



О КОМПЛЕКСНОЙ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

А.Г. Владимиров, В.Ю. Торонов, В.Л. Дербов.

Изучаются геометрические свойства комплексной модели Лоренца, такие как топология фазового пространства и предельных множеств, ограниченность аттракторов. Показано, что для этой модели бифуркация, соответствующая рождению пары гомоклинических петель в модели Лоренца, имеет коразмерность два.

Введение

Так называемые комплексные уравнения Лоренца, или комплексная модель Лоренца (КМЛ)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x-y), \\ \dot{y} &= -(1-ie)y + (r-z)x, \\ \dot{z} &= -bz + 1/2(x^*y + xy^*), \end{aligned} \quad (1)$$

впервые были введены Гиббоном и Макгиннесом [1] в качестве обобщения известной модели Лоренца (МЛ) [2,3]. В отличие от МЛ, в КМЛ переменные x и y комплексны. Формально эта комплексность возникает благодаря наличию параметра e и комплексности параметра $r = r_1 + ir_2$. Однако, смысл, заложенный в обобщение МЛ Гиббоном и Макгиннесом, значительно глубже. В работе [1] с помощью метода многих масштабов показано, что модель (1) в определенном приближении является универсальной для целого класса систем.

Для большинства систем, рассмотренных в [1], переменные, входящие в (1), являются амплитудами некоторых возмущений относительно пространственно однородного решения исходных дифференциальных уравнений в частных производных и в большинстве случаев не имеют наглядной физической интерпретации. Однако, существуют системы, для которых переменные КМЛ являются наблюдаемыми величинами. Это лазеры и мазеры, для которых x и y - медленные комплексные амплитуды электрического поля и поляризации среды соответственно, а z - разность заселенностей уровней энергии рабочего перехода.

В действительности уравнения (1) появились в квантовой электронике задолго до «открытия» их Гиббоном и Макгиннесом (например, [4]). Возможность непосредственного наблюдения переменных делает лазеры наиболее удобным объектом для экспериментальной реализации динамики, ассоциирующейся с КМЛ. И действительно, результаты экспериментов с одномодовыми лазерами далекого

инфракрасного диапазона оказались в замечательном соответствии с результатами численного интегрирования КМЛ [5]. И хотя КМЛ наиболее реалистично описывает лишь этот тип лазеров, она является простейшей моделью, отражающей такие фундаментальнейшие свойства лазера, как пороговый характер генерации, затягивание частоты и способность генерировать сложные типы колебаний.

Однако, несмотря на многочисленные работы по исследованию этой модели [1,6-16], она и по сей день остается менее изученной, чем того заслуживает, будучи сравнимой по значимости с такими «знаменитыми» моделями нелинейной динамики, как МЛ, модель Ресслера и т.д. Исследование КМЛ затрагивало, в основном, анализ частных режимов, чаще всего численными методами. На наш взгляд, наиболее глубокие теоретические результаты были получены Нингом и Хакеном [9,10]. Они относятся к анализу устойчивости простейших периодических решений, отвечающих режиму стационарной генерации лазера.

Целью данной работы является изучение геометрической структуры и некоторых глобальных свойств решений КМЛ, связанных с особенностями этой структуры.

Важным геометрическим свойством КМЛ является ее инвариантность относительно преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} xe^{i\psi} \\ ye^{i\psi} \\ z \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где ψ - произвольная постоянная фаза. Это преобразование соответствует группе $U(1)$, которая действует в подпространстве C^2 полного фазового пространства \mathcal{H} , относящемся к переменным x и y . Чтобы осознать роль $U(1)$ - симметрии для структуры предельных множеств в фазовом пространстве КМЛ, достаточно рассмотреть случай $e=r_2=0$. Можно показать [16], что в этом случае любая траектория в \mathcal{H} притягивается к инвариантной трехмерной гиперповерхности

$$\operatorname{Re}(x)/\operatorname{Im}(x) = \operatorname{Re}(y)/\operatorname{Im}(y) = \operatorname{const}, \quad (3)$$

где постоянная в правой части зависит от начальных условий. На этой гиперповерхности вещественные и мнимые части x и y синхронно меняются во времени, удовлетворяя при этом уравнениям МЛ. Однако даже при этих условиях аттракторы МЛ и КМЛ нетождественны. Действительно, если данная траектория притягивается к данному предельному множеству, лежащему на гиперповерхности, определяемой уравнениями (3), то, согласно свойству симметрии (2), траектория, отличающаяся от данной некоторой общей фазой переменных x и y , притягивается к множеству, которое является образом данного множества при действии (2) с соответствующей фазой ψ . Поэтому аттрактор КМЛ в данном случае представляет собой прямую сумму бесконечного числа множеств, изоморфных аттрактору МЛ.

Приведенный пример наглядно демонстрирует более высокую степень сложности структуры фазового пространства КМЛ по сравнению с МЛ и ту роль, которую в этом усложнении играет симметрия. Однако, как будет показано, симметрия же является и нитью Ариадны, позволяющей «размотать» клубок траекторий КМЛ. Отметим здесь интересную аналогию между ролью симметрии для физических систем, описываемых КМЛ, и для квантовых систем, описываемых волновой функцией. Для обоих типов систем общая фаза вектора состояния (для КМЛ имеется в виду вектор с компонентами x и y) не несет информации о физическом состоянии и характеризует лишь результат интерференции данного состояния с некоторым другим. В квантовой механике «лишняя» информация может быть отфильтрована с помощью использования формализма матрицы плотности. При этом, если данный вектор состояния в гильбертовом пространстве описывается N комплексными числами, то соответствующая матрица плотности характеризуется $2N-1$ независимыми вещественными числами.

Указанная аналогия позволяет применить этот подход к КМЛ. В разделе 1 вводится особое проективное пространство, в котором состояния, различающиеся

общей фазой переменных x и y , рассматриваются как эквивалентные, и выводятся уравнения движения для КМЛ в этом пространстве. Там же показано, каким образом вся информация о физическом состоянии системы и эволюции фазы может быть воспроизведена с помощью этих уравнений. В разделе 2 эти уравнения используются для анализа свойств ограниченности предельных множеств КМЛ в проективном пространстве, и показано, как эти свойства связаны с особенностями фазовой динамики и гомоклинических бифуркаций.

1. Нормальная форма уравнений и проективное пространство

Наряду с переменными x , y и z для КМЛ в дальнейшем будет удобно использовать другую систему переменных. Пусть

$$\sigma(r_1 - 1) - e^2/4 \equiv \eta > 0, \quad b < 2\sigma.$$

Введем замену переменных в КМЛ

$$x' = \eta^{-3/4} ax, \quad y' = \eta^{-5/4} \sigma a [y - (1 + ie/2\sigma)x], \quad z' = \eta^{-1} \sigma (z - xx^*/2), \quad t' = t (\eta)^{1/2}, \quad (4)$$

где $a = e^{-ie/2} [(2\sigma - b)/2]^{1/2}$. После этой замены, которая подобна предложенной в [17] для МЛ, уравнения (1) принимают вид

$$\begin{aligned} dx'/dt' &= y', \\ dy'/dt' &= (1 + iv)x' - \mu y' - x'z' - \rho x' |x'|^2, \\ dz'/dt' &= -\beta z' + |x'|^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$v = [2r_2\sigma + e(\sigma - 1)]/2\eta, \quad \mu = (1 + \sigma)/\eta^{1/2}, \quad \rho = \eta^{1/2}/(2\sigma - b), \quad \beta = b/\eta^{1/2}. \quad (6)$$

Якобиан замены (4) равен $|a|^4 \sigma^3 / \eta^5$. Поэтому, для $\eta > 0$ и $b < 2\sigma$ замена переменных (4) задает взаимно однозначное и непрерывное отображение (диффеоморфизм) фазового пространства \mathcal{H} системы (1) на фазовое пространство \mathcal{H}' системы (5). Системы (1) и (5) топологически эквивалентны. Иначе говоря, при выполнении условий, наложенных на значения параметров, динамика (5) эквивалентна динамике КМЛ.

Если в (5) пренебречь членом $-\rho x' |x'|^2$, то получим комплексное обобщение уравнений Шимицу-Мариока [17], которые были детально исследованы в [18]. В [19,20] было показано, что в некотором приближении уравнения Шимицу-Мариока также являются нормальной формой уравнений, описывающих хаотическую динамику вблизи бифуркационной точки с трижды вырожденным собственным значением и геометрической кратностью, равной двум. Отметим, что в (5) все коэффициенты вещественны, когда $v=0$, то есть когда выполнено условие (29) (см. ниже).

Рассмотрим отображение $\Pi: \mathcal{H}(x, y, z) \rightarrow \mathcal{P}$, где \mathcal{P} - проективное пространство с декартовыми координатами u , v , w и z

$$u = (|x|^2 - |y|^2)/2, \quad v = \text{Re}(x^*y), \quad w = \text{Im}(x^*y). \quad (7)$$

Идея использовать данное отображение основана на аналогии КМЛ с двухуровневой квантово-механической системой. Если рассматривать переменные x и y как компоненты шредингеровского вектора состояния, то соответствующая матрица плотности может быть выражена через линейную комбинацию матриц Паули [21]; при этом u , v и w будут коэффициентами этого разложения. Заметим, что

$$\text{где } |x|^2 = R + u, \quad |y|^2 = R - u, \quad x^*y = v + iw, \quad (8)$$

$$R = (u^2 + v^2 + w^2)^{1/2} = (|x|^2 + |y|^2)/2. \quad (9)$$

Из (8) можно видеть, что переменные u , v , w и z содержат всю информацию о состоянии системы в смысле, обсуждавшемся во введении. Всем точкам пространства \mathcal{H} , различающимся только общей фазой переменных x и y , отображение Π ставит в соответствие одну и ту же точку в \mathcal{P} , в то время как образы состояний, различающихся амплитудами и разностью фаз x и y , различны. Ниже мы будем использовать термин «луч», принятый в геометрии для обозначения множества точек в \mathcal{H} , которым соответствует одна и та же точка пространства \mathcal{P} . \mathcal{P} будем называть «пространством лучей».

Дифференцируя (7) по времени и используя уравнения (1), получим уравнения движения в пространстве лучей

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -(\sigma + 1)u + (\sigma - r_1 + z)v - r_2w - (\sigma - 1)R, \\ \dot{v} &= -(\sigma + 1)v - ew - (\sigma - r_1 + z)u + (\sigma + r_1 - z)R, \\ \dot{w} &= -(\sigma + 1)w + ev + r_2(R + u), \\ \dot{z} &= -bz + v. \end{aligned} \quad (10)$$

Соответственно, образом системы (5) при отображении $\Pi: \mathcal{H}'(x', y', z') \rightarrow \mathcal{P}'$, где \mathcal{P}' - проективное пространство, эквивалентное \mathcal{P} , является система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}' &= v' + \mu(R' - u') - vw' - v'[1 - z' - \rho(R' + u')], \\ \dot{v}' &= -\mu v' + R' - u' + (R' + u')[1 - z' - \rho(R' + u')], \\ \dot{w}' &= -\mu w' + v(R' + u'), \\ \dot{z}' &= -\beta z' + (R' + u'). \end{aligned} \quad (11)$$

Отметим, что множества точек \mathcal{Z} и \mathcal{Z}' , лежащих на осях z и z' в фазовых пространствах \mathcal{H} и \mathcal{H}' , инвариантны относительно потоков, задаваемых системами уравнений (1) и (5), соответственно. То же относится и к соответствующим множествам точек в пространствах \mathcal{P} и \mathcal{P}' . Отсюда следует, что множества точек \mathcal{H}/\mathcal{Z} , $\mathcal{H}'/\mathcal{Z}'$, \mathcal{P}/\mathcal{Z} и $\mathcal{P}'/\mathcal{Z}'$ также инвариантны относительно потоков, задаваемых (1) и (5).

Прежде чем использовать уравнения (10) и (11) вместо (1) и (5), необходимо найти способ получать информацию о движении в \mathcal{H} из решений уравнений (10). Рассмотрим соотношение между характеристиками динамического состояния системы в \mathcal{H} и в \mathcal{P} , такими как ляпуновские характеристические показатели (ЛХП) и фрактальная размерность аттрактора. Для данной траектории $X_0(t)$ динамической системы $dX/dt = F(X)$ спектр ЛХП Λ_i определяется, как

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln [|e_i(t)| / |e_i(0)|], \quad (12)$$

где $e_i(t)$ - фундаментальные решения линейной системы уравнений

$$dY/dt = (\partial F / \partial X)|_{X=X_0(t)} Y. \quad (13)$$

Введем локальные координаты ξ_j в окрестности некоторой $X_0 \in \mathcal{H}/\mathcal{Z}$

$$\xi_1 = u(x, y), \quad \xi_2 = v(x, y), \quad \xi_3 = w(x, y), \quad \xi_4 = z, \quad \xi_5 = \text{Im}(\langle X_0, X \rangle) / \langle X_0, X \rangle. \quad (14)$$

Здесь и далее мы используем бра- и кет-символы для обозначения эрмитовского скалярного произведения, определенного на C^2 .

Якобиан преобразования (14) в точке $X = X_0$ равен $|x_0|^2 + |y_0|^2 > 0$, так что (14) есть диффеоморфизм в некоторой окрестности X_0 .

Записывая уравнения (13) для системы (1) в локальных координатах $\xi(\xi_1, \dots, \xi_5)$, заданных согласно (14), получим

$$d\xi/dt = \begin{pmatrix} \left(\begin{array}{c} \hat{A} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \\ 0, 0, 0, 0 \end{pmatrix} \xi, \quad (15)$$

где A^\wedge - матрица Якоби для системы уравнений (10), вычисленная в точке $\Pi(X_0(t))$. Из уравнения (15) можно видеть, что матрица A^\wedge задает эволюцию возмущений, ортогональных к ξ_5 в $X_0(t)$, тогда как возмущения вдоль ξ_5 остаются нейтральными. Поскольку (14) - диффеоморфизм, из (12) и (15) следует, что спектр ЛХП для траектории в \mathcal{H}/\mathcal{Z} отличается от спектра для ее проекции в \mathcal{P} только наличием одного дополнительного нулевого показателя. В частности, это означает, что если данное множество в \mathcal{H}/\mathcal{Z} есть аттрактор с ляпуновской размерностью \mathcal{D}_L , то его образ в \mathcal{P} есть аттрактор с ляпуновской размерностью $\mathcal{D}_L - 1$. Это соотношение справедливо и для фрактальных размерностей предельного множества в \mathcal{H}/\mathcal{Z} и его проекции в \mathcal{P}/\mathcal{Z} . Это следует из того факта, что каждое предельное множество в \mathcal{H}/\mathcal{Z} может быть представлено локально (в окрестности данного луча) в виде прямого произведения множества в \mathcal{P}/\mathcal{Z} и луча, то есть множества \mathcal{R}^1 .

Другая часть физической информации, ассоциирующаяся с траекторией в \mathcal{H} и, на первый взгляд, отсутствующая в уравнениях (10), это относительная фаза двух состояний. Правило сравнения фаз двух состояний физической системы, описываемой некоторым комплексным вектором состояния, было введено Панчаратнамом для состояний классического поляризованного света [22], а затем обобщено на случай квантовых систем в [23,24]. Для КМЛ оно может быть сформулировано так: два состояния X_1 и X_2 «синфазны», если норма $\|X_1 + X_2\|$ максимальна по всем возможным значениям полных фаз X_1 и X_2 . Отметим, что это правило позволяет сравнивать фазы состояний, принадлежащих различным лучам. Для двух данных лучей значение нормы определяется фазой комплексного числа $\langle X_1, X_2 \rangle$. Эта фаза называется фазой Панчаратнама. Основываясь на аналогии между КМЛ и уравнением Шредингера, в [14] было показано, что фаза Панчаратнама естественным образом возникает в задаче о динамике лазера. Кратко обсудим этот вопрос с точки зрения геометрии КМЛ.

На языке дифференциальной геометрии, триплет $(\mathcal{H}/\mathcal{Z}, \mathcal{P}/\mathcal{Z}, \Pi)$ образует расслоение [25,26], для которого \mathcal{H}/\mathcal{Z} - пространство расслоения, \mathcal{P}/\mathcal{Z} - база, слоем является луч, а структурной группой является группа $U(1)$. Отметим, что это расслоение нетривиально, то есть \mathcal{H}/\mathcal{Z} не сводится к прямому произведению базы на луч.

Уравнение

$$\xi_5 = 0, \quad (16)$$

определяет связность на расслоении. Согласно терминологии, принятой в дифференциальной геометрии, кривая в \mathcal{H} называется горизонтальной (относительно данной связности), если ее вектор скорости в каждой точке направлен по касательной к поверхности $\xi_5 = 0$. Связность, определяемая уравнением (16), обеспечивает единственность горизонтальной кривой в \mathcal{H} , проектирующейся на данную кривую в \mathcal{P} и проходящей через заданную точку. В [23, 24] для данного типа расслоений и для случая эволюции вектора состояния вдоль горизонтальной траектории (относительно данного типа связности), показано, что

фаза Панчаратнама для двух состояний на данной траектории $X(t)$ может быть выражена в виде

$$\gamma = -\oint_{\Gamma T} A_s ds, \quad (17)$$

где

$$A_s = \text{Im}(\langle X(s) | d/ds | X(s) \rangle / \langle X(s) | X(s) \rangle), \quad (18)$$

ΓT - замкнутый контур в \mathcal{H} , образованный отрезком T траектории между двумя состояниями и кривой Γ , проекция которой является геодезической в \mathcal{P} . Интеграл в (12) имеет ненулевое значение, если при обходе по замкнутому контуру ΓT в \mathcal{P} вектор состояния системы в \mathcal{H} не возвращается в исходную точку. Возможность этого является проявлением нетривиальности расслоения [23,24].

Отметим, что преобразование вида (2), но с зависящим от времени ψ

$$\psi(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau,$$

где $h(t)$ - некоторая функция времени, переводит (1) в систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(\sigma + ih(t))x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -[1 + i(h(t) - e)]y + (r - z)x, \\ \dot{z} &= -bz + 1/2 (x^*y + xy^*), \end{aligned} \quad (19)$$

которая гомеоморфна (1), если $h(t)$ непрерывно. (В лазерном эксперименте $h(t)$ - отклонение фазы опорного сигнала, используемого в гетеродинных измерениях [5], от монохроматического сигнала с частотой моды пустого резонатора). Горизонтальная кривая, образом которой является данная траектория в \mathcal{P} , есть траектория динамической системы (19) с $h(t) = -\text{Im}(\langle X, F(X) \rangle) / \langle X, X \rangle$, где $F(X)$ - вектор фазовой скорости системы уравнений (1) (см. определение (16)). Из того, что системы (1) и (19) связаны преобразованием (2) следует, что для произвольного $h(t)$ полный набег общей фазы переменных x и y в (19) может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\gamma = \gamma_d + \gamma_g, \quad (20)$$

где

$$\gamma_d = \int_0^t [h(\tau) + \text{Im}(\langle X, F(X) \rangle) / \langle X, X \rangle] d\tau \quad (21)$$

динамическая фаза; а геометрическая фаза γ_g определяется формулой (17).

Покажем теперь, что когда $h(t)$ - заданная функция времени или константа, набег фазы может быть получен из решения системы (10) без обращения к уравнениям (1). Действительно, динамическая фаза определяется интегралом по времени от функции

$$\text{Im}(\langle X, F(X) \rangle) / \langle X, X \rangle = [e(R - u) - (\sigma + r_1 - z)w] / R,$$

выражающейся через координаты точки в \mathcal{P} . Чтобы доказать это для геометрической части, введем в \mathcal{P} сферические координаты

$$u = \rho \cos\theta, \quad v = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad w = \rho \sin\theta \sin\phi.$$

Отметим, что согласно (7), $x = \rho^{1/2} \cos(\theta/2) \exp[i\Theta]$, $y = \rho^{1/2} \sin(\theta/2) \exp[i(\Theta + \phi)]$, где Θ - общая фаза. Выражая A_s в (17) через сферические координаты, получим

$$\gamma_g = -\oint_{\Gamma} \sin^2(\theta/2) d\phi, \quad (22)$$

где интеграл берется в \mathcal{P} по контуру, образованному траекторией и геодезической. Можно видеть, что правая часть (22) есть не что иное, как половина величины телесного угла, стягиваемого контуром [25].

После этого обсуждения особенностей эволюции фазы становится ясно, что траектория системы в \mathcal{H} , являющаяся прообразом предельного цикла в \mathcal{P} , будет замкнутой только в случае специального выбора системы координат (несущего сигнала), определяемого функцией $h(t)$. Это согласуется с фактом, следующим из соотношений между размерностями предельных множеств в \mathcal{H} и \mathcal{P} , что периодическому аттрактору в \mathcal{P} должен соответствовать тор в \mathcal{H} . Проекция тора на предельный цикл - лишь один пример упрощения задачи исследования динамики системы, обеспечиваемого введением проективного пространства \mathcal{P} . В следующем разделе мы используем представление КМЛ в \mathcal{P} (10) и в \mathcal{P}' (11), чтобы выявить некоторые общие свойства ее решений.

2. Ограниченность предельных множеств и гомоклиническая бифуркация

Для МЛ известно [2], что все предельные множества траекторий в фазовом пространстве ограничены сферой

$$x^2 + y^2 + (z - \sigma - r)^2 - K^2(\sigma + r)^2 = 0,$$

где $K^2 \geq 1/4 + (b/4) \max(\sigma^{-1}, 1)$.

Покажем, что это свойство сохраняется и для КМЛ, то есть что предельные множества в \mathcal{H} ограничены гиперсферой

$$|x|^2 + |y|^2 + (z - \sigma - r_1)^2 - K^2(\sigma + r_1)^2 = 0 \quad (23)$$

с тем же K , что и для МЛ. Рассмотрим семейство сфер

$$V_M \equiv |x|^2 + |y|^2 + (z - \sigma - r_1)^2 - M^2 = 0 \quad (24)$$

и производные по времени

$$\dot{V}_M = -2\sigma|x|^2 - 2|y|^2 - 2b[z - (\sigma + r_1)/2]^2 + b(\sigma + r_1)^2/2. \quad (25)$$

Поскольку

$$\dot{V}_M|_{V_M=0} = (F, \nabla V_M), \quad (26)$$

где F - вектор фазовой скорости, траектории на сфере $V_M=0$ направлены «внутри» ее или «наружу» соответственно, если правая часть уравнения (25) принимает положительное или отрицательное значение на сфере. Из (25) можно видеть, что эта функция не зависит от параметров e и r_2 . Поэтому можно использовать результат, полученный для МЛ [2] и состоящий в том, что рассматриваемая функция положительна на любой сфере $V_M=0$ с радиусом, превосходящим радиус сферы (23).

Уравнение, задающее ограничивающую поверхность для предельных множеств в \mathcal{P} , соответствующую гиперсфере (23), можно получить, подставляя в (23) $|x|^2 + |y|^2 = 2R$, что дает уравнение сфероида

$$S: 2R + (z - \sigma - r_1)^2 - K^2(r_1 + \sigma)^2 = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь гиперповерхность в \mathcal{P} пространстве, заданную уравнением

$$Q(u, v, w, z) \equiv \alpha u + \beta w + \alpha(e/|e|)R = 0, \quad (28)$$

где $\alpha = -|e|/[(2\sigma)^2 + e^2]^{1/2}$, $\beta = 2\sigma/[(2\sigma)^2 + e^2]^{1/2}$. В трехмерном подпространстве $R^3(u, v, w)$ пространства \mathcal{P} уравнение (28) задает двумерный полуконус с вершиной в начале координат, ось симметрии которого направлена вдоль вектора $(\alpha, 0, \beta)$. При этом косинус угла между осью и образующей конуса равен $\pm\alpha$ в зависимости от знака e . Для $e > 0$ полуконус находится в полупространстве положительных w и отрицательных u . Для $e = 0$ конус вырождается в плоскость $w = 0$. При $e < 0$ поверхность расположена в области отрицательных w и положительных u .

В пространстве \mathcal{P}' поверхности $Q = 0$ соответствует гиперплоскость

$$w' = 0.$$

При этом $Q > (<) 0$ соответствует $w' > (<) 0$. Из (11) видно, что при $w' = 0$, $\dot{w}' = v(R' + u') = v|\alpha'|^2$. Таким образом, значение \dot{w}' неотрицательно при $v > 0$ и неположительно при отрицательном v . Поэтому, для $v > (<) 0$ траектории на поверхности касательны к ней или направлены в сторону области \mathcal{P} , где $Q > (<) 0$ ($w' > (<) 0$ в \mathcal{P}').

Как следует из (11), поверхность (28) глобально устойчива и инвариантна относительно потока для $v = 0$. Это условие может быть переписано в виде

$$r_2 = r_{2c} = e(1 - \sigma)/2\sigma. \quad (29)$$

Покажем что для $r_2 > (<) r_{2c}$ всякая траектория, начинающаяся в области $Q < (>) 0$ ($w' < (>) 0$), стремится к области, где $Q \geq (\leq) 0$ ($w' \geq (\leq) 0$). Пусть $r_2 > r_{2c}$ ($v > 0$). Рассмотрим семейство гиперплоскостей в \mathcal{P}' : $w' = C < 0$. Как видно из (11), при ($v > 0$) на этих поверхностях $\dot{w}' > 0$ (так как μ всегда положительно). Поэтому всякая траектория, идущая из области $w' < 0 \sim (Q < 0)$, последовательно пересекает каждую из этих поверхностей и, в конце концов, оказывается на поверхности $w' = 0$ ($Q = 0$) или в области $w' > 0$ ($Q > 0$). Точнее, существует множество траекторий, имеющее меру ноль, которые стремятся к началу координат при $t \rightarrow \infty$ (см. ниже). Все остальные траектории рано или поздно приходят в область $w' > 0$ ($Q > 0$).

Чтобы показать, что при $r_2 < r_{2c}$ каждая траектория стремится к множеству точек в \mathcal{P} , для которых $Q \leq 0$ ($w' \leq 0$), следует рассмотреть семейство поверхностей $w' = C > 0$. Поскольку это легко сделать, следуя тем же путем, что и для $r_2 > r_{2c}$, мы опускаем это доказательство.

Рассмотрим теперь некоторые важные следствия существования ограничивающей поверхности $Q = 0$. Во-первых отметим, что для лазера ($r_2 = 0$) все аттракторы расположены в той области \mathcal{P} , где $Q \geq 0$ для $e > 0$, и в симметричной области для $e < 0$ (рис.1,2). Если ограничиться подпространством $R^3(u, v, w)$, это область телесного угла Ω , охватываемого полуконусом $Q = 0$. Поэтому для траектории, принадлежащей некоторому аттрактору, телесный угол, охваченный контуром ГТ (см. (17)), не превосходит Ω . В пределе $e \rightarrow \pm 0$ конус превращается в инвариантную относительно потока плоскость $w = 0$, которая при этом глобально устойчива, так что телесный угол, соответствующий ГТ, стремится к предельному значению $\pm 2\pi$. Это объясняет резонансный скачок среднего наклона фазы поля лазера на величину, равную характерной средней частоте пульсаций интенсивности $2\pi/\tau$ (τ - средний период пульсаций интенсивности, совпадающий со средним временем обхода изображающей точки вокруг начала координат на плоскости $w = 0$). Интересно отметить, что этот скачок был впервые найден в численных

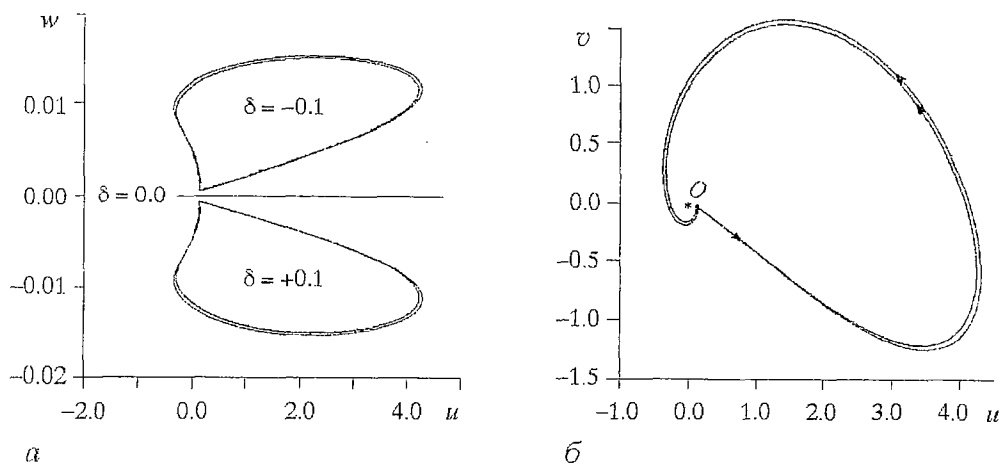


Рис. 1. Фазовые портреты циклических аттракторов при $\sigma = 3, b = 0.1, r = 15$: а - в плоскости (u, w) для $\delta = \pm 0.1$ и $\delta = 0$; б - в плоскости (u, v) для $\delta = 0$; O - начало координат

расчетах [12] и интерпретирован, как проявление геометрической фазы в динамике лазера на основе численного анализа поведения траекторий в пространстве лучей [15].

Другим следствием существования ограничивающей поверхности $Q=0$ ($w'=0$) является дополнительное ограничение на значения параметров системы, соответствующие гомоклинической бифуркации. Известно, что в МЛ очень важной структурой, отвечающей за формирование хаотического множества траекторий, являются негрубые гомоклинические петли сепаратрис [3]. Поскольку КМЛ включает МЛ как частный случай при $e=0$ и $r_2=0$, соответствующие гомоклиники также имеют место и в КМЛ. Необходимым условием их существования является пересечение устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седла, расположенного в начале координат [27].

Локальная структура инвариантных многообразий вблизи седла может быть получена из линейного анализа уравнений (1) или (5) в окрестности решения $x=y=z=0$ ($x'=y'=z'=0$).

«Тривиальное» решение уравнений (5) $x'=y'=z'=0$ неустойчиво и является седлом, когда

$$r_1 > 1 + [e^2 - r_2\sigma + er_2(1-\sigma)]/(1+\sigma)^2.$$

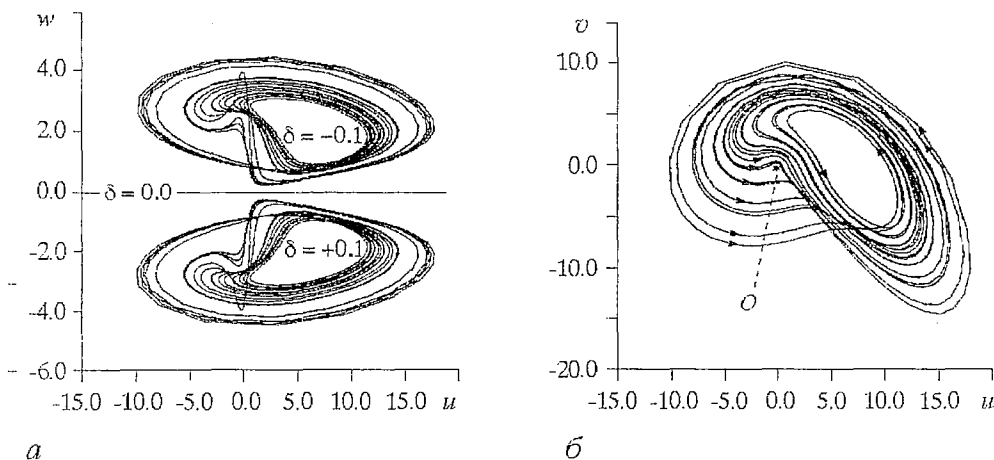


Рис. 2. Фазовые портреты хаотических аттракторов при $\sigma = 3, b = 1, r = 30$: а - в плоскости (u, w) для $\delta = \pm 0.1$ и $\delta = 0$; б - в плоскости (u, v) для $\delta = 0$

Его собственные значения суть

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\mu/2 + (1 + \mu^2/4 + i\nu)^{1/2}, \\ \lambda_2 &= -\mu/2 - (1 + \mu^2/4 + i\nu)^{1/2}, \\ \lambda_3 &= -\beta.\end{aligned}\tag{30}$$

Им соответствуют собственные векторы

$$V_1 = N_1^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = N_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $N_{1,2} = 1 + |\lambda_{1,2}|$. Как следует из (30), для достаточно малых ν мы имеем $\text{Re}\lambda_1 > 0$, $\text{Re}\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 < 0$. Кроме того, для $\nu > 0$

$$\text{Im}\lambda_1 = -\text{Im}\lambda_2 > 0.\tag{31}$$

Мы рассмотрим только случай, когда $|\lambda_3| < |\text{Re}\lambda_2|$, так как он соответствует возможности реализации аттрактора Лоренца.

Неустойчивое (устойчивое) линейное подпространство E^u (E^s) определяется собственным вектором V_1 (собственными векторами V_2 и V_3):

$$E^u: y' = x'\lambda_1, \quad z' = 0,$$

$$E^s: y' = x'\lambda_2.$$

Неустойчивое (устойчивое) многообразие W^u (W^s) начала координат касательно к E^u (E^s) в $x'=y'=z'=0$.

Поскольку ось z' инвариантна относительно потока и принадлежит W^s , точки этих многообразий, лежащие в шаре малого радиуса ε , удовлетворяют уравнениям

$$W_{loc}^u: y' = x'\{\lambda_1 + O(\varepsilon)\}, \quad z' = O(\varepsilon^2),\tag{32}$$

и

$$W_{loc}^s: y' = x'\{\lambda_2 + O(\varepsilon)\}.\tag{33}$$

Рассмотрим проекции инвариантных многообразий W^u и W^s на \mathcal{P}' . Будучи инвариантными относительно потока, они должны переходить в себя и под действием группы $U(1)$. Поэтому отображение Π отображает W^s и W^u соответственно на двумерное и одномерное многообразия в \mathcal{P}' . Из (7), (32) и (33) получим

$$w'|_{\Pi(W_{loc}^u)} = |x'|^2 \{\text{Im}\lambda_1 + O(\varepsilon)\},$$

$$w'|_{\Pi(W_{loc}^s)} = |x'|^2 \{\text{Im}\lambda_2 + O(\varepsilon)\}.$$

Учитывая (31), приходим к выводу, что для $\nu > 0$ все точки $\Pi(W_{loc}^u)$ лежат в полупространстве $w' \geq 0$. Далее, из формального решения третьего уравнения системы (11)

$$w'(t') = w'(0) + \nu e^{-\mu t'} \int_0^{t'} [R'(s) + w'(s)] ds\tag{34}$$

заключаем, что вообще все точки $\Pi(W^u)$ лежат в этом полупространстве.

Действительно, так как в (34) под интегралом стоит неотрицательная величина, $w'(t')$ всегда неотрицательно, если $w'(0) > 0$. Все же точки $\Pi(W_{loc}^s)$, за исключением точек оси z' , лежат в полупространстве $w' < 0$. Следовательно, $\Pi(W^u)$ и $\Pi(W_{loc}^s)$ могут пересекаться только на оси z' . Однако, это невозможно, так как эта ось не принадлежит W^u . Поэтому, для $\nu > 0$ уравнения (1) и (5) не допускают траекторий, двоякоасимптотических к началу координат. Используя свойство инвариантности системы (11) относительно замены

$$\nu \rightarrow -\nu, \quad w' \rightarrow -w' \quad (35)$$

и следуя тем же путем, можно легко показать, что такие траектории не могут существовать и при $\nu < 0$. Итак, $\nu = 0$ или

$$r_2 = \epsilon(1 - \sigma)/2\sigma$$

- необходимое условие существования «бабочки» Лоренца.

Заключение

Подведем итоги. Мы показали, что все динамические свойства системы, включая особенности фазовой динамики, могут быть получены непосредственно из представления КМЛ в пространстве лучей. Отметим, что это представление не содержит сингулярностей для каких-либо значений параметров в отличие от аналогичного, использовавшегося в [9], и дает эффективный и простой метод изучения свойств КМЛ. Установлено соответствие между свойствами предельных множеств в исходном фазовом пространстве и в пространстве лучей, выявлены свойства ограниченности предельных множеств в этих пространствах. Показано, что эти свойства ответственны за сингулярное поведение кривой среднего наклона фазы поля лазера как функции отстройки, наблюдавшееся до этого в численном эксперименте [12]. Доказано, что гомоклиническая бифуркация сепаратрисы седла в КМЛ имеет коразмерность, равную двум.

В качестве непосредственного продолжения данной работы мы видим аналитическое построение одномерного отображения для КМЛ в окрестности гомоклинической бифуркации. Эту возможность обеспечивает представление КМЛ в пространстве лучей. В настоящее время это отображение построено, и ведется работа по его анализу.

Работа была поддержана Международным Научным Фондом. В.Ю. Торонов и В.Л. Дербов поддержаны грантом Министерства высшей школы и технической политики РФ № 94-2.7-1097.

Библиографический список

1. Gibbon J.D., McGuinness M.J. *Physica D* 5, 108 (1982).
2. Lorenz E.N., *Atmos J. Sci.* 20, 130 (1963).
3. Sparrow C. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors*. Springer Verlag, 1982.
4. Ораевский А.Н. *Радиотехн. и электр.* 4, 718 (1959).
5. Tang D.Y., Weiss C.O., *Phys. Rev. A* 49, 1296 (1994); Tang D.Y., Li M.Y., Weiss C.O., *Phys. Rev. A* 44, 7597 (1991); Weiss C.O., Abraham N.B., Hubner U., *Phys. Rev. Lett.* 61, 1587 (1988).
6. Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J., *Physica D* 4, 139 (1982).
7. Fowler A.C., Gibbon J.D., McGuinness M.J., *Physica D* 7, 126 (1983). Fowler A.C., McGuinness M.J., *SIAM J. Appl. Math.* 44, No.4, 681 (1984).
8. Mandel P., Zeghlache H., *Opt. Commun.* 47, 146 (1983); Zeghlache H., Mandel P., *JOSA B* 2, 18 (1985).

9. *Ning C., Haken H.*, Phys. Rev. A 41, 3826 (1990).
10. *Ning C., Haken H.*, Z.Phys. B, 81,457 (1990).
11. *Vilaseca R., de Valcarcel G.J., Roldan E.*, Phys. Rev. A 41,5269 (1990).
12. *Roldan E., de Valcarcel G.J., Vilaseca R., Mandel P.*, Phys. Rev. A 48, 591 (1993).
13. *Ning C.Z., Haken H.*, Phys. Rev. Lett. 68, 2109 (1992).
14. *Toronov V., Derbov V.*, Phys. Rev. A 49, 1392 (1994).
15. *Toronov V., Derbov V.*, Phys. Rev. A 50, 878(1994).
16. *Ораевский А.Н., Торонов В.Ю.*, Квантовая электроника, 16, 2063 (1989).
17. *Shimizu T., Morioka N.*, Phys. Lett. A 76 (1980) 201.
18. *Shil'nikov A.L.*, Selecta Math. Sovietica, 10:2 (1991) 105. (Originally published in Methods of Qualitative Theory of Differential Equations (Russian) (Gor'kov. Gos. Univ., Gor'ki. 1986) pp.180-193); Physica D 62 (1993).
19. *Vladimirov A.G., Volkov D.Yu.*, Opt. Commun. 100 (1993) 351.
20. *Rucklidge A.M.*, Physica D 62 (1993) 323.
21. *Дирак Л.*, Принципы квантовой механики, Наука, Москва, 1980.
22. *Pancharatnam S.*, Proc. Ind. Acad. Sci. Ser.A 44, 247 (1956).
23. *Samuel J., Bhandari R.*, Phys. Rev. Lett. 60, 2339 (1988).
24. *Anandan J., Aharonov Y.*, Phys. Rev. Lett. 65, 1697 (1990).
25. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко Л.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1984.
26. *Kobayashi S., Nomizu K.*, Foundations of differential geometry. Interscience, N.Y. 1969.
27. *Шильников Л.П.* Докл. Акад. Наук. СССР 160, 558 (1965); Мат. Сборник 77, 461 (1968) and 81, 92 (1970).

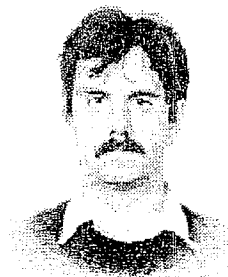
С. - Петербургский государственный
университет, НИИ физики
Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию 5.04.95
после переработки 21.11.95

ON THE COMPLEX LORENZ MODEL

A.G. Vladimirov, V.Yu. Toronov, V.L. Derbov

The geometric properties of the complex Lorenz model such as the topology of the phase space and limit sets, and the boundedness of attractors are studied. It is shown that in the complex case the homoclinic bifurcation is the codimension-two one.



Владимиров Андрей Георгиевич родился в 1958 году в Ленинграде. Окончил Ленинградский госуниверситет (1984). Получил степень кандидата физико-математических наук в СПГУ (1984). Диссертация посвящена диффракционным свойствам оптических резонаторов. Имеет более 30 публикаций. В настоящее время научные интересы - нелинейная оптика, динамика лазеров, бифуркации, хаос и нелинейные волны.



Торонов Владислав Юрьевич - 1963 года рождения, окончил Московский инженерно-физический институт (1986). Защитил кандидатскую диссертацию по исследованию конечномерных моделей динамики лазеров (1992). Доцент физического факультета Саратовского государственного университета. Круг интересов - самоорганизация, хаос, квантовая динамика, геометрические свойства динамических систем.



Дербов Владимир Леонардович - 1949 года рождения, окончил физический факультет СГУ (1972). После окончания аспирантуры работал в НИИ механики и физики при СГУ. Защитил кандидатскую диссертацию по теории взаимодействия интенсивных лазерных полей с многоуровневыми релаксирующими системами. С 1983 года - доцент кафедры теоретической физики, а с 1985 года по настоящее время - доцент кафедры оптики СГУ. Автор более 70 теоретических работ в области нелинейной лазерной спектроскопии молекул, нелинейной динамики распространения лазерных пучков и импульсов. В последние годы интенсивно исследует проблему геометрических фаз в лазерных и оптических динамических системах.