



## МЕХАНИЗМЫ БИФУРКАЦИЙ, СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ В МОДЕЛИ ЛАЗЕРА С НАСЫЩАЮЩИМСЯ ПОГЛОТИТЕЛЕМ

*С.А. Татаркова, В.В. Тучин*

Исследуются механизмы формирования хаотических аттракторов в модели лазера с насыщающимся поглотителем. Показано влияние собственных значений ненулевых стационарных точек на специфическую динамику лазера в условиях мультистабильности, изучены некоторые асимптотические свойства периодических решений. Установлено, что хаотические режимы возникают как следствие каскада бифуркаций удвоения периода, перемежаемости, гетероклинической бифуркации к седло-фокусной стационарной точке.

### Введение

В последние годы появилось немало работ, посвященных особой роли, которую играют гомоклинические структуры в нелинейной динамике диссипативных систем. Являясь некоторым предельным решением нелинейных уравнений, гомоклиническая траектория существенно влияет на свойства и поведение динамической системы. Связь между гомоклиническими структурами и сложным хаотическим поведением модельной системы обнаружена и исследована в различных физических и химических моделях, в частности, в реакции Белоусова - Жаботинского [1], в модели Лоренца [2], в модели лазера с насыщающимся поглотителем (ЛНП) [3,4]. Эти и другие исследования доказывают, что существует определенная универсальность поведения большинства систем с различного рода гомоклиническими траекториями.

При гомоклинической бифуркации фазовая траектория при  $t \rightarrow \infty$  возвращается в окрестность некоторого седлового многообразия, которым может служить стационарная точка, предельный цикл или более сложное образование, например, тор. В случае, когда гомоклиническая бифуркация связана со стационарной точкой седло-фокусного типа, теорема Л.П.Шильникова устанавливает связь между собственными числами матрицы линеаризации седловой стационарной точки в окрестности гомоклинической петли и особой хаотической динамикой системы. Если собственные числа таковы, что  $\lambda > 0$  - действительное,  $(-p \pm i\omega)$  - комплексно-сопряженные и  $|p/\lambda| < 1$ , то существует гомоклиническая петля, вблизи которой возможен хаос. Таким образом, результаты теоремы могут быть применены к широкому классу диссипативных

нелинейных систем с тремя степенями свободы. Примером могут служить уже упомянутые исследования реакции Белоусова - Жаботинского, уравнений Лоренца и другие.

Если размерность динамической системы больше трех, необходимы дополнительные исследования собственных значений стационарных точек. В литературе имеются результаты исследования четырехмерной системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику ЛНП в условиях экстремально высоких внутренних потерь в резонаторе лазера [5]. Здесь высокий порядок хаотизации колебаний - гиперхаос (спектр ляпуновских характеристических показателей содержит два положительных показателя вместо одного) - был связан с собственными значениями ненулевых стационарных точек. В работе [3] упоминаются также результаты, которые связывают собственные значения седлового нулевого стационара с собственными значениями ненулевого стационара. Так или иначе, с увеличением размерности системы вычисление гомоклинических или гетероклинических траекторий становится численно сложной задачей.

Необходимо также упомянуть о некоторых результатах, полученных в модели ЛНП. Настоящая статья посвящена исследованию хаоса, вызванного гетероклинической бифуркацией к седло-фокусной стационарной точке в пятимерной модели полуклассических уравнений Максвелла - Блоха для ЛНП с учетом поляризации усиливающей и поглощающей сред.

Интерес к данной лазерной системе обусловлен накопившимися в последнее время более детальными экспериментальными исследованиями динамических режимов, особенно хаотических, с привлечением новых прогрессивных методов реконструкции аттракторов в фазовом пространстве на основе записи длинной временной реализации импульсов пассивной модуляции добротности (ПМД). Определенные свойства экспериментально наблюдаемых хаотических режимов генерации позволяют предположить их связь с особыми гомоклиническими траекториями в фазовом пространстве системы. В большинстве применяемых поглотителей наблюдаются импульсы со сложной структурой - за основным большим пиком следуют менее интенсивные пички, образующие «хвост» импульса, и эта структура меняется при изменении лазерных параметров (изменяется как число пичков, так и их интенсивность). Хаотические режимы при этом представляют собой обычно «смесь» из импульсов различной структуры. Особенно сложно анализировать хаотические режимы, которые представляют собой последовательность импульсов с большим числом пичков на «хвосте», где высокий уровень шума смазывает мелкие пички и делает их неразличимыми. Исследование теоретических моделей ЛНП дает возможность установить закономерности бифуркаций периодических импульсных режимов генерации и закономерности развития хаоса. В данной работе впервые в полуклассической модели исследована детально бифуркационная диаграмма, даны оценки размерам окон периодических решений на ней и их связь с собственными числами матрицы линеаризации седловых стационаров. Экспериментально наблюдаемая последовательная смена режимов ПМД - от моноимпульсных к многопичковым при изменении только расстройки между частотой генерации и частотой резонатора - в модели уравнений Максвелла - Блоха для двухуровневой схемы усиливающей и поглощающей сред реализуется при изменении скорости релаксации поляризации в поглощающей среде. Подобные исследования проводились ранее в модели скоростных уравнений для ЛНП [4], в которых особую роль, определяющую пульсации интенсивности на «хвосте» импульсов ПМД, играет дополнительный третий нижний быстрорелаксирующий лазерный уровень. Обнаруженная в [4] гомоклиническая бифуркация наблюдается при условии, что поглощающая среда становится безынерционной, то есть скорость релаксации населенностей в поглощающей среде значительно превышает все остальные характерные времена релаксации в лазерной модели. В этом случае система уравнений сводится к трехмерной, и становятся применимыми общие методы анализа таких систем. Предложенная модель позволяет объяснить

некоторые экспериментальные результаты [4], такие как последовательная смена периодических режимов при изменении расстройки с увеличивающимся числом пичков на «хвосте», существование хаотических режимов между окнами устойчивых периодических и т.д. В работе [3] исследуется модельное отображение, предложенное Л.П. Шильниковым, которое является стандартным отображением некоторой траектории в фазовом пространстве, обладающей свойствами притяжения к седловому множеству, в данном случае - предельному циклу. Данное отображение позволяет получить некоторые качественные оценки поведения системы вблизи гомоклинической бифуркации, в частности, определить характеристики периодических решений, их области устойчивости, типы бифуркаций, и связать их с параметрами системы и собственными значениями неустойчивого многообразия, в данном случае предельного цикла, к которому возникает данная сложная бифуркация. Отмечается общий характер поведения подобных траекторий вблизи гомоклинической бифуркации к седловому предельному циклу - мультистабильность периодических траекторий, то есть сосуществование различных регулярных режимов при одних и тех же параметрах лазера, бифуркации удвоения периода и хаотические режимы, представляющие собой смесь различных седловых предельных циклов, что достаточно хорошо согласуется с экспериментом [3,4].

### Математическая модель ЛНП

Исследуемая математическая модель для одномодового лазера с насыщающимся поглотителем в приближении нулевых расстроек между линиями и без учета пространственной структуры поля включает в себя пять уравнений - для амплитуды поля  $E$ , поляризации усиливающей  $P$  и поглощающей  $\bar{P}$  сред, отношений разностей населенностей усиливающего и поглощающего переходов к их ненасыщенным значениям  $D$  и  $\bar{D}$  и имеет следующий вид [6]:

$$\begin{aligned}
 dE/dt &= A_1 P + A_2 \bar{P} - E, \\
 dP/dt &= d_1 (DP - E), \\
 d\bar{P}/dt &= d_2 (D\bar{P} - E), \\
 dD/dt &= b_1 (1 - D - PE), \\
 d\bar{D}/dt &= b_2 (1 - \bar{D} - a\bar{P}E),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где  $A_1$  - превышение усиления над линейными потерями,  $A_2$  - относительный параметр селективных потерь, характеризующий поглощение;  $d_{1,2} = \gamma_{1,2}^{\perp}/k$ , где  $\gamma_{1,2}^{\perp}$  - скорости установления поляризации усиливающей и поглощающей сред;  $b_{1,2} = \gamma_{1,2}^{\parallel}/k$ , где  $\gamma_{1,2}^{\parallel}$  - скорости релаксации инверсии (индекс 1) и разности населенностей поглощающего перехода (индекс 2);  $a$  - отношение параметров насыщения поглощающей и усиливающей сред для молекул одного сорта;  $I = E^2$  - безразмерная интенсивность. Производные в (1) взяты по безразмерному времени  $t = kt'$ , где  $k = 1 \cdot 10^7$  Гц - ширина полосы резонатора; все параметры в уравнениях (1) также безразмерные. Все данные о нормировке параметров даны в [6]. Численно анализировались стационарные решения системы (1), их устойчивость и типы бифуркации. В качестве управляющих параметров при исследовании системы мы использовали параметры  $d_2, A_2$ . Остальные параметры были фиксированы и равны  $A_1 = 3.725$ ,  $b_1 = 0.0024$ ,  $b_2 = 0.001$ ,  $d_1 = 4.0$ ,  $a = 0.5$ . Кроме стационарных, исследовались бифуркации периодических решений, анализировались такие характеристики, как период колебаний, мультипликаторы, максимальное значение амплитуды, размер цикла.

Система уравнений (1) численно интегрировалась методом Рунге - Кутты 4-го порядка. Вычисления проводились с двойной точностью, с применением методов интегрирования для жестких систем. Для упрощения вычислений левые части уравнений (1) умножались на некоторый масштабный множитель  $par=50.0$ .

### Бифуркации стационарных точек

Система (1) обладает тремя стационарными точками  $E_0=0$  и  $\pm E_{ст}$ , причем  $+E_{ст}$  и  $-E_{ст}$  совпадают и соответствуют стационарной генерации с интенсивностью  $I_{ст}=E_{ст}^2$  в силу симметрии системы относительно плоскости, в которой  $E=P=\bar{P}=0$ . Динамика системы определяется устойчивостью этих точек. Как уже указывалось ранее [7], классификация режимов ПМД проводится с точки зрения типа бифуркации Андронова - Хопфа, в результате которой образуются пульсации интенсивности. «Жесткость» или «мягкость» этой бифуркации обеспечивает образование двух принципиально различных решений. Показателем типа бифуркации является знак первой ляпуновской величины  $\lambda_0$  для стационарной точки. Если  $\lambda_0 < 0$ , то происходит «мягкая» или субкритическая бифуркация рождения предельного цикла и говорят о режиме «синусоидальной модуляции интенсивности», причем глубина модуляции увеличивается и переходит в пульсации по мере удаления от точки бифуркации. Особенность этой бифуркации в лазерных системах заключается в том, что при симметрии уравнений (1) образовавшееся решение несимметрично относительно плоскости, где  $E=0$ , и имеет «двойника» - точно такой же цикл, являющийся зеркальным отражением первого относительно  $E=0$ . Существование «двойника» никак не влияет на динамику системы, поскольку их бифуркации, например, бифуркации удвоения периода, в силу симметрии происходят синхронно, то есть при одном и том же значении параметра, за исключением бифуркации слияния квазиаттракторов удвоения [8], относящейся уже не к предельным циклам, а к существенно новому типу движения - хаосу. В результате этой бифуркации изображающая точка при движении по фазовой траектории хаотически перескакивает с одного квазиаттрактора на другой.

При  $\lambda_0 > 0$  наблюдается внезапный жесткий переход к предельному циклу (или суперкритическая бифуркация Андронова - Хопфа), который ограничивает в фазовом пространстве область притяжения стационарной точки. Этот предельный цикл имеет форму восьмерки, симметричной относительно  $E=0$ . Поскольку переход к периодическому движению осуществляется жестко, то вблизи стационара образуется тонкая область бистабильности двух режимов - стационарной и импульсной генерации.

Необходимость различать симметричный и несимметричный режимы возникает, когда оба решения сосуществуют при одних и тех же параметрах [9]. Заметим, простое сложение пространства фазовых переменных вдоль плоскости с  $E=0$  не приводит к совпадению режимов. Они различаются периодом колебаний, максимальной амплитудой импульсов, а также скважностью импульсов - промежутками времени между импульсами, когда амплитуда поля равна нулю. Наличие определенного «времени летаргии», которое характеризует замедление траектории вблизи нулевого стационара, как раз и определяет скважность импульсов для несимметричного решения.

Очевидно, что тип решения существенно зависит от собственных значений матрицы линеаризации стационарных точек, их степени притяжения. Рассмотрим периодические траектории, образующиеся в результате бифуркации Андронова - Хопфа из ненулевого стационара. В определенных условиях, и это зависит от собственных значений стационарных точек, движение изображающей точки по фазовой траектории замедляется в окрестности этих особых точек и даже, если притяжение стационарных точек достаточно велико, движение становится

спиралеобразным. Как результат этого, образуются импульсы ПМД с характерными осциллирующими хвостами, причем осцилляции могут возникать вследствие замедления движения по траектории вблизи как нулевой, так и ненулевой стационарной точки [9]. Осцилляции вблизи нулевого стационара наблюдались многими авторами, но до сих пор не удалось установить необходимые условия для собственных значений нулевого стационара, которые инициировали бы эти осцилляции. В предыдущей публикации [9] нами было установлено, что осцилляции в окрестности ненулевых стационаров определяют собственные значения этих стационаров, а именно, дополнительная пара комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательной действительной частью ( $-\rho \pm i\omega$ ). Более того, осцилляции на «хвосте» импульса имеют частоту, равную  $\omega$ . Так, в точке  $A_2 = -0.03$ ,  $d_2 = 0.0015$  собственные значения таковы:  $-250.36$ ,  $-0.0627 \pm i0.0694$ ,  $0.1196 \pm i5.079$ . Отметим, что максимальный отрицательный показатель (порядка  $-250$ ), можно не учитывать по аналогии с рассуждениями, приведенными в [4], так как он отражает сжатие фазового потока вдоль направления фазовой переменной  $P$  и означает быстрое реагирование поляризации на изменение поля в усиливающей среде лазера. Это означает, что собственный вектор, соответствующий поляризации  $P$  в усиливающей среде, коллинеарен с собственным вектором амплитуды поля  $E$ . В частности, после адиабатического исключения переменной  $P$  и при переходе к четырем уравнениям вместо пяти (1), этот ляпуновский показатель исчезает.

Мы не обнаружили какой бы то ни было связи особого поведения системы (1) с нулевым стационаром и его ляпуновскими показателями [9], на вероятность которой указано в [4]. Здесь, по-видимому, имеет место случай полной независимости стационарных точек друг от друга. Слабые изменения показателей нулевого стационара во всей исследуемой области характеризуют скорее его «нейтральность» по отношению к динамике. Поскольку в исследуемой области параметров существуют только симметричные решения типа «восьмерки», характерные тем, что они как бы «не замечают» присутствия нулевого седлового стационара, так как время пролета фазовой траектории области его притяжения мало, то ситуация, аналогичная [4], связанная с совместным действием всех неустойчивых стационаров на траекторию, здесь не реализуется. По-видимому, существенного влияния нулевого стационара и его собственных значений на нелинейную динамику лазера следует ожидать в случае несимметричных решений уравнений (1), образовавшихся в результате субкритической бифуркации Андронова - Хопфа.

Дальнейшие исследования показали, что одного присутствия дополнительной пары собственных значений с отрицательной действительной частью недостаточно для инициирования спиралеобразного движения изображающей точки по фазовой траектории в окрестности ненулевой стационарной точки. Приведем для сравнения результаты расчета для параметров  $A_1 = 3.725$ ,  $b_1 = 0.0024$ ,  $b_2 = 0.001$ ,  $d_1 = 4.0$ ,  $d_2 = 0.5$ . На плоскости активных параметров  $(a, A_2)$  существует некоторая клинообразная область (примерно в диапазоне параметров  $a = 5 \div 17$  и  $A_2 = -0.23 \div -2.6$ ), в пределах которой также существует дополнительная пара собственных значений, однако импульсы с осцилляциями там не наблюдаются. Например, в точке  $A_2 = -2$ ,  $a = 10$  собственные значения таковы:  $\lambda_1 = -252.8$ ,  $\rho_1 \pm i\omega_1 = 0.47 \pm i5.41$ ,  $-\rho_2 \pm i\omega_2 = -1.62 \pm i1.53$ . Если сравнить эти случаи, то мы увидим, что осцилляции появляются только при  $\rho_1 > \rho_2$ . Фактически, это то же условие теоремы Шильникова, которое устанавливает присутствие особой динамики, если отталкивание сильнее притяжения к стационарной точке.

Рассмотрим сечения по параметру  $d_2$  при  $A_2 = -0.03$  в области мультистабильности (рис.1, а). Отношение  $\rho_2/\rho_1$  показывает, что условие для гетероклинической петли удовлетворяется для значений  $d_2 < 0.004$ , при которых хаотические режимы могут быть связаны с гетероклинической бифуркацией седло-фокусной стационарной точки. Рост параметра  $d_2$  сопровождается незначительным увеличением частоты осцилляций  $\omega_2$  к середине области

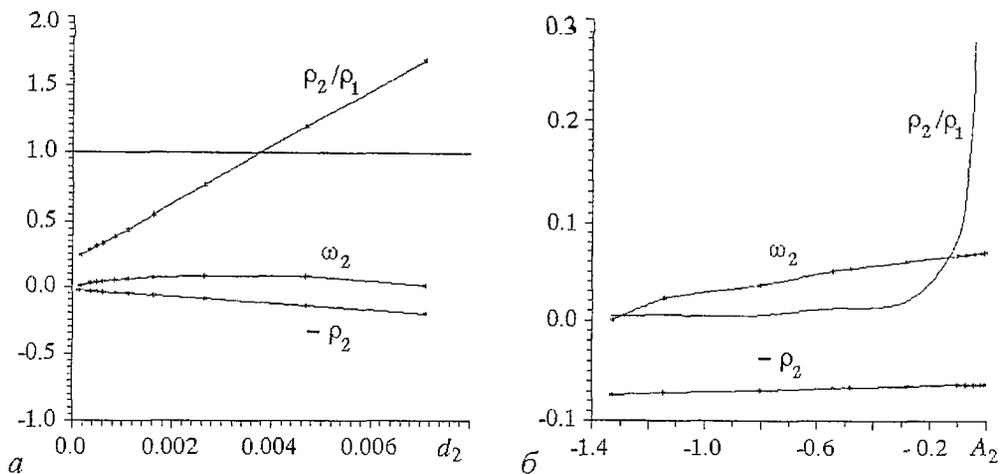


Рис. 1. Зависимость собственных значений стационарной точки от параметра: а -  $d_2$  при фиксированном  $A_2 = -0.03$ ; б -  $A_2$  при фиксированном  $d_2 = 0.015$

изменения параметра, затем происходит спад и обращение в ноль частоты на границе области существования данной пары собственных значений. Причем, если отношение  $\rho_2/\rho_1$  мало, то уменьшение  $\omega_2$  до нуля сопровождается подавлением осцилляций вокруг стационарной точки, но при этом расширение фазового потока вблизи стационара сохраняется. Если  $\rho_2/\rho_1 > 1$ , то поток сжимается в поперечном направлении и длительное спиралеобразное движение вокруг стационара становится невозможным - предельные циклы с большим числом пиков на «хвосте» исчезают. Как только исчезает пара комплексных собственных значений с отрицательной действительной частью (бифуркация кратных собственных значений для  $d_2 = 0.0071$ ), исчезают предельные циклы с дополнительными к основному пиками. Аналогичное сечение, только по параметру  $A_2$  при фиксированном  $d_2 = 0.0015$  (рис.1,б), демонстрирует увеличение отношения  $\rho_2/\rho_1$  и мнимой части комплексной пары, определяющей частоту осцилляций, вблизи бифуркации Андронова - Хопфа при почти неизменном значении  $\rho_2$ . И действительно, предельные циклы с максимальным числом пиков  $n$  и максимальной частотой осцилляций при данном  $d_2$  существуют вблизи бифуркации к устойчивой стационарной генерации с постоянной интенсивностью. При  $A_2 = -0.0161$  обе комплексные пары становятся отрицательными, и отношение  $\rho_2/\rho_1$  стремится к бесконечности вблизи этой точки. Условие Шильникова, а следовательно, и вероятность возникновения хаотических режимов, связанных с гетероклинической бифуркацией, тем не менее выполняется, и отношение  $\rho_2/\rho_1$  не превышает критического значения.

Таким образом, можно заключить, что комплексная пара собственных значений с отрицательной действительной частью влияет на стягивание фазовой траектории в окрестность ненулевого стационара и на спиралеобразное движение вокруг него, связанное с мнимой частью  $\omega_2$ , если при этом существует эффективный механизм выталкивания траектории из этой области, который осуществляется положительными собственными значениями.

### Асимптотические свойства периодических решений вблизи гетероклинической бифуркации

В ряде обзоров [10,11] подробно исследовано поведение различных физико-химических систем в окрестности гомоклинической бифуркации к различным неустойчивым многообразиям. Главная цель исследований гомоклинических

траекторий и их бифуркаций - связать между собой локальную неустойчивость этих многообразий с общим глобальным поведением динамической системы. Стандартный метод анализа поведения подобных систем, обладающих гомоклинической петлей, сводится к построению двумерного отображения в окрестности особого множества и исследованию неподвижных точек этого отображения в зависимости от параметров и ляпуновских показателей устойчивости седлового многообразия, в случае стационарной точки - ее собственных значений, в случае предельного цикла - его мультипликаторов. Такое отображение обладает теми же свойствами устойчивости и пространственной топологии, что и исходное, полученное из интегрирования исходных уравнений модели. Результаты анализа могут быть использованы для широкого класса систем. Рассмотрим здесь некоторые асимптотические свойства периодических решений при гетероклинической бифуркации к седло-фокусной стационарной точке.

Как следует из теоремы Шильникова, гомоклиническая петля называется опасной, если выполняется условие  $|\rho/\lambda| < 1$ , где  $\lambda > 0$ ,  $-\rho \pm i\omega$ , тогда вблизи этой петли рождается бесконечное число периодических траекторий и при некотором критическом значении управляющего параметра возможно сложное хаотическое поведение. Если  $|\rho/\lambda| > 1$ , то рождается один-единственный предельный цикл, период которого стремится к бесконечности вблизи гомоклинической петли.

Случай гомоклинической бифуркации к седловой стационарной точке, а именно к нулевому стационару, был исследован в [12] для параметров  $\text{CO}_2$  лазера с  $\text{CO}_2$  поглощающей ячейкой, и была построена петля сепаратрисы седла, вблизи которой период предельного цикла, кстати единственного, стремится к бесконечности. Петля сепаратрисы седла является границей, разделяющей области устойчивости предельного цикла и основного состояния равновесия.

В области мультистабильности в окрестности бифуркации Андронова-Хопфа выполняется условие  $\rho_2/\rho_1 < 1$ . В соответствии с теоремой Шильникова рождается счетное множество периодических траекторий, период которых при приближении к гетероклинической бифуркации седло-фокусной стационарной точки также стремится к бесконечности и подчиняется закону

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (T_{i+1} - T_i) = 2\pi/\omega_2, \quad (2)$$

где  $T_i$  - период предельного цикла с числом пиков, равным  $i$ ;  $\omega_2$  - мнимая часть комплексно-сопряженной пары собственных значений с отрицательной действительной частью. Значение  $\omega_2$  соответствует параметрам, при которых происходит гетероклиническая бифуркация.

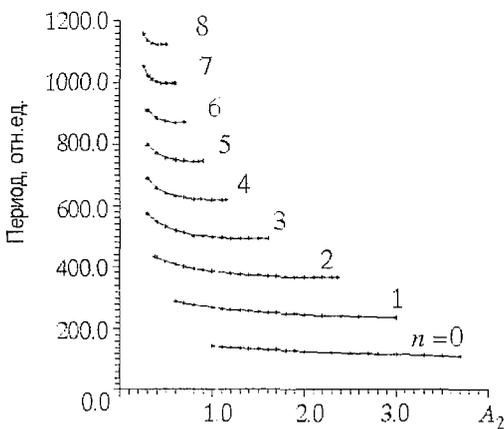


Рис. 2. Диаграмма бифуркаций периодических решений в зависимости от параметра  $A_2$  при  $d_2 = 0.0006$

гетероклиническая бифуркация.

На рис. 2 представлена диаграмма зависимости периода устойчивых предельных циклов от параметра  $A_2$  при фиксированном  $d_2 = 0.0006$ . Значение  $d_2$  выбиралось в области, где существуют предельные циклы с большим числом дополнительных пиков  $n$  и где выполняется условие  $\rho_2/\rho_1 < 1$ . На диаграмме показаны предельные циклы до  $n=8$ . Предельный цикл с  $n=0$  называется основным. Каждый предельный цикл обладает определенной зоной устойчивости, отмеченной на диаграмме почти горизонтальной линией, которая в условиях мультистабильности перекрывается с другими [9]. При увеличении числа пиков  $n$  на единицу происходит

дискретное увеличение периода предельного цикла на величину, примерно равную периоду основного цикла с  $n=0$ , которая определяется соотношением (2). Здесь возможна ситуация гетероклинической бифуркации к седловому предельному циклу, описанная в [3,11]. Для такого типа бифуркации характерны определенные асимптотические закономерности, в частности, период любого  $n$ -ого цикла равен периоду основного, умноженному на  $n$ . В нашем случае с некоторой точностью можно считать, что период  $n$ -ого цикла является кратным периоду основного. Однако основной предельный цикл в интересующей нас области параметров вблизи линии бифуркации Андронова - Хопфа не существует и говорить о бифуркации к этому циклу нельзя. Поскольку с ростом  $n$  области устойчивости предельных циклов сжимаются, мы ограничились анализом траекторий с  $n < 8$ , хотя при этих значениях параметров существуют циклы с  $n \approx 60$ . Следует отметить, что соотношение (2) получено в случае симметричной периодической орбиты, поэтому в (2) добавлен множитель 2.

Ширина крыльев или протяженность зоны устойчивости каждого предельного цикла также связана с собственными значениями ненулевых стационаров. Полученное в теории гомоклинических систем соотношение имеет вид [10]

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (A_2^{i+1}/A_2^i) = \exp(-\pi\rho_2/\omega_2), \quad (3)$$

где  $A_2^{i+1}$  - минимальное значение параметра, при котором предельный цикл с числом пиков  $i+1$  является устойчивым,  $A_2^i$  - максимальное значение параметра для  $i$ -ого предельного цикла,  $(-\rho_2 \pm i\omega_2)$  - собственные значения в точке аккумуляции предельных циклов. Выражение (2) получено для случая симметрично расположенных крыльев. В точке  $A_2 = -0.03$  величина под экспонентой примерно равна  $-2.9$ , но крылья кривой рис.2 уменьшаются в размере достаточно медленно. Объяснить такую разницу экспериментальных данных и теории можно, если учесть, что диаграмма на рис.2 несимметрична по параметру  $A_2$  и имеет очевидный наклон к  $A_2 = 0$ . Заметим, что граничные точки на правой стороне кривой спадают медленнее с ростом  $n$  и периода, чем на левой стороне. Примерная асимптотика, построенная к этим двум сторонам, показывает, что если справа период в зависимости от параметра  $A_2$  уменьшается, как  $\exp(-0.6)$ , то слева - как  $\exp(-2.6)$ , что близко к расчетному значению.

Удобнее рассматривать не отношение максимумов и минимумов диаграммы рис. 2, а отношение ширин зон устойчивости. Мы получили следующую зависимость ширины зоны устойчивости предельного цикла от числа пиков  $n$  (рис.3, кривая 1). Аппроксимация экспериментальных точек кривой 1 экспонентой дает

$$\Delta A_2^n = \Delta A_2^0 \exp(-0.326n), \quad (4)$$

где  $\Delta A_2^0 \approx 3$  - некоторая константа или ширина зоны устойчивости основного предельного цикла,  $\Delta A_2^n$  - ширина зоны  $n$ -ого цикла. Кривая 2 на рис. 3 показывает также степень перекрытия зон устойчивости соседних предельных циклов по параметру  $A_2$ . Как видно, асимптотика кривой 2 такая же, как и кривой 1. Протяженность зоны устойчивости  $n$ -ого предельного цикла и зоны бистабильности с  $n+1$  предельным циклом подчиняются примерно одному и тому же асимптотическому закону (4).

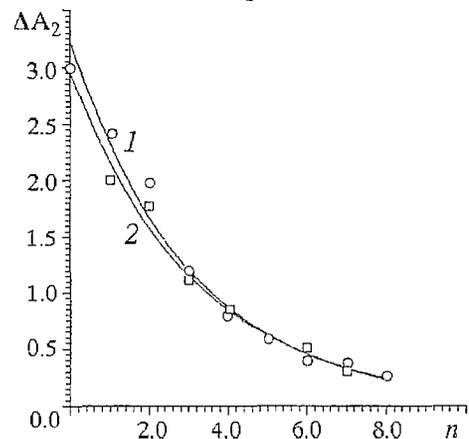


Рис. 3. Изменение ширины зоны стабильности (кривая 1) и степени перекрытия зон (кривая 2) для предельных циклов с  $n < 8$

Асимптотические закономерности (2), (3) получены для случая  $\rho_2/\rho_1 < 1$ . Мы проверили их для  $d_2 = 0.005$  ( $\rho_2/\rho_1 > 1$ ) и убедились, что соотношение (2) для периода нарушается, границы зон устойчивости спадают значительно быстрее: слева - как  $\exp(-100)$  и справа - как  $\exp(-4.75)$ . Изменяется также скорость, с которой уменьшается ширина зоны устойчивости - как  $\exp(-0.8)$ .

Остается вопрос о бифуркациях предельных циклов на краях зоны устойчивости. Как было показано в [11], результаты бифуркации для  $1/2 < \rho_2/\rho_1 < 1$  и  $\rho_2/\rho_1 < 1/2$  различны. Если  $\rho_2/\rho_1 < 1/2$ , то периодические траектории на границах зоны устойчивости претерпевают бифуркацию рождения тора - мультипликаторы предельного цикла пересекают единичную окружность в комплексной плоскости, однако рождающийся тор неустойчив. Если можно говорить о его относительной устойчивости, то тор «более устойчив справа» при бифуркации по параметру на кривой рис.2, чем слева. Это означает, что фазовая траектория проводит относительно больше времени в окрестности неустойчивого тора, если бифуркация происходит при большем значении параметра  $|A_2|$ , прежде чем соскочит на устойчивый предельный цикл. Объяснить это можно плотностью периодических траекторий, которая повышается с ростом параметра  $|A_2|$ .

Изменение соотношения  $1/2 < \rho_2/\rho_1 < 1$  приводит к изменению характера бифуркации периодических траекторий. При значениях параметра  $A_2 > 0.0012$  на левой границе зон стабильности наблюдается бифуркация потери симметрии для симметричного предельного цикла и последующие бифуркации удвоения периода [7]. Как мы увидим дальше, характер бифуркации связан с гетероклинической петлей к седло-фокусной стационарной точке и будет определять структуру хаотического аттрактора.

### **Гетероклиническая бифуркация и глобальное поведение физической системы**

В результате последовательных бифуркаций периодических орбит происходит переход к хаотическим режимам генерации лазера. Структура и свойства хаотического аттрактора могут быть определены с помощью различных сечений аттрактора плоскостью. В данном разделе мы покажем, как изменяется структура аттрактора в зависимости от соотношения  $\rho_2/\rho_1$  и от параметров системы (1).

Принципиальное значение при исследовании свойств потока имеет выбор секущей плоскости. В большинстве случаев в лазерных системах наблюдается сильное сжатие фазового потока в поперечном по отношению к направлению поля сечении. Если выбрать секущую плоскость перпендикулярно направлению, вдоль которого поток расширяется, получается сечение аттрактора, в котором точки располагаются фактически на одной прямой. На основе этого сечения строится отображение последования по переменной, в котором каждая последующая точка зависит от предыдущей. Методы исследования такого отображения хорошо известны [10]. Однако, как будет показано ниже, при приближении к гетероклинической бифуркации, при которой траектория совершает бесконечное число витков вокруг седлового стационара, поток расширяется и сечение аттрактора перестает быть одномерным. При этом дополнительная степень свободы несомненно связана с усилением связи аттрактора со стационарной точкой.

Рассмотрим хаотический аттрактор в точке  $A_2 = -0.017$  и  $d_2 = 0.005$ . Здесь отношение  $\rho_2/\rho_1 > 1$  и предельные циклы теряют устойчивость вследствие бифуркации потери симметрии. Для симметричной фазовой траектории бифуркация потери симметрии является первой бифуркацией, в результате которой образуются два асимметричных предельных цикла, которые затем при

изменении параметра удваивают период. Наличие других устойчивых предельных циклов приводит к сильному перемешиванию различных режимов. Временная реализация и фазовый портрет аттрактора не дает достаточной информации о его свойствах и структуре - необходимо анализировать достаточно длинные реализации, которые приводят к слиянию линий на фазовом портрете. Поэтому возникает проблема извлечения полезной информации, которая может быть решена с помощью эффективных сечений.

Для получения двумерного сечения аттрактора задавалась некоторая плоскость в пространстве фазовых переменных. Следуя методике, описанной в [3], данная плоскость должна быть расположена в области, связанной со специфической динамикой фазовой траектории. Логично считать, что такая область пространства находится вблизи ненулевого стационара, где траектория совершает спиралеобразное движение. Уравнение секущей плоскости было таким:

$$3.5\bar{P} + 0.3\bar{D} + 0.45\bar{D} = 1.$$

В данном сечении любой предельный цикл с числом пичков  $n$  отражается набором  $(n+1)$  точек. Отметим здесь, что данное уравнение секущей не является единственным, и выбранный нами критерий - число точек в сечении для  $n$ -ого цикла должно быть равно  $n+1$  - позволяет найти множество других комбинаций уравнения секущей плоскости. Такой подход при выборе секущей позволяет получить достаточную информацию о структуре и свойствах аттрактора, в то время как попытки исследовать поперечные сечения в случае, когда любой цикл пересекает секущую плоскость лишь однажды, не увенчались успехом, поскольку не учитывали динамику вблизи стационара. Равномерно распределенные точки такого сечения имеют структуру типа «облака», без каких-либо регулярных свойств.

В случае  $\rho_2/\rho_1 > 1$  сечение хаотического аттрактора представляет собой некоторое множество точек, вытянутое вдоль прямой линии (рис. 4, а). Такой вид сечения характерен для потоков с сильным поперечным сжатием [8], в особенности для лазерных систем [3]. Поперечное сжатие в  $(E, P)$ -плоскости связано с высокой скоростью релаксации поляризации усиливающей среды - «поляризация следит за полем». Одномерность сечения позволяет построить отображение последования по переменной и исследовать его структуру. На рис. 5, а представлено отображение последования по переменной  $E$ . Видно, что отображение обладает определенной ветвистой структурой с числом ветвей примерно до десяти. Хотя расположение ветвей на рис. 5, а сильно отличается от полученного ранее подобного отображения последования для двух-трехуровневой модели ЛНП в приближении бесконечно быстро релаксирующего поглотителя [4], интересно отметить, что также как в [3,4], ветви в отображении - параболического типа, их столько, сколько предельных циклов участвуют в

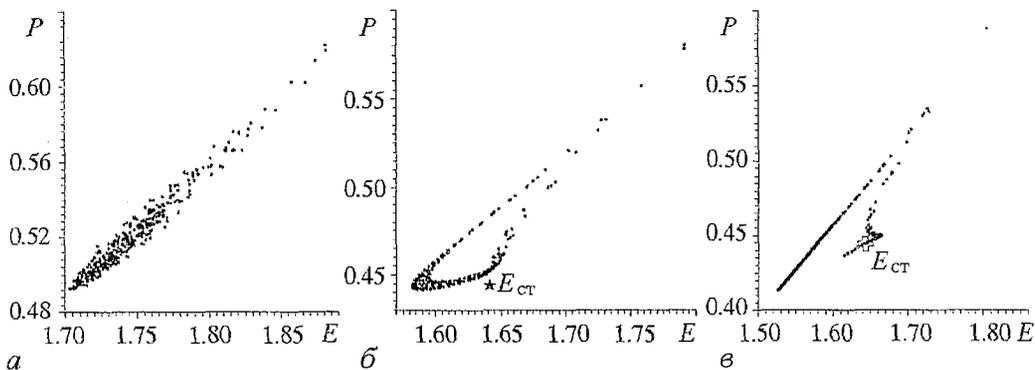


Рис. 4. Сечение хаотического аттрактора плоскостью для различных значений параметров: а -  $A_2 = -0.0169$ ,  $d_2 = 0.005$ ; б -  $A_2 = -0.017$ ,  $d_2 = 0.0015$ ; в -  $A_2 = -0.0166$ ,  $d_2 = 0.0006$

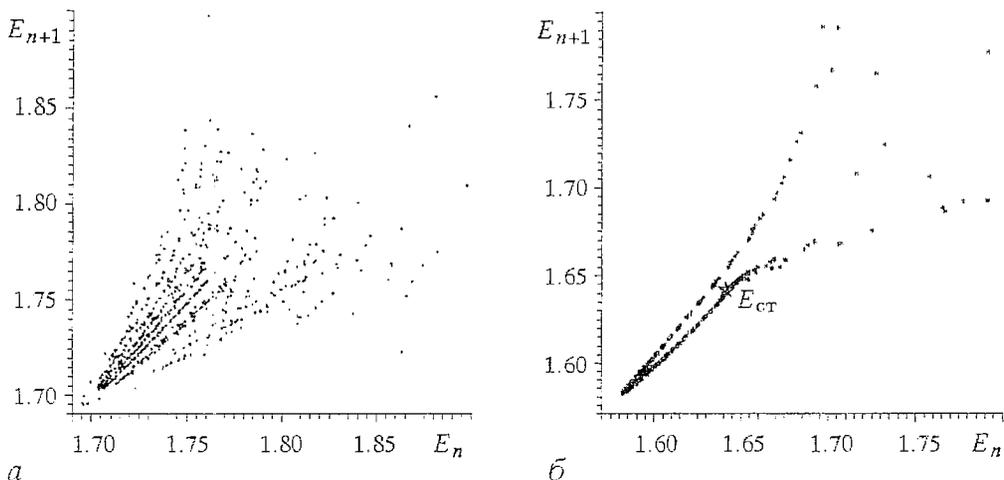


Рис. 5. Одномерное отображение последования по переменной  $E$  для параметров:  $a$  -  $A_2 = -0.0169$ ,  $d_2 = 0.005$ ;  $b$  -  $A_2 = -0.017$ ,  $d_2 = 0.0015$

образовании хаотического аттрактора при данных параметрах, и они асимптотически сближаются с ростом  $n$  со скоростью, равной 0.882 [4]. Гомоклинической бифуркации к седловому предельному циклу с бесконечным числом пичков соответствовало в [4] отображение последования с бесконечным числом ветвей.

Действительно, исследования показали, что в образовании хаотического аттрактора участвуют периодические траектории с числом пичков  $n \leq 9$  - устойчивых траекторий с большим  $n$  при данных  $(A_2, d_2)$ , по-видимому, не существует. Изменение параметра  $A_2$  от значения  $-0.027$  до  $-0.0166$  внутри хаотической области показывает, что чем ближе к точке бифуркации Андронова - Хопфа, тем больше ветвей в отображении последования, которые увеличиваются с  $k=4$  при  $A_2 = -0.027$  до  $k=10$  при  $A_2 = -0.0169$ . Переходы фазовой траектории внутри аттрактора происходят плавно от цикла с меньшим числом пичков  $n$  к циклу с большим  $n$ . После достижения максимально возможного  $n$  ( $n > 36$  при  $A_2 = -0.0166$ ) процесс идет в обратном порядке. Таким образом, предельные циклы с  $n=0$  и  $n=9$  являются границами аттрактора, обеспечивающими возврат траектории в ядро, возникшее при слиянии нескольких аттракторов, образованных каскадом бифуркаций удвоения периода.

Мы исследовали также асимптотическую скорость сближения ветвей в отображении последования (рис. 5,  $a$ ). Каждая следующая ветвь отображения получается поворотом предыдущей на некоторый угол, определяемый коэффициентом, равным 0.8833, что соответствует данным из [4]. По совпадению характерных признаков можно предположить гомоклиническую бифуркацию к седловому циклу с бесконечным числом пичков. Фазовый портрет хаотического аттрактора, кроме того, имеет в центре «дыру», как в [4], а стационар находится далеко за пределами данных рис. 5,  $a$  ( $E_{ст} \approx 1.6$ ). Однако нам не удалось выделить предельный цикл с  $n \rightarrow \infty$  и определить его мультипликаторы. Если предположить, что такой предельный цикл имеет число пичков  $n \approx 40$ , то учитывая определенную ранее как  $\exp(-32)$  скорость сжатия зон устойчивости с ростом  $n$ , представляется технически невозможным обнаружить цикл, который будет устойчивым в диапазоне параметра  $\Delta A_2 \approx 10^{-14}$ .

При соотношении  $\rho_2/\rho_1 < 1$  значительно изменяется вид поперечного сечения аттрактора (см. рис. 4,  $a$ ,  $b$ ). Появляется некоторая дополнительная степень свободы, несомненно, связанная с присутствием ненулевого стационара. Чем меньше  $\rho_2/\rho_1$ , тем ближе фазовая траектория подходит к ненулевому стационару. К этому нужно добавить, что  $\rho_2/\rho_1 \leq 1/2$  означает малую вероятность бифуркаций удвоения периода, а, следовательно, хаотический аттрактор не является

результатом слияния аттракторов удвоения предельных циклов, как на рис. 4, а. Как следствие, исчезают ветви в отображении последования по переменной (рис. 5, б).

Меняется также характер движения фазовой траектории при изменении  $d_2$  с 0.0015 до 0.0006 (отношение  $\rho_2/\rho_1$  меняется с 1/2 до 1/3). По рис. 4, б можно увидеть, что движение фазовой траектории вблизи стационара является равномерным, в то время как на рис. 4, в в сечении появляется разрыв, вызванный влипанием траектории в стационар, и почти полное подавление осцилляций (разрыв в сечении), когда траектория лишь слабо колеблется вблизи  $E_{ст}$ . Ламинарный участок в сечении (рис. 4, в) отражает постепенное нарастание колебаний и уход от стационарной точки. Отметим, что число осцилляций вокруг стационара достигает примерно трехсот.

### Заклучение

Анализ динамики лазерной системы выявил характерные особенности поведения лазерной системы в случае гетероклинической бифуркации к седло-фокусной стационарной точке, оказывающей решающее воздействие на формирование хаотических аттракторов. Существенно, что представленные результаты получены в полуклассической модели лазера с насыщающимся поглотителем с учетом поляризации обеих сред и вполне согласуются с результатами теории гомоклинических систем, полученными ранее. Как было показано, приближение к гетероклинической бифуркации существенно изменяет структуру хаотического аттрактора. Изменения собственных значений ненулевых стационаров приводят к коренной перестройке механизма хаотизации колебаний - от каскада удвоений периода, с характерной многоветвевой структурой одномерного отображения к гетероклинической бифуркации, при которой поведение системы целиком определяет то неустойчивое многообразие, к которому возникает бифуркация. Отметим, что несмотря на многомерность системы исследуемых уравнений, которая не позволяет непосредственно вычислить гетероклиническую траекторию, применение результатов теоретических исследований подобных траекторий дает достаточно информации о динамике многомерной системы, независимо от её порядка, и позволяет выявить ключевые механизмы и параметры, ответственные за сложную хаотическую динамику лазера.

*Работа выполнена при персональной финансовой поддержке одного из авторов (С.А.Татарковой) Оптическим Обществом Америки, грантом от Фонда Сороса.*

### Библиографический список

1. Argoul F., Arneodo A., Richetti P. Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov - Zhabotinskii reaction // Phys.Rev.A. 1987. Vol.120, № 6. P.269.
2. Sparrow C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors // Appl.Math.Sci. No.41, New York, Springer-Verlag, 1982.
3. Papoff F., Fioretti A., Arimondo E. Return maps for intensity and time in a homoclinic chaos model applied to a laser with a saturable absorber // Phys.Rev.A. 1991. Vol.44. P.4639.
4. Lefranc M., Hennequin D., Dangoisse D. Homoclinic chaos in a laser containing a saturable absorber // J.Opt.Soc.Am.B. 1991.Vol.8. P.239.
5. Antoranz J.C., Rubio M.A. Hyperchaos in a simple model for a laser with a saturable absorber // J.Opt.Soc.Am.B. 1988. Vol.5. P.1070.
6. Lugiato L.A., Mandel P., Dembinski S.T and Kossakowski A. Semiclassical and

quantum theories of bistability in lasers containing saturable absorbers // Phys.Rev.A. 1978. Vol.18. P.238.

7. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* Chaotic dynamics in a passive Q-switching laser // Proc.SPIE, Vol.2037, Chaos in Optics. 1993.

8. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* One-dimensional mapping analysis of chaotic attractors, to be published.

9. *Tatarkova S.A., Tuchin V.V.* Multistability and chaos in laser with a saturable absorber // Laser Physics. 1992. Vol.2, №4. P. 482.

10. *Glendinning P., Sparrow C.* Local and Global Behavior near Homoclinic Orbits // J.Stat.Phys. 1984. Vol.35, № 5/6. P. 645.

11. *Gaspard P., Wang X.J.* Homoclinic Orbits and Mixed-Mode Oscillations in Far-from-Equilibrium Systems // J.Stat.Phys. 1987. Vol.48, № 1/2. P.151.

12. *Анищенко В.С., Сафонова М.А., Татаркова С.А., Тучин В.В.* Динамика CO<sub>2</sub>-лазера с нелинейным поглощением. Численное моделирование // Оптика и спектроскопия. 1991. Т.70, вып. 5. С. 1092.

*Саратовский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 1.09.95  
после переработки 30.11.95*

## **BIFURCATION MECHANISMS, PROPERTIES AND STRUCTURE OF THE CHAOTIC ATTRACTORS IN THE LASER MODEL WITH SATURABLE ABSORBER**

*S.A. Tatarkova, V.V.Tuchin*

We studied the chaotic bifurcation mechanisms in the laser model with a saturable absorber. It has been shown that nonzero steady-states eigenvalues influence on the specific dynamics in the multistability conditions, we investigated the asymptotic properties of the periodic regimes. We found that the chaotic regimes arise as a sequence of the period-doubling bifurcations, intermittence and heteroclinic bifurcation to the saddle-focus steady-state.



*Татаркова Светлана Алексеевна - кандидат физико-математических наук (1992), доцент кафедры оптики СГУ. Круг научных интересов включает лазерную физику, нелинейную и хаотическую динамику лазерных систем, влияние шумов. Автор 15 статей.*