы начинает блуждать по фазовому пространству системы. В момент своего появления «дырки» на интервальных циклах малы, и траектория проводит большую часть времени в окрестности интервальных циклов, но с увеличением наклонов «дырки» растут, и инвариантная мера отображения становится более равномерной, что видно далее из раздела 4.

Таким образом, анализ бифуркационных диаграмм отображения с записанной информацией показывает, что при $|s| < 1$ единственными устойчивыми аттракторами в колебательной системе являются информационные предельные циклы, а при $1 < |s| < s_2$ - соответствующие им хаотические интервальные циклы. При $|s| > s_2$ в нелинейной динамической системе наблюдается переход к глобальному хаосу через перемежаемость «неустойчивые циклы интервалов - глобальный хаос».

3. Запись информации на хаотических аттракторах

В этом разделе рассматривается возможность использования хаотических аттракторов типа циклов интервалов для записи информации.

Как следует из анализа бифуркационных диаграмм, циклы интервалов имеют довольно широкую область существования по параметру s . Несмотря на то, что движение по такому аттрактору является хаотическим, он устойчив и ограничен в фазовом пространстве. Интервальный цикл состоит из конечного числа непрерывных интервалов, включающих в себя информативные интервалы соответствующего информационного цикла (или их часть) и небольшую часть примыкающих к ним неинформативных интервалов. Важно также, что порядок обхода интервалов этого хаотического аттрактора совпадает с порядком обхода находящихся на них точек информационного предельного цикла. Поэтому, если рассмотреть информационный поток $a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots$, где $a_i = \text{int}(Nx_i)$ ($\text{int}(x)$ - целая часть x), порождаемый отображением $x_{n+1} = f(x_n)$, при движении на этом хаотическом аттракторе, то окажется, что он представляет собой воспроизведение записанного информационного блока.

Согласно алгоритму записи информации в одномерных отображениях [1, 2], для воспроизведения элемента информационного блока достаточно попадания траектории x_n на соответствующий регион первого уровня отображения. Как видно из распределения фазовой траектории, например, при записи блока 375 (рис. 5, а), это условие может не выполняться при записи на первом уровне из-за того, что интервальный цикл включает в себя часть неинформативных интервалов, однако это препятствие легко может быть обойдено за счет уменьшения длины информативного интервала.

Таким образом, информация, записанная на устойчивых предельных циклах одномерного отображения при $|s| < 1$, не теряется в момент бифуркации рождения соответствующего хаотического аттрактора, а обретает качественно новый носитель, и может быть извлечена так же, как и при записи на устойчивых предельных циклах точек. Поэтому, класс динамических объектов - носителей

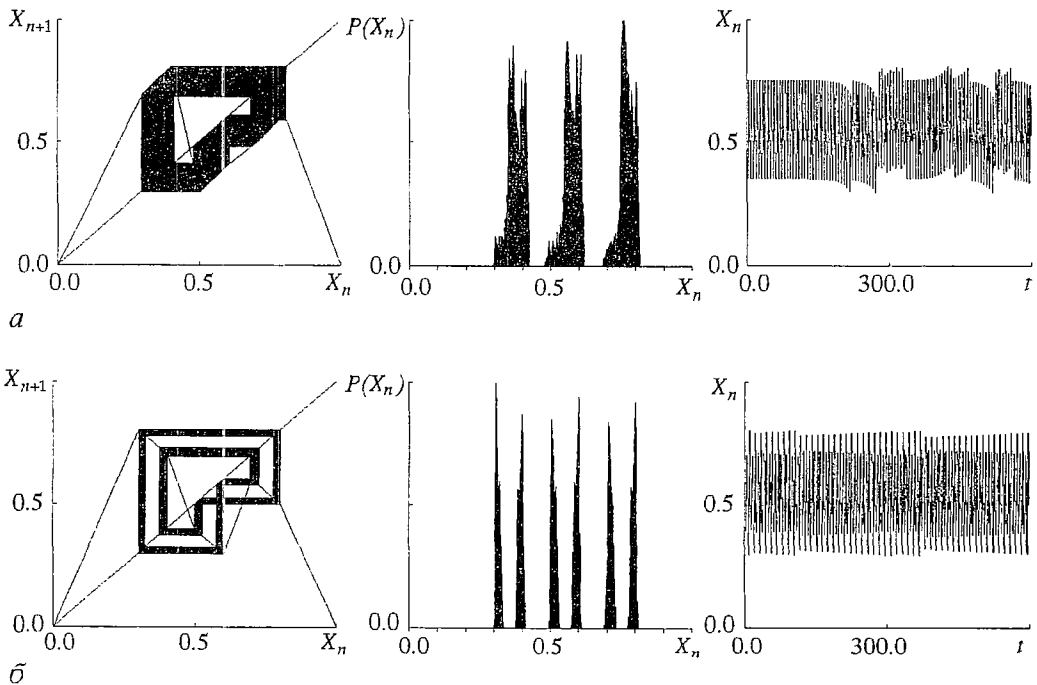


Рис. 5. Запись информации на хаотических аттракторах - фазовые портреты, распределения и временные реализации: а - $s = 1.125$; б - $s = -1.005$

информации для метода записи в одномерных динамических системах, предложенного в [1, 2], может быть расширен за счет хаотических аттракторов. При этом увеличивается и область параметра s , используемая для записи информации на устойчивых аттракторах.

На рис. 5 приведены примеры использования хаотических аттракторов - интервальных циклов для записи информации. На рисунке приведены фазовые портреты, инвариантные меры (распределение фазовой траектории на отрезке $[0,1]$) и временные реализации движений в отображении для случая записи информационного блока 375 на первом уровне.

При $s < 0$ и нечетном периоде информационного цикла, как указывалось в предыдущем разделе, интервальный цикл рождается удвоенным, что хорошо видно на фазовом портрете на рис.5, б, но соответствующий информационный поток, тем не менее, тоже представляет собой повторение записанного информационного блока, поскольку последовательные значения переменной итерирования при движении на этом аттракторе укладываются в регионы 1-го уровня, соответствующие цифрам 3, 5 и 7.

4. Перемежаемость как средство хаотического сканирования памяти

Анализ бифуркационных диаграмм одномерных отображений с записанной информацией показывает, что после потери устойчивости всех циклов интервалов в динамической системе реализуется режим перемежаемости «хаос-хаос». При этом фазовая траектория хаотически блуждает по всему фазовому пространству, посещая и области с записанной информацией. Если эту динамическую систему рассматривать как память, то такой режим может быть использован для хаотического сканирования памяти.

Запишем информацию на неустойчивых циклах интервалов, используя область параметра $s > s_2$. Если наклон информативных участков ненамного больше s_2 , траектория будет «застревать» в окрестности интервального цикла на некоторое время, прежде чем покинуть его снова, так как вероятность ухода с него мала согласно (1). Если инвариантная мера отображения ненулевая на всем единичном отрезке (или, по крайней мере, в окрестности информативных интервалов), траектория посещает окрестности всех циклов интервалов (а значит, и информативных предельных циклов), и наблюдается перемежаемость по отношению ко всем циклам, соответствующим записанной информации. Важно подчеркнуть, что в отличие от хорошо известного феномена перемежаемости, когда ламинарные (регулярные) участки движения прерываются турбулентными всплесками, здесь наблюдается перемежаемость между хаотическими циклами интервалов и глобальным хаосом - движение на хаотическом аттракторе (интервальном цикле) перемежается блужданием по всему фазовому пространству.

Если наклоны информативных участков s слишком велики, траектории покидают окрестности неустойчивых интервальных циклов, соответствующих записанной информации, очень быстро, в информационном потоке присутствуют только «обрывки» записанных образов, и сканирование памяти не наблюдается.

Проиллюстрируем явление следующими примерами.

На рис. 6 приведен пример перемежаемости между двумя циклами, соответствующими информационным блокам 97583 и 12345, записанными на втором уровне. Бифуркационная диаграмма для этого отображения показана на рис. 4. Наклон информативных участков выбран в области перемежаемости $s = 1.14 > s_2$. В этом случае система «блуждает» по окрестностям двух циклов.

На рис.7 приведены графики инвариантной меры отображения для трех значений наклона s ($s \approx s_2 \approx 1.07$, $s = 1.15$ и $s = 2.0$) в области перемежаемости. Из рисунка видно, что инвариантная мера ненулевая всюду в информативной части

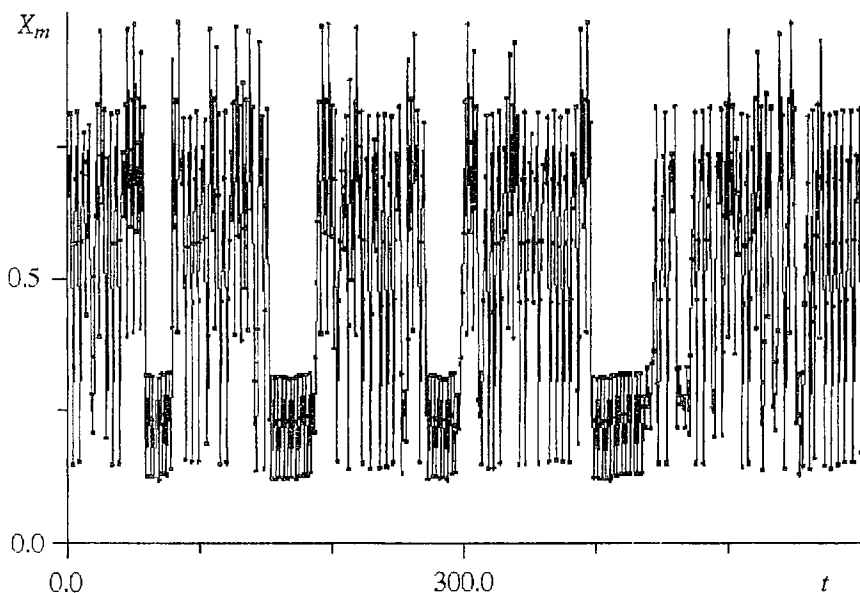


Рис. 6. Перемежаемость в отображении с информационными блоками 12345 и 97583

отображения, причем при $s \approx s_2$ на ней видны несколько узких пиков, а пьедестал очень мал, что объясняется тем, что фазовая траектория большую часть времени проводит в окрестности информационных циклов (см. формулы (1) и (2)), с увеличением s она становится более равномерной.

Рассмотрим более сложный пример хаотического сканирования памяти на примере записи на одномерном отображении шести русских пословиц:

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.
 ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.
 БЕЗ ТРУДА НЕ ВЫНЕШЬ И РЫБКУ ИЗ ПРУДА.
 ПОД ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДА НЕ ТЕЧЕТ.
 НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.
 НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

Каждая пословица представляется в отображении отдельным предельным циклом. Запись произведена на втором уровне с предварительным кодированием-сжатием информации, согласно алгоритму [5, 6]. Область перемежаемости начинается здесь при $s = s_2 \approx 1.03$. Информационный поток, порождаемый этой динамической системой в области перемежаемости ($s = 1.05$) выглядит следующим образом:

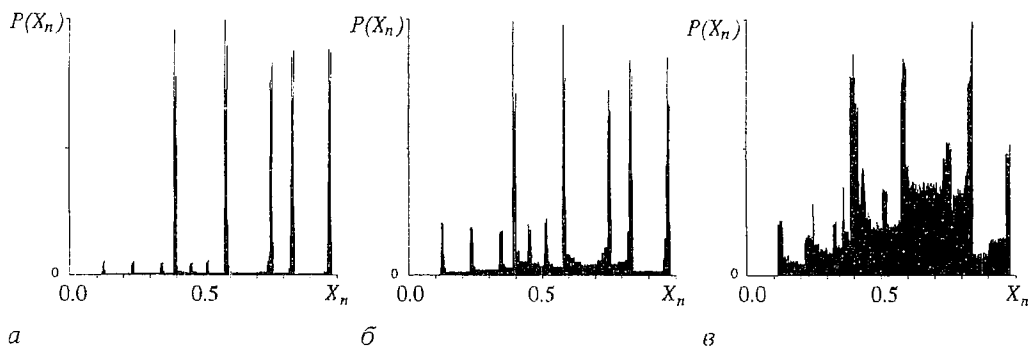


Рис. 7. Распределение фазовой траектории для разных значений наклона s в области перемежаемости: а - $s = 1.07$; б - $s = 1.15$; в - $s = 2.00$

ГОНЕ Г, ЛЮБГОМУ, САМ В НЕЕ-ЧЕОЯЛЮБИ НЕЮАТ, РУНЕ ОТЬРУДАГОЫ
ЧЙЧЕООЧЕНЪГ ДЕЗ ЮКУНЕ. „ЛЮБ. ЗОХ-Ы ЯЛЮБИ НЕЪ ДЕРУДАГО
РУЛЮБ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЯ ЛЮБГОЛЮБИ НЕС В.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САДИСЬ З Ъ, СЪФ. УДГОАТРУУЛЮТЬ.

Ф ДЕОЛТЛЮБИ. ЯНЕ

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДХЪРУДАГОНЕ ЖГНЕ ЧЕНПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯЛЮ, З ЧЕНС И ОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИНЕЧЕНЬНЕ ДЕРУДГОНЕ КНЕ „ЛЮБИ НЕРЫГЪВАТЭ, МУ

УАТЕЧЕМУЧЕН ДЧЙКУ И. „МУ ДО СДЧИЫЛС ВОЗИГОТЪАТЯРУУАТ

ЛЮБ. РУТЬ. ЧИЯ СЛЮ, РУДАГО И- ПЕЧЕЛЮБ.

НЕ ПОРЫ- ДЕЛРЫ

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ОХШЖДЧЙМУ ЪХ, ОД, РУГОМУ,

САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ Д-

ПЮ СПЛЮБ.

ДОРУДАГОО НЕ ВЫНЕСЬНЬРУДГОЛЮБГОУМУ, ЧИМЫ- УЛЮТЬ ДЕ-

ЧЕХЫ, МУ, ЮНЬРУГОЛЮТЬ, ПАТЗ ЧЙНЬ ДЕ, МУ П. РРЫЛМЪГ Х. ЯЛЮБ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ РУДАГО, МУ. ЭНЬЛЮТЬЛЮ, РУДГО ВЭ ВГОЪВХЪ-

ЩЕМЧИЮАТ ДЕЛРЫЧЕНЧЙ ИЗ ПРУДА.

ВСЬЛЮТЬРУДАГОГО ВСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЭГОХШЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВЩДЫБАТНЕ ВЯЛЮБГО-

КУШЬЧЕОУЛЮБГОАТЛЮБ.

РУРУДАГО, ЕЧЕ- ДЕ САДИСЬ.

НЕ В СВОИ САНИ НЕ САНОЦПРЫЧЙПГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ НЕЧЕГО.

СКУЧЕН ДЕНЬ ДО ВЕЧЕРА, КОЛИ ДЕЛАТЬ О, РУДГО СРУДА.

Н- ДЕЛЮБИ. ШИРЬ.

ХЪОД НЕ КЮАТЧЕОНЧЕОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДЕШЬ.

НЕ РОЙ ЯМУ ДРУГОМУ, САМ В НЕЕ ПОПАДОХ, ЛЮБИ НЕЖБРЫГРУД-

ГОГОНЕ МЦТТЛЮБИ НЕЪГЮКУАМРЫЖГЯЛЮБГОГО, АТ. Э ВЕ-

ЧЕ. ЪВЛЮБ. ИТЛЮБ.

ЧЕБРУРУТЬОД ЛЮБИ НЕ С, ИЧИЫГЪ ДЕ СТЬГОЛЮБИШЬНЕЗ ФЧЕО-

ЛАТЬ Н ДЕНЬ ДРЩЕЗКГО С

УЛЮБГО ВНЬ Д. Д. ДЕ. ЛЮБ.

ЗИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И САНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ КАТАТЬСЯ, ЛЮБИ И ТАНОЧКИ ВОЗИТЬ.

ЛЮБИШЬ ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДА НЕ ТЕЧЕТ.

ПОД ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДА НЕ ТЕЧЕТ.

ПОД ЛЕЖАЧИЙ КАМЕНЬ ВОДВРЬХШДТ С НЕ САДИЦК Д,

Анализ этого фрагмента информационного потока, представляющего, по сути, дискретизированную временную реализацию позволяет судить о динамике системы при данном параметре s . Например, здесь отчетливо различаются «хаотические» участки информационного потока, отвечающие срыву фазовой траектории с цикла и движению по фазовому пространству, и «регулярные» участки, воспроизводящие записанные пословицы и отвечающие пребыванию траектории в окрестности предельных циклов. При увеличении параметра s длина «регулярных» участков быстро уменьшается, и начиная с $s \approx 1.20$ в информационном потоке уже не встречаются пословицы целиком, а только их «обрывки».

Выводы

В работе исследована динамика отображения с записанной информацией, сконструированного согласно принципу записи, впервые предложенному в [1]. Исследованы аттракторы, существующие в системе при записи информации на устойчивых и неустойчивых предельных циклах. Для этого изучались бифуркационные явления в отображении с записанной информацией, возникающие при изменении параметра s - наклона информативных отрезков отображения, определяющего устойчивость информационных предельных циклов. Анализ бифуркационных диаграмм показал, что потеря устойчивости предельных циклов при переходе параметра $|s|$ через 1 сопровождается рождением хаотических аттракторов типа циклов интервалов.

Показано, что описанный в первом разделе принцип использования динамических аттракторов для записи информации может быть обобщен на класс хаотических аттракторов типа циклов интервалов. На простых примерах продемонстрирована возможность записи информации на хаотических интервальных циклах.

Существование хаотических циклов интервалов - носителей информации, помимо познавательной ценности, позволяет использовать явление перемежаемости «хаос-хаос» в отображениях с записанной информацией для хаотического сканирования памяти.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант 93-012-730).

Библиографический список

1. *Дмитриев А.С.* Запись и распознавание информации в одномерных динамических системах // РЭ. 1991. Т. 36, вып. 1. С. 101.
2. *Dmitriev A.S., Panas A.I., and Starkov S.O.* Storing and recognition information based on stable cycles of one-dimensional map // Phys. Lett. A. 1991. Vol. 155, № 8-9. P. 494.
3. *Andreyev Yu.V., Belsky Yu.L., Dmitriev A.S.* Information processing in nonlinear systems with dynamic chaos // Proc. Int. Seminar Nonlinear Circuits and Systems. Moscow 1992. Vol. 1. P. 51.
4. *Дмитриев А.С.* Хаос и обработка информации в нелинейных динамических системах // РЭ. 1993. Т. 38, вып. 1. С. 1.
5. *Andreyev Yu.V., Dmitriev A.S., Chua L.O., Wu C.W.* Associative and random access memory using one-dimensional maps // Int. J. Bif. and Chaos. 1992. Vol. 2, № 3. P. 483.
6. *Андреев Ю.В., Дмитриев А.С.* Запись и восстановление изображений в одномерных динамических системах // РЭ. 1994. Т. 39, вып. 1. С. 104.
7. *Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М.* Аттракторы кусочно-линейных отображений прямой и плоскости. Препринт / Ин-т Математики АН Украины. Киев, 1992.

8. Майстренко В.Л., Майстренко Ю.Л., Сушко И.М. Бифуркационные явления в генераторах с линиями задержки. // РЭ. 1994. Т.39, вып. 8-9. С. 1367.

9. Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. Critical exponent of chaotic transients in non-linear dynamic systems // Phys. Rev. Lett. 1986. Vol. 57. P. 1284.

Институт радиоэлектроники
РАН

Поступила в редакцию 20.02.95
после переработки 22.09.95

ATTRACTORS AND BIFURCATION PHENOMENA IN 1-D DYNAMIC SYSTEMS WITH STORED INFORMATION

Yu.V. Andreyev

Bifurcation phenomena taking place in the maps with stored information are studied as a function of the slope of information districts of the maps, thus allowing to distinguish the following dynamic structures existing in such systems: stable or unstable limit cycles, chaotic attractors of the kind of cycles of intervals. A possibility of storing information using chaotic attractors is analyzed, chaotic scanning of memory with the use of intermittency is discussed.



Андреев Юрий Вениаминович - родился в 1960 году в Уфе. Окончил МФТИ (1983). Защитил диссертацию на звание кандидата физико-математических наук (1993). Работает научным сотрудником в ИРЭ РАН. Научные интересы - нелинейная динамика, обработка информации с использованием методов хаотической динамики, проблемы связи. Опубликовал более 15 работ по данной тематике.