



САМООРГАНИЗАЦИЯ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВЯЗАННЫХ АВТОСТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Э.В. Кальянов

Численными методами исследованы три модели связанных автостохастических автоколебательных систем, описываемых уравнениями с запаздыванием. Показана возможность самоорганизации колебаний при определенных величинах связи между генераторами. Математическим образом самоорганизации является предельный цикл. Механизм самоорганизации хаотических колебаний в связанных автостохастических системах рассмотрен с позиций явления взаимной синхронизации генераторов.

Введение

Процессы самоорганизации исследуются многими авторами в различных областях науки, изучающих нелинейные взаимодействия в сложных системах [1-7]. Эти процессы проявляются разнообразно, в связи с чем самоорганизация имеет несколько математических образов [8]. При взаимодействии связанных систем со странными аттракторами возможна дестохастизация с возникновением одно- или многотактных колебаний [9] и в этом случае образ самоорганизации представляется в виде предельного цикла. Образование регулярных структур с простыми или сложными предельными циклами при взаимодействии хаотических колебаний представляет интерес и мало изучено [9]. В настоящей работе рассматривается формирование детерминированных колебаний с образом самоорганизации в виде предельного цикла при взаимодействии связанных автостохастических автоколебательных систем. Численными методами исследуются процессы дестохастизации в трех математических моделях автоколебательных систем с запаздыванием, обладающих хаотической динамикой.

1. Математические модели

Достаточно общие уравнения для связанных автоколебательных систем с запаздыванием и инерционностью, обеспечивающих режимы хаотических колебаний, можно аналогично [9] записать в виде

$$\begin{cases} \ddot{x}_i + (\omega_i/Q_i)\dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = (\omega_i^2/\sigma_i) dF_i(y_i)/dt + \omega_i^2 \sum_{j \neq i} C_{ji} \varphi_j(x_j(t - T_{ji})), \\ \delta_i \dot{y}_i + y_i = x_i(t - \tau_i) + \sum_{j \neq i} D_{ji} \psi_j(y_j(t - T_{ji})), \end{cases} \quad (1)$$

где каждый парциальный генератор состоит из замкнутых в кольцо нелинейного элемента, фильтра первого порядка, линии задержки, фильтра второго порядка и дифференцирующего элемента. В этих уравнениях $i, j = 1, 2, 3 \dots k$; ω_i, Q_i - собственная частота и добротность фильтра второго порядка i -го парциального генератора; σ_i, δ_i - постоянные времени дифференцирующего элемента и фильтра первого порядка; τ_i - запаздывание в цепи обратной связи i -го генератора; C_{ji}, D_{ji} - коэффициенты связи; $\varphi_j(x_j(t - T_{ji})), \psi_j(y_j(t - T_{ji}))$ - функции, определяющие тип связи генераторов с учетом запаздывания в элементах связи; $F_i(y_i)$ - характеристика нелинейного элемента i -го генератора.

Ниже рассматриваются три математические модели связанных автоколебательных систем, получающихся из (1) при характеристике нелинейного элемента в виде унимодальной функции [10]

$$F_i(y_i) = G_i y_i / (1 + y_i^n), \quad (2)$$

где G_i, n - постоянные коэффициенты.

При условиях $D_{ji} = 0, G_i = \sigma_i B_i$ уравнения (1) с учетом (2) преобразуются к следующему виду (первая модель):

$$\ddot{x}_i + (\omega_i / Q_i) \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \omega_i^2 \{ [B_i [1 + y_i^n (1 - n)] [x_i(t - \tau_i) - y_i] / (1 + y_i^n)^2 \delta_i + \sum_{j \neq i} C_{ji} x_j(t - T_{ji}) \}, \quad (3)$$

$$\delta_i \dot{y}_i + y_i = x_i(t - \tau_i).$$

Подобные уравнения, но при резистивной связи без запаздывания по связи рассматривались в [9]; обнаружено явление самоорганизации при взаимодействии связанных систем при хаотических автоколебаниях в каждом генераторе в отдельности.

При отсутствии фильтра второго порядка и дифференцирующего элемента уравнения (1) с учетом соотношения (2) и условий $C_{ji} = 0, \gamma_i = (1/\delta_i), G_i = \delta_i B_i, D_{ji} = \delta_i D_{ji}^0$ принимают вид (вторая модель)

$$\dot{y}_i + \gamma_i y_i = B_i [y_i(t - \tau_i) / (1 + [y_i(t - \tau_i)]^n)] + \sum_{j \neq i} D_{ji}^0 y_j(t - T_{ji}). \quad (4)$$

Этими уравнениями может быть описано изменение продукции на душу населения в i -м регионе, если параметром γ_i определять исчезновение продукции за счет потребления в i -м регионе и обмена с другими (j -ми) регионами, параметром D_{ji} - связь между регионами, а первым членом в правой части - воспроизводство продукции. В этом случае τ_i - запаздывание производства продукции в ответ на спрос, T_{ji} - задержка в обмене продукцией между регионами. При $D_{ji} = 0$ система уравнений (4) превращается в известное уравнение Мэки - Гласса, которым описывается воспроизводство крови в организме человека [10].

Уравнениями (4) может моделироваться также система связанных генераторов широкополосного шума, так как уравнение Мэки - Гласса отличается от модели генератора шума (шумотрона) [11] лишь характеристикой нелинейного элемента. К тому же, при значении коэффициента, определяющего степень нелинейности, равном $n = 4$, характеристика, описываемая соотношением (2), практически не отличается от используемой в [11] при описании генератора шума

$$F(y) = M y \exp(-y^2),$$

если $M = 1.5G$ (естественно, полагая, что $G_i = G, F_i = F, y_i = y$).

При отсутствии фильтра первого порядка и дифференцирующего элемента уравнения (1) при условии (2) принимают вид (третья модель)

$$\ddot{x}_i + (\omega_i / Q_i) \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \omega_i^2 \{ [G_i x_i(t - \tau_i) / (1 + (x_i(t - \tau_i))^n)] + \sum_{j \neq i} C_{ji} x_j(t - T_{ji}) \}. \quad (5)$$

Этими уравнениями может моделироваться система связанных между собой генераторов с запаздыванием (например, ЛБВО-генераторов), каждый из которых содержит в своей цепи обратной связи избирательный фильтр. При малых добротностях фильтра в каждом парциальном генераторе возможны хаотические автономные автоколебания при соответствующем выборе остальных параметров.

При отсутствии запаздывания в цепях обратной связи и фильтра первого порядка уравнения (3) преобразуются в систему, описывающую связанные между собой генераторы детерминированных колебаний, которые в зависимости от степени нелинейности генерируют автономно либо квазигармонические (при слабой нелинейности), либо релаксационные (при сильной нелинейности) колебания. В этом случае будем иметь

$$\ddot{x}_i + \omega_i/Q_i \{1 + \omega_i Q_i B_i [(n-1)x_i^n - 1]/(1+x_i^n)^2\} \dot{x}_i + \omega_i^2 x_i = \sum_{j \neq i} C_{ji} x_j (t - T_{ji}). \quad (6)$$

При нелинейности кубического типа уравнения (6) превращаются в систему связанных уравнений Ван-дер-Поля.

2. Результаты численного анализа

Системы дифференциальных уравнений (3), (4), (5) решались методом Рунге - Кутты - Мерсона 4-го порядка с шагом численного интегрирования по времени, равным 0.025 (в случае первой и третьей моделей) и 0.0125 (в случае второй модели). Начальные условия для колебательных переменных выбирались равными 0.1.

Для анализа процессов самоорганизации колебаний использовались в основном бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных значений колебательных процессов при адиабатическом увеличении (или уменьшении) интересующего параметра. Бифуркационные диаграммы представляются в рассматриваемых случаях наиболее информативными иллюстрациями изменения характера колебаний.

В *первой модели* двух связанных автостохастических автоколебательных систем, описываемых уравнениями (3) при $k = 2$, процесс самоорганизации иллюстрируется рис. 1-3. На рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных отклонений колебательного процесса $x_1(t)$ в зависимости от параметра связи (при $C_{21} = C_{12} = C$) при его увеличении и уменьшении. При этом параметры каждого генератора выбраны так, что автономно колебания хаотичны.

Видно, что при увеличении параметра связи происходит переход хаотических колебаний, отражаемых случайным разбросом максимальных значений колебательного процесса, в детерминированные, когда изменение максимальных значений колебательного процесса становится закономерным. Режим детерминированных колебаний имеет место при $C > 0.18$. В интервале значений параметра связи $C \in (0.244; 0.27)$ колебания являются трехтактными, а в

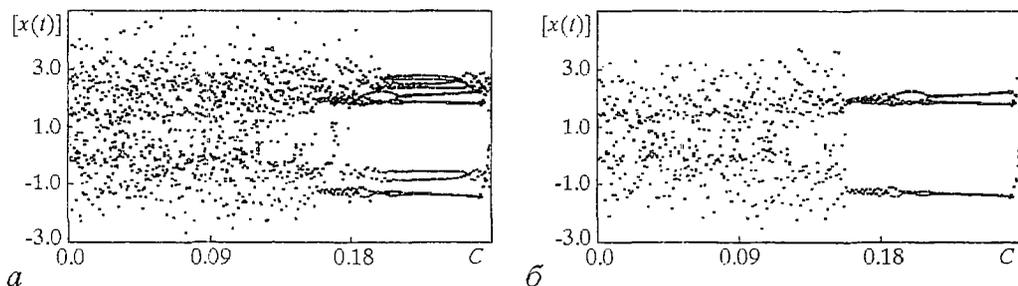


Рис. 1. Бифуркационные диаграммы при взаимодействии автостохастических систем в случае первой модели при увеличении параметра связи (а) и при его уменьшении (б); $B_1=B_2=4$, $Q_1=Q_2=4$, $n=6$, $\tau_1=\tau_2=\tau=T_{12}=T_{21}=2$, $\omega_1=1$, $\omega_2=1.01$, $\delta_1=\delta_2=0.1$

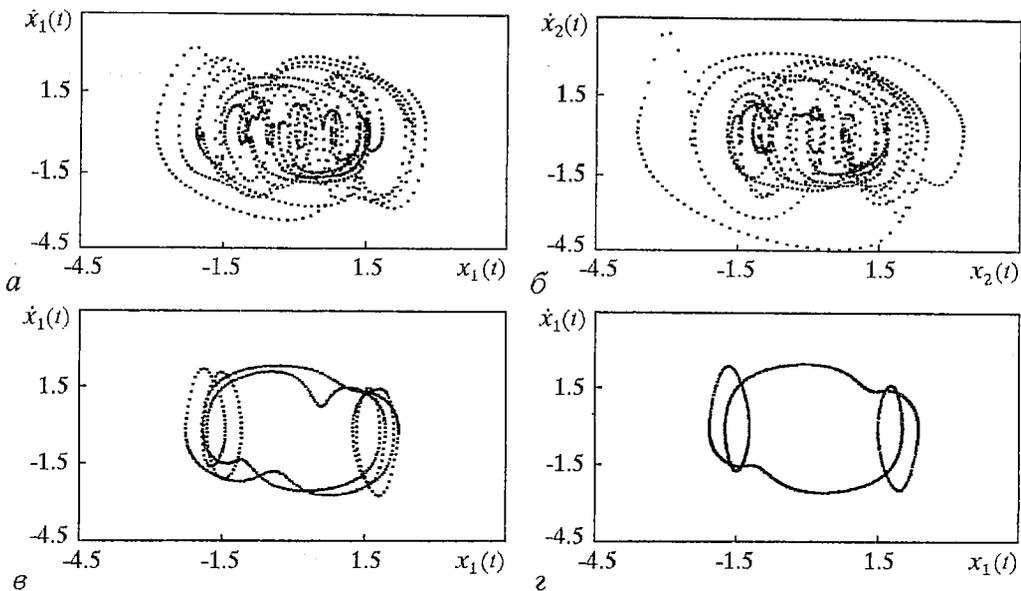


Рис. 2. Аттракторы автоколебаний в случае первой модели при автономных колебаниях (а, б) и при наличии связи (в, г): а, б - $C = 0$; в - $C = 0.2$; г - $C = 0.25$

интервале $C \in (0.18; 0.244)$ структура колебаний более сложная. При уменьшении параметра связи от 0.27 до 0 изменение максимальных значений колебательного процесса $x_1(t)$ отличается от приведенного на рис. 1, а: проявляется гистерезис, и минимальное значение параметра связи, соответствующее детерминированным колебаниям, снижается до величины $C = 0.158$. Характерно, что область трехтактных колебаний, как и при увеличении параметра связи, находится при больших его величинах (в интервале $C \in (0.214; 0.262)$).

Максимальные значения колебательного процесса во втором генераторе $[x_2(t)]$ принимают регулярный характер при тех же величинах параметра связи, что и $[x_1(t)]$ как при увеличении C , так и при его уменьшении. При этом структура колебаний та же.

Более наглядно, но лишь при трех характерных значениях параметра связи, колебания $x_1(t)$ и $x_2(t)$ иллюстрируются фазовыми портретами, представленными на рис. 2. Последние получены в интервале времени $t \in (450; 500)$. Фазовые портреты колебательного процесса $x_2(t)$ при $C = 0.2$ и при $C = 0.25$ не имеют заметных отличий от фазовых портретов, представленных соответственно на рис. 2, в и рис. 2, г. Видно, что автономно ($C = 0$) фазовые портреты обоих генераторов представляются «стохастическими аттракторами». При детерминированных режимах колебания являются трехтактными при $C = 0.25$ и шеститактными при $C = 0.2$. Анализ реализаций показал, что имеет место взаимная синхронизация детерминированных движений - колебания синфазны; при этом частоты взаимносинхронизированных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в случае $C = 0.25$ равны $\omega_1' = \omega_2' = 0.85$, а в случае $C = 0.2$ - $\omega_1' = \omega_2' = 0.42$.

Существенную роль при дестохастизации играет в рассматриваемой модели взаимная обратная связь. На рис. 3 приведены бифуркационные диаграммы, полученные для колебательного процесса $x_1(t)$ в режиме, отличающемся от иллюстрируемого рис. 1 лишь тем, что изменялось воздействие колебаний первого генератора на второй при постоянной величине параметра $C_{21} = 0.2$, определяющего воздействие колебаний второго генератора на колебания первого. Видно, что при увеличении параметра C_{12} в интервале его значений $C_{12} \in (0; 0.2)$ дестохастизация колебаний не наблюдается (рис. 3, а) несмотря на относительно большую величину параметра C_{21} . Аналогичная картина имеет место при уменьшении параметра C_{12} (рис. 3, б). Как при увеличении, так и при уменьшении

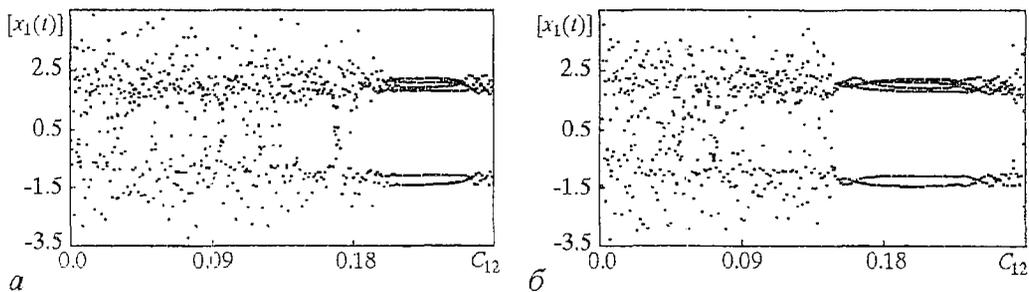


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы при взаимодействии автостохастических систем в случае постоянного воздействия второго генератора на первый при увеличении воздействия первого генератора на второй (а) и при его уменьшении (б)

параметра связи C_{12} в интервалах его изменения, соответствующих дестохастизации колебаний, возникают только шеститактные движения.

Следует отметить, что процессы дестохастизации в связанных генераторах, описываемых уравнениями (3), возникают далеко не при всех режимах, соответствующих автостохастическим автономным колебаниям. В приведенном случае взаимодействия автостохастических автоколебательных систем существенное значение имеет запаздывание по связи: при отсутствии запаздывания по связи ($T_{21} = T_{12} = 0$), а также в случаях, когда запаздывание имеется лишь в одной ветви связи ($T_{21} = 0, T_{12} = 2$ или $T_{21} = 2, T_{12} = 0$), процессы дестохастизации не наблюдались.

Во *второй модели* связанных автоколебательных систем с хаотической динамикой, описываемых уравнениями (4), рассматривались процессы дестохастизации также при параметрах, обеспечивающих стационарный хаос при автономной работе парциальных систем. Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая процесс самоорганизации хаотических автоколебаний, приведена на рис. 4. На нем показано изменение максимальных значений колебательного процесса $y_1(t)$ в зависимости от параметра связи D (при $D_{21}=D_{12}=D$) между двумя генераторами. Видно, что уже при слабой связи (при $D = 0.03$) имеет место «сгущение» точек, определяющих величины максимальных отклонений колебательного процесса $y_1(t)$, но границы «облака» точек расплывчаты. При дальнейшем увеличении параметра связи (при $D > 0.18$) «сгущение» точек принимает четкие очертания и колебания становятся детерминированными. Бифуркационная диаграмма для колебательного процесса $y_2(t)$ аналогична. Структура хаотических и регулярных колебаний, соответствующих режимам автономной работы парциальных автоколебательных систем и их взаимной синхронизации иллюстрируется рис. 5, на котором приведены аттракторы первого ($i = 1$) и второго ($i = 2$) генераторов в проекции на плоскость $y_i(t), y_i(t - \tau)$. Аттракторы рассчитаны в интервале времени $t \in (40; 90)$

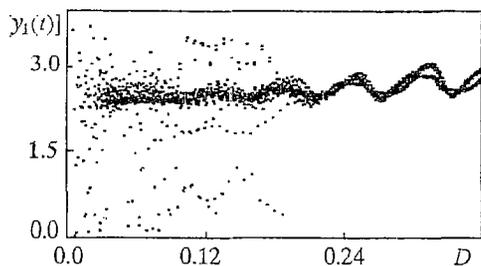


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма при взаимодействии двух автостохастических систем в случае второй модели: $n=6, B_1=B_2=20, \tau_1=\tau_2=T_{21}=T_{12}=8, \gamma_1=3, \gamma_2=3.2$

для колебательных процессов $y_1(t)$ (см. рис. 5, а, в) и $y_2(t)$ (см. рис. 5, б, г).

Возможность дестохастизации колебаний при взаимодействии большего числа ($k > 2$) автостохастических автоколебательных систем иллюстрируется рис. 6, 7. На рис. 6 приведена бифуркационная диаграмма изменения максимальных значений колебательного процесса $y_1(t)$ в зависимости от параметра связи при взаимодействии трех генераторов ($k = 3$). При этом $B_3=20, \gamma_3 = 2.8, \tau_3 = T_{32} = T_{23} = T_{31} = T_{13} = 8, D_{32} = D_{23} = D_{31} = D_{13} = D$, а остальные

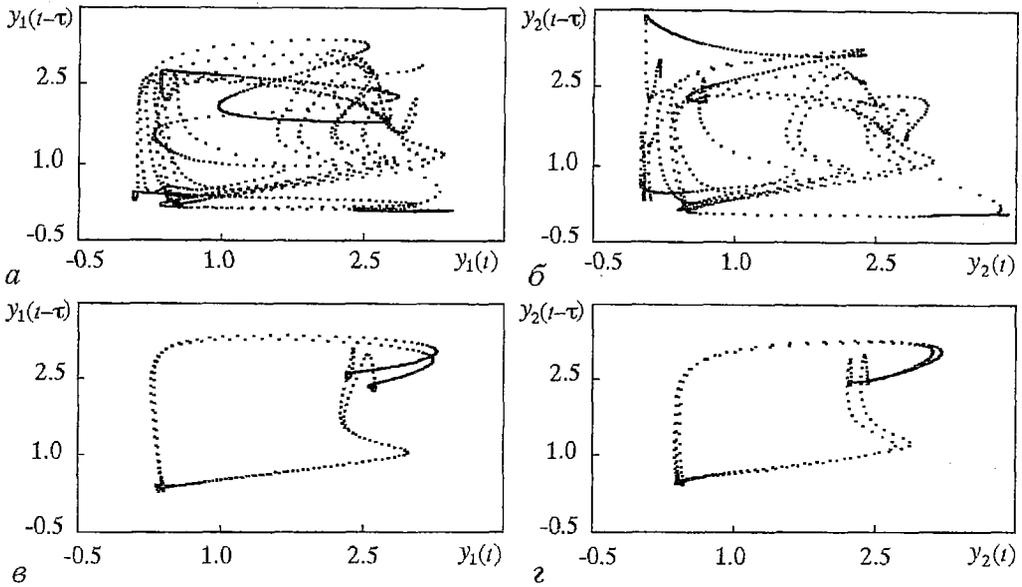


Рис. 5. Аттракторы автоколебаний при взаимодействии двух автостохастических систем в случае второй модели при автономных колебаниях (а, б) и при наличии связи (в, г): а, б - $D=0$; в, г - $D=0.36$

параметры те же, что и в случае рис. 4. Процесс самоорганизации подобен случаю взаимодействия двух автоколебательных систем: с увеличением параметра связи хаотический разброс точек, отображающих изменение максимальных значений колебательного процесса $y_1(t)$, уменьшается и границы «сгущения» точек становятся четко очерченными. В отличие от рис. 4 детерминированный режим самоорганизации имеет место при $D > 0.14$. На рис. 7 показаны аттракторы (в проекции на плоскость $y_1(t), y_1(t - \tau)$) колебательного процесса $y_1(t)$ в синхронном режиме и автоколебаний $y_3(t)$, полученные, как и в случае рис. 5, в интервале времени $t \in (40; 90)$. Аттракторы синхронных колебаний $y_2(t)$ и $y_3(t)$ не приведены, так как их структуры не имеют существенных отличий от структуры аттрактора, показанного на рис. 7, а.

В отличие от первой модели, в модели, описываемой уравнениями (4),

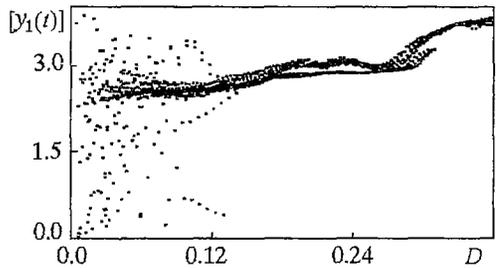


Рис. 6. Бифуркационная диаграмма при взаимодействии трех автостохастических систем в случае второй модели

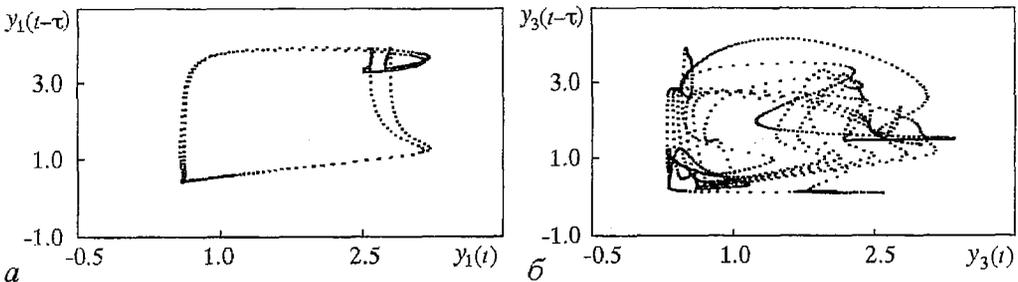


Рис. 7. Аттракторы автоколебаний при взаимодействии трех автостохастических систем в случае второй модели при наличии связи (а) и при автономных колебаниях (б): а - $D = 0.36$; б - $D = 0$

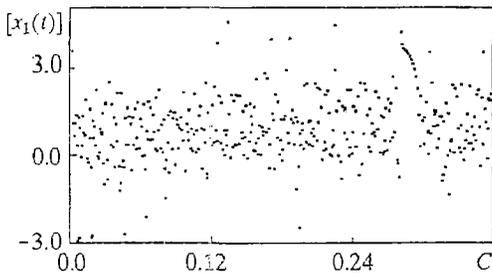


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма при взаимодействии автостохастических систем в случае третьей модели; $C_{21}=C_{12}=C$, $G_1=5$, $G_2=7$, $Q_1=Q_2=4$, $\omega_1=1$, $\omega_2=1.01$, $\tau_1=\tau_2=T_{21}=T_{12}=2$, $n=12$

сохранялись хаотические движения в случаях $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 1.01$. Процесс самоорганизации при $k = 2$ иллюстрируется бифуркационной диаграммой изменения максимальных значений колебаний $x_1(t)$ в зависимости от параметра связи C (рис. 8). Как видно, режим хаотических колебаний нарушается в относительно узком интервале изменения параметра связи $C \in (0.26; 0.31)$. Бифуркационная диаграмма изменения $[x_2(t)]$ в зависимости от C (на рис. 8 не показана) имеет аналогичный вид.

Механизм перехода к детерминированным колебаниям в рассмотренных моделях связанных автостохастических автоколебательных систем представляется одинаковым. В каждом генераторе, в силу большого числа степеней свободы, имеется возможность одновременного возбуждения многих колебаний на различных парциальных частотах, и при их возбуждении на нескольких частотах в случае отсутствия синхронизма с взаимным захватом на комбинационных частотах происходит асинхронное взаимодействие колебаний. В этом случае автоколебания в многомодовой системе не выходят на предельный цикл, и происходит случайным образом переход траектории движения с одного аттрактора на другой. При этом не только не устанавливаются колебания определенной частоты, но и изменяются условия возбуждения парциальных колебаний (мод), для которых потенциально возможность возбуждения существует. Поэтому одни парциальные колебания могут гаситься в процессе взаимодействия, уступая возбуждению других, так что может меняться число взаимодействующих парциальных колебаний. При вводе связи между автостохастическими генераторами, в которых происходят подобные процессы, взаимное влияние динамического хаоса приводит к тому, что при некоторой величине связи система выходит на предельный цикл - происходит стимулирование взаимной синхронизации аналогично стимулированию детерминированных движений в многомодовой автостохастической системе при воздействии внешних хаотических колебаний [12]. Взаимное воздействие колебаний может создавать «преимущественные» условия для генерации определенных мод подобно тому, как они создаются при воздействии внешнего шума [12, 13] или, что более очевидно, при воздействии внешнего гармонического сигнала с частотой «подвозбуждаемых» колебаний [13]. Внешний сигнал, как известно, может стимулировать возбуждение новых мод, которые не возбуждаются автономно, но сохраняются при стимулировании их возбуждения (при «подвозбуждении») даже после прекращения внешнего воздействия. Подобное создание «преимущественных» условий генерации для определенных мод возможно и при воздействии одиночного импульса [14]. При этом менее эффективным, как это на первый взгляд ни парадоксально, может быть более длительное воздействие. Для осуществления «подвозбуждения» важно, чтобы в момент окончания воздействия местоположение изображающей точки фазовой траектории находилось в бассейне притяжения аттрактора «подвозбуждаемых»

процессы самоорганизации наблюдались и при отсутствии запаздывания по связи ($T_{ji} = 0$), как в случае двух, так и в случае трех связанных автоколебательных автостохастических систем.

В *третьей модели* связанных автоколебательных систем также использовались параметры, при которых каждый генератор автономно устойчиво (при относительно широком варьировании параметров) работал в хаотическом режиме. Так, при $Q_i = 4$, $\tau_i = 2$, $n = 12$ при изменении параметра усиления в интервале $G_i \in (3.6; 20)$

колебаний [14]. Аналогичные, но более сложные (из-за взаимного влияния колебаний) процессы, можно полагать, имеют место при взаимодействии хаотических колебаний рассматриваемых автостохастических систем. Для лучшего понимания механизма образования детерминированных структур при взаимодействии хаотических колебаний необходимы дальнейшие исследования связанных автостохастических систем.

Заключение

В рассмотренных моделях связанных автостохастических автоколебательных систем наблюдаются процессы самоорганизации, математическим образом которой является предельный цикл. Таким образом, несмотря на увеличение размерности связанной системы возможен переход к существенно более простым движениям, возникающим в результате взаимного стимулирования взаимносинхронизированных колебаний. Области самоорганизации по изменяемому параметру совпадают в колебательных процессах парциальных генераторов. При этом проявляется влияние направления изменения параметра.

Библиографический список

1. *Жаботинский А.М.* Концентрационные колебания. М: Наука, 1974.
2. *Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978.
3. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979.
4. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980.
5. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985.
6. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. М.: Мир, 1990.
7. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.
8. *Рабинович М.М., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1984.
9. *Кальянов Э.В.* Самоорганизация в системе двух связанных автостохастических генераторов // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, вып. 2. С. 44.
10. *Гласс Л., Мэки М.* От часов к хаосу: ритмы жизни. М.: Мир, 1991.
11. *Кислов В.Я.* Теоретический анализ шумовых колебаний в электронно-волновых системах // РЭ. 1980. Т. 25, № 8. С. 1683.
12. *Кальянов Э.В., Старков С.О.* Воздействие внешнего шумового сигнала на автоколебательные системы с инерционностью и запаздыванием // РЭ. 1994. Т. 39, № 4. С. 642.
13. *Кальянов Э.В., Кислов А.В.* Бифуркации в генераторе с запаздыванием, стимулированные внешним воздействием // РЭ. 1993. Т. 38, № 9. С. 1619.
14. *Кальянов Э.В., Старков С.О.* О возможности управления колебательными режимами с помощью одиночных радиоимпульсов // Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18, № 23. С. 49.

*Институт радиотехники и
электроники РАН*

*Поступила в редакцию 4.10.94
после переработки 3.02.95*

SELFORGANISATION WITH INTERACTION OF THE COUPLING AUTOSTOCHASTIC AUTOOSCILLATION SYSTEMS

E.V. Kalyanov

Three models of coupled autostochastic autooscillation systems, described by the equations with delay, are studied by computer methods. At the definite value of connection between generators the possibility of the selforganization of oscillations is shown. The limited cycle is the mathematical image of selforganization. From the position of phenomenon of the mutual synchronization of generators the selforganization mechanism of the chaotic oscillations in connected autostochastic systems is considered.



Кальянов Эраст Васильевич родился в 1930 году Саратове, окончил Ленинградский государственный университет, физический факультет (1953). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЛГУ (1957) в области радиопизика и электроника. Работает в Институте радиотехники и электроники РАН. Соавтор монографии «Многочастотные режимы в приборах СВЧ». Опубликовал много статей по направлениям, указанным выше. Лауреат премии СМ СССР.