Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья
УДК 517.987, 517.938.5

DOI: 10.18500/0869-6632-003134
EDN: NDWRDI

О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках

Л. С. Ефремова[1,2]✉, *М. А. Шалагин*[1]

[1]Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
[2]Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия
E-mail: ✉lefunn@gmail.com, shalaginmatvey@gmail.com
Поступила в редакцию 18.06.2024, принята к публикации 23.09.2024, опубликована онлайн 8.11.2024, опубликована 29.11.2024

Аннотация. *Цель* работы состоит в описании двух важнейших типов предельных множеств простейших косых произведений отображений интервала, фазовым пространством каждого из которых является компактная n-мерная клетка ($n \geqslant 2$): во-первых, неблуждающего множества и, во-вторых, ω-предельных множеств траекторий. *Методы.* Предложен метод исследования неблуждающего множества (новый даже для двумерного случая), основанный на использовании понятия C^0- Ω-взрыва в непрерывных отображениях отрезка, и введенного в работе понятия C^0- Ω-взрыва в семействе непрерывных отображений в слоях. Для описания ω-предельных множеств использована техника специальных рядов, построенных по траектории и содержащих информацию о ее асимптотическом поведении. *Результаты.* Дано полное описание неблуждающего множества непрерывного простейшего косого произведения отображений интервала, то есть непрерывного косого произведения на компактной n-мерной клетке, множество (наименьших) периодов периодических точек которого ограничено. Результаты, полученные при описании неблуждающего множества, использованы при изучении ω-предельных множеств. В работе дано описание топологической структуры ω-предельных множеств рассматриваемых отображений. Найдены достаточные условия, при выполнении которых ω-предельным множеством траектории является периодическая орбита, а также необходимые условия существования одномерных ω-предельных множеств. *Заключение.* Дальнейшее развитие техники C^0- Ω-взрыва в семействе отображений в слоях позволит описать структуру неблуждающего множества косых произведений одномерных отображений, в частности, с замкнутым множеством периодических точек, заданных на простейших многообразиях произвольной конечной размерности. Дальнейшее развитие теории специальных, построенных в работе расходящихся рядов позволит перейти к описанию ω-предельных множеств произвольной размерности d, где $2 \leqslant d \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$, в простейших косых произведениях.

Ключевые слова: косое произведение, неблуждающее множество, C^0- Ω-взрыв, ω-предельное множество, неподвижная точка, периодическая точка.

Благодарности. Исследование поддержано Российским научным фондом, грант № 24-21-00242, https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/.

Для цитирования: *Ефремова Л. С., Шалагин М. А.* О предельных множествах простейших косых произведений на многомерных клетках // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 796–815. DOI: 10.18500/0869-6632-003134. EDN: NDWRDI

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003134

On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells

L. S. Efremova[1,2]✉, *M. A. Shalagin*[1]

[1]National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia
[2]Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: ✉lefunn@gmail.com, shalaginmatvey@gmail.com

Received 18.06.2024, accepted 23.09.2024, available online 8.11.2024, published 29.11.2024

Abstract. *The purpose* of this work is to describe two important types of limit sets of the most simple skew products of interval maps, the phase space of each of which is a compact n-dimensional cell ($n \geqslant 2$): firstly, a non-wandering set and, secondly, ω-limit sets of trajectories. *Methods.* A method for investigating of a nonwandering set (new even for the two-dimensional case) is proposed, based on the use of the concept of C^0-Ω-blow up in continuous closed interval maps, and the concept of C^0-Ω-blow up introduced in the work in the family of continuous fibers maps. To describe the ω-limit sets, the technique of special series constructed for the trajectory and containing an information about its asymptotic behavior is used. *Results.* A complete description is given of the nonwandering set of the continuous simplest skew product of the interval maps, that is, a continuous skew product on a compact n-dimensional cell, the set of (least) periods of periodic points of which is bounded. The results obtained in the description of a nonwandering set are used in the study of ω-limit sets. The paper describes a topological structure of ω-limit sets of the maps under consideration. Sufficient conditions have been found under which the ω-limit set of the trajectory is a periodic orbit, as well as the necessary conditions for the existence of one-dimensional ω-limit sets. *Conclusion.* Further development of the C^0-Ω-blow up technique in the family of maps in fibers will allow us to describe the structure of a nonwandering set of skew products of one-dimensional maps, in particular, with a closed set of periodic points defined on the simplest manifolds of arbitrary finite dimension. Further development of the theory of special divergent series constructed in the work will allow us to proceed to the description of ω-limit sets of arbitrary dimension d, where $2 \leqslant d \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$, in the simplest skew products.

Keywords: skew product, nonwandering set, C^0- Ω-blow up, ω-limit set, fixed point, periodic point.

Acknowledgements. Research was carried out under support of the Russian Science Foundation (project № 24-21-00242), https://rscf.ru/en/project/24-21-00242/.

For citation: Efremova LS, Shalagin MA. On limit sets of simplest skew products defined on multidimensional cells. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):796–815. DOI: 10.18500/0869-6632-003134

Введение

В статье дано описание двух наиболее важных типов предельных множеств некоторых непрерывных косых произведений отображений интервала, фазовое пространство каждого из которых представляет собой компактную n-мерную клетку ($n > 2$): во-первых, неблуждающего множества и, во-вторых, ω-предельных множеств траекторий. Рассматриваемые здесь косые произведения (называемые в дальнейшем простейшими) образуют собственное подмножество семейства косых произведений с замкнутым множеством периодических точек. В случае $n = 2$ неблуждающее множество непрерывного косого произведения отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек в базе (и, в частности, с замкнутым множеством периодических точек) детально изучалось в [1] (см. также [2]), а описание ω-предельных множеств с исследованием вопросов дифференцируемости простейших отображений приведено в [3]. Обратим внимание и на то, что исчерпывающе полное описание свойств ω-предельных множеств непрерывных отображений отрезка в себя имеется в [4–6].

Рассмотрим косое произведение отображений интервала

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \tag{1}$$

с фазовым пространством $I^n = \prod\limits_{i=1}^{n} I_j$, где I_j — невырожденный отрезок вещественной прямой для каждого $1 \leqslant j \leqslant n$.

Обозначим через $SP^0(I^n)(SP^1(I^n))$ пространство всех непрерывных (всех C^1-гладких) косых произведений (1), наделенное C^0-нормой (C^1-нормой), индуцированной стандартной C^0-нормой (C^1-нормой) пространства $C^0(I^n)$ ($C^1(I^n)$) всех непрерывных (всех C^1-гладких) отображений n-мерной клетки I^n в себя.

Будем использовать обозначения

$$f_2(x_1,\, x_2) = f_{2,\, x_1}(x_2), \;\; \widehat{f}_2 = (f_1,\, f_{2,\, x_1}),$$

а при всех $3 \leqslant j \leqslant n$ положим

$$\widehat{x}_{j-1} = (x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{j-1}), \quad f_j(\widehat{x}_{j-1},\, x_j) = f_{j,\, \widehat{x}_{j-1}}(x_j).$$

$$\widehat{f}_j = (f_1,\, \ldots, f_{j,\, \widehat{x}_{j-1}}), \;\; \text{где} \;\; \widehat{f}_n \equiv F.$$

Отметим, что отображение $\widehat{f}_j : I^j \to I^j$ при любом $2 \leqslant j \leqslant n-1$ также представляет собой косое произведение отображений интервала, фазовым пространством которого является j-мерная клетка.

Следуя [7], условимся считать, что отображение

$$\widehat{f}_{n-1} : I^{n-1} \to I^{n-1}, \;\; \text{где} \;\; \widehat{f}_{n-1} = (f_1,\, \ldots, f_{n-1,\, \widehat{x}_{n-2}}),$$

есть *фактороотображение (фактор)* косого произведения (1), а отображение

$$f_{n, \widehat{x}_{n-1}} : I_n \to I_n$$

для любого $\widehat{x}_{n-1} \in I^{n-1}$ есть *отображение в слое* над $\widehat{x}_{n-1}$.

В силу (1) для любого натурального числа k и произвольной точки $(\widehat{x}_{n-1},\, x_n) \in I^n$ справедливо равенство

$$F^k(\widehat{x}_{n-1},\, x_n) = (f_1^k(x_1), f_{2,\, x_1,\, k}(x_2), \ldots, f_{n, \widehat{x}_{n-1}, k}(x_n)), \tag{2}$$

где $f_{2,\, x_1,\, k}(x_2) = f_{2,\, f_1^{k-1}(x_1)} \circ \ldots \circ f_{2,\, x_1}(x_2)$, а для любых $3 \leqslant j \leqslant n$

$$f_{j, \widehat{x}_{j-1}, k}(x_j) = f_{j,\, \widehat{f}_{j-1}^{k-1}(\widehat{x}_{j-1})} \circ \ldots \circ f_{j, \widehat{x}_{j-1}}(x_j). \tag{3}$$

Приведем основные определения, используемые в работе.

Определение 1. *Простейшим косым произведением, заданным на n-мерной клетке, $n \geqslant 2$, будем называть непрерывное косое произведение с ограниченным множеством (наименьших) периодов его периодических точек.*

Обратим внимание на корректность определения 1: любое непрерывное косое произведение отображений интервала имеет хотя бы неподвижную точку (детальную информацию о сосуществовании периодов периодических точек такого рода отображений см. далее).

Определение 2. *Точка $x(\widehat{x}_{n-1},\, x_n) \in I^n$ называется неблуждающей точкой отображения F, если для любой окрестности $U(x)$ точки x в I^n существует натуральное число k такое, что*

$$U(x) \bigcap F^k(U(x)) \neq \emptyset \quad \text{[8, Ch. 0, § 0.2]}.$$

Множество всех неблуждающих точек отображения F называется *неблуждающим* и обозначается $\Omega(F)$.

Определение 3. *Точка $x'(\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ называется ω-предельной точкой траектории точки $x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ относительно отображения F, если существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ такая, что*

$$\lim_{m\to+\infty} F^{k_m}(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \quad \text{[8, Ch. 0, § 0.2]}.$$

Множество всех ω-предельных точек траектории точки x относительно F называется ω-предельным и обозначается $\omega_F(x)$.

Компактность I^n влечет за собой выполнение неравенств

$$\Omega(F) \neq \emptyset; \quad \omega_F(x) \neq \emptyset \ \text{ для любого } \ x \in I^n.$$

Пусть $pr_{n-1} : I^n \to I^{n-1}$ есть естественная проекция n-мерной клетки I^n на $(n-1)$-мерную клетку I^{n-1}.

Рассматриваемые в работе основные предельные множества непрерывного косого произведения отображений интервала обладают свойством проекции в следующем естественном смысле.

Лемма 1. *Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geqslant 2$). Тогда справедливы следующие равенства:*

$$\Omega(\widehat{f}_{n-1}) = pr_{n-1}(\Omega(F)) \quad [7];$$

$$\omega_{\widehat{f}_{n-1}}(\widehat{x}_{n-1}) = pr_{n-1}(\omega_F(x)) \ \ \textit{для любого} \ \ x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n.$$

Второе равенство в формулировке леммы 1 для косого произведения на компактном прямоугольнике в плоскости рассмотрено в [9].

Убедимся в справедливости этого равенства для любого $n \geqslant 2$. Действительно, пусть $x'(\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \in \omega_F(x)$, где $x = (\widehat{x}_{n-1}, x_n)$. Тогда в силу определения 3 и формул (2)–(3) для некоторой строго возрастающей последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ выполнено

$$\begin{aligned} &\lim_{m\to+\infty} \widehat{f}^{k_m}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}) = \widehat{x}'_{n-1}, \\ &\lim_{m\to+\infty} f_{n, \widehat{x}_{n-1}, k_m}(x_n) = x'_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Первое из равенств (4) означает, что справедливо включение

$$pr_{n-1}(\omega_F(x)) \subseteq \omega_{\widehat{f}_{n-1}}(\widehat{x}_{n-1}).$$

Покажем, что верно противоположное включение. В самом деле, пусть $\widehat{x}'_{n-1} \in \omega_{\widehat{f}_{n-1}}(\widehat{x}_{n-1})$, где $\widehat{x}_{n-1}$ — произвольная точка из I^{n-1}. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$, для которой удовлетворяется первое из равенств (4). Возьмем произвольно точку $x_n \in I_n$ и, используя компактность отрезка I_n, из последовательности точек $\{f_{n, \widehat{x}_{n-1}, k_m}(x_n)\}_{m\geqslant 1}$ выделим сходящуюся к некоторой точке $x'_n \in I_n$ подпоследовательность $\{f_{n, \widehat{x}_{n-1}, k_{m_j}}(x_n)\}_{j\geqslant 1}$, где $k_{m_j} < k_{m_{j+1}}$ при любом $j \geqslant 1$. Таким образом, справедливы равенство

$$\lim_{j\to+\infty} F^{k_{m_j}}(\widehat{x}_{n-1}, x_n) = (\widehat{x}'_{n-1}, x'_n)$$

и включение

$$\omega_{\widehat{f}_{n-1}}(\widehat{x}_{n-1}) \subseteq pr_{n-1}(\omega_F(x)), \ \text{ где } \ x = (\widehat{x}_{n-1}, x_n).$$

Полученное включение вместе с указанным выше противоположным включением доказывает второе равенство в формулировке леммы 1 при любом $n \geqslant 2$.

В дальнейшем нам потребуется следующее классическое свойство ω-предельных множеств.

Характеристическое свойство ω-предельных множеств [4,5]. *Пусть $G : X \to X$ — непрерывное отображение локально компактного пространства X в себя, а $\omega_G(x)$ — произвольное ω-предельное множество. Если V — подмножество $\omega_G(x)$, открытое в $\omega_G(x)$ и не совпадающее с $\omega_G(x)$, то замыкание множества $G(V)$ не содержится в V.*

Важную роль в рассмотрении данной работы играет информация о периодах периодических точек непрерывного косого произведения отображений интервала, заданного на n-мерной клетке ($n \geqslant 2$).

Сформулируем обобщенную теорему А. Н. Шарковского, доказанную в [10] для косых произведений отображений интервала на компактных клетках произвольной размерности $n \geqslant 2$.

Обобщенная теорема А. Н. Шарковского. *Пусть отображение $F \in SP^0(I^n)$ имеет периодическую орбиту периода $m > 1$. Тогда F имеет также и периодическую орбиту каждого периода l, предшествующего m ($l \prec m$) в порядке А. Н. Шарковского:*

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \ldots \prec \ldots \prec 2^2 \cdot 9 \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \ldots$$
$$\prec 2 \cdot 9 \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \ldots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3.$$

Обозначим $\tau(F)$ множество (наименьших) периодов периодических точек отображения $F \in SP^0(I^n)$.

Непосредственным следствием обобщенной теоремы А. Н. Шарковского является следующее утверждение.

Предложение 1. *Множество $\tau(F)$ простейшего косого произведения $F \in SP^0(I^n)$, $n \geqslant 2$, удовлетворяет равенству*
$$\tau(F) = \{1,\, 2,\, 2^2, \ldots,\, 2^\nu\}$$
при некотором ν, где $0 \leqslant \nu < +\infty$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $M = 2^\nu$.

Предложение 2 ([7]). *Пусть $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geqslant 2$). Тогда*
$$Per(\widehat{f}_{n-1}) = pr_{n-1}(Per(F)),$$
и для каждой точки $\widehat{x}_{n-1} \in Per(\widehat{f}_{n-1})$, где $m(\widehat{x}_{n-1})$ — ее (наименьший) период, выполнено
$$Per(f_{n,\,\widehat{x}_{n-1},\,m(\widehat{x}_{n-1})}) = (Per(F))(\widehat{x}_{n-1}).$$
Здесь $Per(\cdot)$ — множество периодических точек отображения; $(\cdot)(\widehat{x}_{n-1})$ — срез множества слоем над точкой $\widehat{x}_{n-1} \in I^{n-1}$, то есть
$$(\cdot)(\widehat{x}_{n-1}) = \{x_n : (\widehat{x}_{n-1},\, x_n) \in (\cdot)\}.$$
Более того, для (наименьшего) периода $m(x)$ любой точки $x(\widehat{x}_{n-1},\, x_n) \in Per(F)$ справедливо равенство
$$m(x) = m(\widehat{x}_{n-1}) \cdot m(x_n),$$
где $m(x_n)$ — наименьший период точки $x_n \in Per(f_{n,\,\widehat{x}_{n-1},\,m(\widehat{x}_{n-1})})$.

Основные результаты настоящей статьи представлены в разделах 1 и 2.

Так, в разделе 1 приведено описание неблуждающего множества простейших отображений из пространства $SP^0(I^n)$, $n \geqslant 2$.

В разделе 2 рассмотрены вопросы структуры ω-предельных множеств простейших косых произведений отображений интервала на многомерных клетках.

1. Описание неблуждающего множества простейших косых произведений отображений интервала

Структура неблуждающего множества непрерывных косых произведений с замкнутым множеством периодических точек фактоотображения, заданных на компактном прямоугольнике плоскости, изучалась в [1] (см. также [2]). В статье [7] получены некоторые частные результаты по описанию структуры неблуждающего множества простейших косых произведений непрерывных одномерных отображений на многомерных клетках, цилиндрах и торах (если множество периодических точек непусто в случае отображений цилиндров и торов).

В этой части статьи мы приведем завершенные результаты изучения структуры неблуждающего множества простейших отображений из пространства $SP^0(I^n)$, $n \geqslant 2$. Отметим, что предложенный здесь способ доказательства теоремы о неблуждающем множестве является новым и для $n = 2$.

По-видимому, первый пример непрерывного косого произведения (не являющегося простейшим) в компактном прямоугольнике плоскости, отображения в слоях над периодическими точками фактоотображения которого имеют слабо неблуждающие, но блуждающие точки каждого такого отображения в слое, приведен в статье [11]. В процессе доказательства основной теоремы этой части работы мы исключим существование такого рода точек у отображений в слоях над периодическими точками фактоотображения простейшего косого произведения из $SP^0(I^n)$. Для этого нам потребуются определения слабо неблуждающих точек и Ω-взрыва в непрерывных отображениях отрезка, а также свойства непрерывных отображений отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Обозначим $C^0(J)$ пространство всех непрерывных отображений отрезка J в себя со стандартной C^0-нормой равномерной сходимости. База топологии в $C^0(J)$ задается системой ε-шаров $B^0_\varepsilon(f)$ при всех $f \in C^0(J)$ и всех $\varepsilon > 0$.

Начнем с определения слабо неблуждающей точки непрерывного отображения отрезка (см., например, [12, гл. 1, § 3], [13, гл. 1, § 2]).

Определение 4. *Точка $x_* \in J$ называется слабо неблуждающей для отображения $f \in C^0(J)$, если для любой окрестности $U(x_*)$ точки x_* в J и любой ε-окрестности $B^0_\varepsilon(f)$ отображения $f \in C^0(J)$ найдутся отображение $\varphi \in B^0_\varepsilon(f)$ и натуральное число k такие, что*

$$U(x_*)\bigcap \varphi^k(U(x_*)) \neq \emptyset.$$

Множество слабо неблуждающих точек $f \in C^0(J)$ обозначим $\Omega_w(f)$.

Понятие слабой неблуждаемости точек фазового пространства динамической системы тесно связано с явлением C^0- Ω-взрыва.

Определение 5. *Говорим, что отображение $f \in C^0(J)$ допускает C^0- Ω-взрыв, если существует $\delta > 0$ такое, что в любой окрестности $B^0_\varepsilon(f)$ отображения f в пространстве $C^0(J)$ найдется отображение φ, для которого*

$$\Omega(\varphi) \not\subseteq U_\delta(\Omega(f)).$$

Здесь $U_\delta(\Omega(f))$ есть δ-окрестность в J неблуждающего множества $\Omega(f)$ отображения f.

Важно отметить, что явление Ω-взрыва в диффеоморфизмах было обнаружено в первое десятилетие создания гиперболической теории в связи с теоремой об Ω-устойчивости диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A [14–16]. Существенный вклад в изучение гомоклинического Ω-взрыва (в гладких топологиях) внесли Л. П. Шильников и его ученики [17, 18]. Гомоклинический Ω-взрыв в C^2-гладких эндоморфизмах окружности изучался в [19]. Новый сценарий

C^0- Ω-взрыва в C^1-гладких простейших косых произведениях отображений интервала, заданных на компактном прямоугольнике плоскости, описан в [20] (см. также [2]).

Следующее утверждение позволяет применять слабо неблуждающие точки, в частности, непрерывных отображений отрезка в себя к описанию C^0- Ω-взрыва (см., например, [12, гл. 1, § 3]).

Предложение 3. *Отображение $f \in C^0(J)$ допускает C^0- Ω-взрыв в том и только том случае, если*

$$\Omega(f) \neq \Omega_w(f).$$

Сформулируем необходимые результаты о непрерывных отображениях отрезка с замкнутым множеством периодических точек.

Предложение 4. *Отображение $f \in C^0(J)$ с замкнутым множеством периодических точек обладает следующими свойствами:*

(4.1) *множество (наименьших) периодов периодических точек f удовлетворяет равенству $\tau(f) = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^\nu\}$, где $0 \leqslant \nu \leqslant +\infty$* [21]*;*

(4.2) *для каждой точки $x^0 \in Per(f)$ найдется окрестность $U(x^0)$ такая, что*

$$U(x^0) \bigcap f^k(U(x^0)) \neq \emptyset$$

тогда и только тогда, когда k кратно (наименьшему) периоду $m(x^0)$ точки x^0 [22].

Предложение 5. *Для отображения $f \in C^0(J)$ следующие утверждения эквивалентны:*

(5.1) *множество $Per(f)$ замкнуто;*

(5.2) *справедливы равенства*

$$\Omega(f) = \Omega_w(f) = Per(f) \quad [21,23];$$

(5.3) *ω-предельное множество $\omega_f(x)$ траектории любой точки $x \in J$ есть периодическая орбита* [21,24].

Предложение 6. *Для C^1-гладкого отображения $f : J \to J$ следующие утверждения эквивалентны:*

(6.1) *множество $Per(f)$ замкнуто;*

(6.2) *множество $\tau(f)$ ограничено, и $\tau(f) = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^\nu\}$ при некотором ν, $0 \leqslant \nu < +\infty$* [25].

Напомним, что косому произведению $F \in SP^0(I^n)$ и произвольной его k-той итерации $(k \geqslant 1)$ соответствует непрерывное функциональное отображение $\rho_k : I^{n-1} \to C^0(I_n)$, называемое C^0-представлением, такое, что

$$\rho_k(\widehat{x}_{n-1}) = f_{n,\widehat{x}_{n-1},k}; \text{ при } k = 1 \text{ полагаем } f_{n,\widehat{x}_{n-1},k} = f_{n,\widehat{x}_{n-1}}$$

для всех $\widehat{x}_{n-1} \in I^{n-1}$ [8, гл. 0, § 0.3].

При доказательстве теоремы о неблуждающем множестве простейшего отображения $F \in SP^0(I^n)$ будет использовано и определение Ω-взрыва в индивидуальном отображении в слое в терминах свойств вспомогательных многозначных функций, связанных с косым произведением. Определение такого рода функций для косых произведений одномерных отображений с фазовым пространством произвольной размерности не меньшей 3 имеется в [26,27]. Начнем с удобного представления всевозможных итераций косого произведения в виде композиции более простых отображений, одно из которых $F_k : I^n \to I^n$ $(k \geqslant 1)$ удовлетворяет равенству

$$F_k(\widehat{x}_{n-1},\, x_n) = (id_{I^{n-1}}(\widehat{x}_{n-1}),\ f_{n,\,\widehat{x}_{n-1},\,k}(x_n)), \tag{5}$$

а другое $F_{k,\,1} : I^n \to I^n$ — равенству

$$F_{k,\,1}(\widehat{x}_{n-1},\, x_n) = (\widehat{f}^{\,k}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}),\ id_{I_n}(x_n)), \tag{6}$$

где $id(\cdot)$ — тождественное отображение множества. С использованием отображений, заданных формулами (5)–(6), получаем

$$F^k = F_{k,\,1} \circ F_k. \tag{7}$$

Определение 6. *Под вспомогательными функциями для неблуждающего множества отображения $F \in SP^0(I^n)$, удовлетворяющего условию $\widehat{f}_{n-1}(\Omega(\widehat{f}_{n-1})) = \Omega(\widehat{f}_{n-1})$, мы понимаем многозначные функции $\Omega^F_k : \Omega(\widehat{f}_{n-1}) \to 2^{I_n}$ такие, что*

$$\Omega^F_k(\widehat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n,\,\widehat{x}_{n-1},\,k}) \ \text{ для любого } \ \widehat{x}_{n-1} \in \Omega(\widehat{f}_{n-1}).$$

Здесь 2^{I_n} означает, как обычно, топологическое пространство всех замкнутых подмножеств отрезка I_n, наделенное экспоненциальной топологией [28, Ch. 1, § 17, I].

Будем рассматривать *расширенные вспомогательные функции* $\Omega^F_{k,\,ex}$, которые зададим в какой-либо (определяемой постановкой задачи) окрестности $\widehat{U}_{n-1}(\Omega(\widehat{f}_{n-1}))$ множества $\Omega(\widehat{f}_{n-1})$ в I^{n-1}, полагая

$$\Omega^F_{k,\,ex}(\widehat{x}_{n-1}) = \Omega(f_{n,\,\widehat{x}_{n-1},\,k}) \ \text{ для каждого } \ \widehat{x}_{n-1} \in \widehat{U}_{n-1}(\Omega(\widehat{f}_{n-1})).$$

Обратим внимание на то, что в силу определения 6 вспомогательные функции (как и расширенные вспомогательное функции) определены для отображений F_k с тождественным фактор-отображением.

Точка $\widehat{x}^*_{n-1} \in \widehat{U}_{n-1}(\Omega(\widehat{f}_{n-1}))$ называется *точкой полунепрерывности сверху* расширенной вспомогательной функции $\Omega^F_{k,\,ex}$, если для любой ε-окрестности $U^{\varepsilon}_n(\Omega(f_{n,\,\widehat{x}^*_{n-1},\,k}))$ множества $\Omega(f_{n,\,\widehat{x}^*_{n-1},\,k})$ в I_n найдется δ-окрестность $\widehat{U}^{\delta}_{n-1}(\widehat{x}^*_{n-1})$ точки $\widehat{x}^*_{n-1}$ в I^{n-1} такая, что для каждого $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{U}^{\delta}_{n-1}(\widehat{x}^*_{n-1})$ выполнено

$$\Omega^F_{k,\,ex}(\widehat{x}_{n-1}) \subset U^{\varepsilon}_n(\Omega(f_{n,\,\widehat{x}^*_{n-1},\,k})) \quad [28, \text{гл. } 1, \S\, 17, \text{I}] \tag{8}$$

Определение 7. *Пусть $F \in SP^0(I^n)$. Говорим, что отображение в слое $f_{n,\,\widehat{x}^*_{n-1}}$ над $\widehat{f}_{n-1}$-неподвижной точкой $\widehat{x}^*_{n-1}$ допускает C^0- Ω-взрыв в семействе отображений в слоях, если существует последовательность расширенных на множество $\widehat{U}_{n-1}(\Omega(\widehat{f}_{n-1}))$ вспомогательных функций $\{\Omega^F_{k_m,\,ex}\}_{m\geqslant 1}$ такая, что $\widehat{x}^*_{n-1}$ не является точкой полунепрерывности сверху каждой функции $\Omega^F_{k_m,\,ex}$ $(m \geqslant 1)$.*

Сформулируем и докажем основной результат этой части статьи.

Теорема 1. *Для неблуждающего множества $\Omega(F)$ простейшего косого произведения $F \in SP^0(I^n)$ $(n \geqslant 2)$ справедливо равенство*

$$\Omega(F) = Per(F). \tag{9}$$

Доказательство.

1. Не уменьшая общности рассмотрений, будем предполагать, что $M = 1$. В противном случае следует перейти к рассмотрению отображения F^M, так как в силу предложения 2 и утверждения (4.2) предложения 4

$$\Omega(F) = \Omega(F^M).$$

При сделанном предположении $Per(F) = Fix(F)$, где $Fix(\cdot)$ — множество неподвижных точек отображения. Используя предложение 2, получаем отсюда, что $Per(\widehat{f}_{n-1}) = Fix(\widehat{f}_{n-1})$ и при любом $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ выполнено $Per(f_{n,\widehat{x}_{n-1}}) = Fix(f_{n,\widehat{x}_{n-1}})$.

2. Для доказательства теоремы 1 будем использовать метод математической индукции по размерности n. Утверждение теоремы 1 справедливо для $n = 2$ (см., например, [1]). Предположим, что оно верно для $n-1$, $n \geqslant 3$, и установим его справедливость для n.

2.1. Покажем сначала, что

$$\Omega(F_{|Fix(\widehat{f}_{n-1})\times I_n}) = Fix(F). \tag{10}$$

Если при любом $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ (здесь $Fix(\widehat{f}_{n-1}) = \Omega(\widehat{f}_{n-1})$ в силу предположения индукции) верно равенство $f_{n,\widehat{x}_{n-1}} = id_{I_n}$ (где id_{I_n} — тождественное отображение отрезка I_n), то в силу леммы 1 утверждение теоремы 1 справедливо. Предположим, что для некоторого $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ имеет место неравенство

$$f_{n,\widehat{x}_{n-1}} \neq id_{I_n}.$$

Возьмем произвольно точку $x_n \in I_n \setminus Fix(f_{n,\widehat{x}_{n-1}})$. Воспользуемся утверждением (5.2) предложения 5. Тогда

$$x_n \notin \Omega_w(f_{n,\widehat{x}_{n-1}}).$$

Используя определение 4, получаем отсюда, что существуют окрестность $U_n^0(x_n)$ точки x_n в I_n и ε_0-окрестность $B^0_{\varepsilon_0}(f_{n,\widehat{x}_{n-1}})$ отображения в слое $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}$ такие, что для любого $f_{n,\widehat{x}'_{n-1}} \in B^0_{\varepsilon_0}(f_{n,\widehat{x}_{n-1}})$, где $\widehat{x}'_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$, и любого $k \geqslant 1$ выполнено

$$U_n^0(x_n) \bigcap f^k_{n,\widehat{x}'_{n-1}}(U_n^0(x_n)) = \emptyset.$$

Воспользуемся непрерывностью C^0-представления $\rho_1 : I^{n-1} \to C^0(I_n)$ и по положительному числу ε_0 укажем положительное число δ_0 так, что при любых $\widehat{x}'_{n-1} \in I^{n-1}$ и, в частности, при $\widehat{x}'_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ таких, что $\widehat{x}'_{n-1} \in \widehat{U}^{\delta_0}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1})$, где $\widehat{U}^{\delta_0}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1})$ есть δ_0-окрестность точки $\widehat{x}_{n-1}$ в I^{n-1}, справедливо

$$f_{n,\widehat{x}'_{n-1}} \in B^0_{\varepsilon_0}(f_{n,\widehat{x}_{n-1}}).$$

Пусть

$$U((\widehat{x}_{n-1}, x_n)) = (\widehat{U}^{\delta_0}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}) \times U_n(x_n)) \bigcap (Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n)$$

есть относительная окрестность точки $(\widehat{x}_{n-1}, x_n)$ в $Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times I_n$. Тогда в силу предыдущего при любых $k \geqslant 1$ выполнено

$$U((\widehat{x}_{n-1}, x_n)) \bigcap F^k_{|Fix(\widehat{f}_{n-1})\times I_n}(U((\widehat{x}_{n-1}, x_n))) = \emptyset.$$

Таким образом, любая точка

$$(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times (I_n \setminus Fix(f_{n,\widehat{x}_{n-1}}))$$

является блуждающей для отображения $F_{|Fix(\widehat{f}_{n-1})\times I_n}$. Равенство (10) доказано. Отсюда следует также, что если $I^{n-1} = Fix(\widehat{f}_{n-1})$, то в рассматриваемом случае доказательство теоремы 1 закончено.

2.2. Пусть

$$I^{n-1} \neq Fix(\widehat{f}_{n-1}).$$

Если для любой точки $\widehat{x}_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ выполнено $Fix(f_{n,\widehat{x}_{n-1}}) = I_n$, (то есть $f_{n,\widehat{x}_{n-1}} = id_{I_n}$), то теорема 1 верна (см. п. 2.1 доказательства).

Предположим, что для некоторой точки $\widehat{x}^*_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ справедливо

$$Fix(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}}) \neq I_n.$$

Если $\widehat{x}^*_{n-1}$ не является предельной для множества $I^{n-1} \setminus Fix(\widehat{f}_{n-1})$, то, применяя рассуждения, приведенные в п. 2.1 доказательства, убеждаемся в том, что все точки множества $\{\widehat{x}^*_{n-1}\} \times \times (I_n \setminus Fix(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}}))$ являются блуждающими для F.

Рассмотрим случай, когда $\widehat{x}^*_{n-1} \in Fix(\widehat{f}_{n-1})$ — предельная точка множества $I^{n-1} \setminus Fix(\widehat{f}_{n-1})$. Возьмем произвольно и зафиксируем окрестность $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$ множества $Fix(\widehat{f}_{n-1})$ в I^{n-1}. В силу предложения 5 (см. утверждение (5.2)) отображение в слое $f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}}$ не допускает C^0- Ω-взрыв, в частности, в семействе отображений в слоях над точками множества $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$.

Используем отрицание определения 7. Тогда для любой расширенной на множество $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$ вспомогательной функции $\Omega^F_{k,\,ex}$ $(k \geqslant 1)$ точка $\widehat{x}^*_{n-1}$ является точкой полунепрерывности сверху. Следовательно, для любой ε-окрестности $U^{\varepsilon}_n(\Omega(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1},k}))$ множества $\Omega(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1},k})$ в I_n найдется δ_k-окрестность $\widehat{U}^{\delta_k}_{n-1}(\widehat{x}^*_{n-1})$ точки $\widehat{x}^*_{n-1}$ в $\widehat{U}_{n-1}(\Omega(\widehat{f}_{n-1}))$ такая, что для каждого $\widehat{x}_{n-1} \in \widehat{U}^{\delta_k}_{n-1}(\widehat{x}^*_{n-1})$ выполнено включение (8).

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \inf_{k\geqslant 1} \delta_k(\varepsilon).$$

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ справедливо $\delta(\varepsilon) > 0$.

Предположим противное. Тогда при некотором $\varepsilon' > 0$ верно равенство $\delta(\varepsilon') = 0$. Будем выбирать максимальные положительные числа $\delta_k(\varepsilon')$, для которых удовлетворяется определение полунепрерывности сверху функций $\Omega^F_{k,\,ex}$ в точке $\widehat{x}^*_{n-1}$. Последнее означает, что для каждого $\delta_k(\varepsilon')$ найдется $\delta_{k'}(\varepsilon') < \delta_k(\varepsilon')$ при $k' > k$ такое, что при некотором $\widehat{x}_{n-1}(k') \in \widehat{U}^{\delta_k}_{n-1}(\widehat{x}^*_{n-1}) \setminus \widehat{U}^{\delta_{k'}}_{n-1}(\widehat{x}^*_{n-1})$ верно соотношение

$$\Omega^F_{k',\,ex}(\widehat{x}_{n-1}(k')) \not\subset U^{\varepsilon'}_n(\Omega(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1},k'})). \tag{11}$$

Соотношение (11) вместе с определением 7 и равенством $\Omega(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}}) = \Omega(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1},k})\,(k \geqslant 1)$ означает, что отображение $f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}}$ допускает C^0- Ω-взрыв. Последнее противоречит предложению 3 и утверждению (5.2) предложения 5. Таким образом, показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует универсальное (не зависящее от k) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, для которого удовлетворяется определение полунепрерывности сверху в точке $\widehat{x}^*_{n-1}$ функций $\Omega^F_{k,\,ex}$ при всех $k \geqslant 1$.

Возьмем произвольно точку x^*_n во множестве $I_n \setminus Fix(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}})$. Положим

$$\varepsilon_* = \frac{1}{3} d_n(x^*_n,\, Fix(f_{n,\widehat{x}^*_{n-1}})),$$

где $d_n((\cdot)^*,\,(\cdot))$ — расстояние от точки до множества на I^n. Используя свойство полунепрерывности сверху расширенных на $\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}))$ вспомогательных функций $\Omega^F_{k,\,ex}$, по числу

$\varepsilon_* > 0$ укажем положительное, не зависящее от k число $\delta = \delta(\varepsilon_*)$ так, что при любом $k \geqslant 1$ и $\varepsilon = \varepsilon_*$ удовлетворяется включение (8). Воспользуемся формулами (5)–(7). Так как отображение (6) не меняет отображения в слоях у (5) (и, следовательно, у F^k при всех натуральных k), то в силу выбора ε_* получаем отсюда, что

$$\widehat{U}_{n-1}\big(Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times U_n^{\varepsilon_*}(x_n^*)\big) \bigcap F^k\big(\widehat{U}_{n-1}(Fix(\widehat{f}_{n-1}) \times U_n^{\varepsilon_*}(x_n^*))\big) = \emptyset$$

при любом $k \geqslant 1$.

Последнее завершает доказательство равенства (9) для отображения $F \in SP^0(I^n)$ при любых $n \geqslant 2$. Теорема 1 доказана. □

Непосредственным следствием теоремы 1, предложения 2 и предложения 6 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Для отображения $F \in SP^1(I^n)$ ($n \geqslant 2$) следующие утверждения эквивалентны:*

(2.1) *множество $Per(F)$ замкнуто;*

(2.2) *множество $\tau(F)$ ограничено, и $\tau(F) = \{1, 2, 2^2, \ldots, 2^\nu\}$ при некотором ν, $0 \leqslant \nu < +\infty$;*

(2.3) $\Omega(F) = Per(F)$.

Изучение ω-предельных множеств простейших косых произведений непосредственно связано с результатами раздела 1. Начнем со следующего утверждения, являющегося прямым следствием теоремы 1.

Предложение 7. *Для простейшего отображения $F \in SP^0(I^n)$ справедливо равенство*

$$\bigcup_{x \in I^n} \omega_F(x) = \Omega(F) = Per(F).$$

Приведем важное для дальнейшего рассмотрения следствие теоремы 1, содержащее начальную информацию о структуре ω-предельных множеств простейших косых произведений.

Предложение 8. *Пусть отображение $F \in SP^0(I^n)$ является простейшим. Тогда ω-предельное множество $\omega_{F^M}(x)$ произвольной точки $x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ связно.*

Действительно, в противном случае существуют непересекающиеся замкнутые собственные подмножества V_1 и V_2 ω-предельного множества $\omega_{F^M}(x)$ такие, что

$$\omega_{F^M}(x) = V_1 \bigcup V_2.$$

Так как I^n — отделимое пространство, то каждое из множеств V_1 и V_2 открыто в $\omega_{F^M}(x)$. В силу предложения 7 все точки $\omega_{F^M}(x)$ неподвижные для F^M. Поэтому

$$F^M(V_k) = \overline{F^M(V_k)} = V_k \ \ (k = 1, 2).$$

Последнее противоречит характеристическому свойству ω-предельных множеств.

2. Описание ω-предельных множеств простейших отображений из $SP^0(I^n)$

В этой части статьи мы ответим на вопрос о том, какую топологическую структуру имеют ω-предельные множества простейших отображений из пространства $SP^0(I^n)$, $n \geqslant 3$ (случай $n = 2$ детально рассмотрен в [3]), и, в частности, получим достаточные условия, при выполнении которых ω-предельное множество траектории есть периодическая орбита.

Важная часть данного раздела посвящена рассмотрению специальных рядов, построенных по траекториям, сходимость или, наоборот, расходимость которых выделяет различные типы ω-предельных множеств, которые реализуются для траекторий простейших косых произведений. Идея использования рядов в исследовании асимптотического поведения траекторий косых произведений восходит к [29] и связана с поставленной в этой работе задачей нахождения движений, занимающих промежуточное положение между простейшими периодическими и сложными гиперболическими движениями.

Используя предложение 8, докажем следующее утверждение, анонсированное в [7]. Напомним, что через M обозначен наибольший элемент множества $\tau(F)$.

Теорема 3. *Пусть $F \in SP^0(I^n)$, $n \geqslant 2$ — простейшее косое произведение отображений интервала. Тогда для любой точки $x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ существуют неподвижная точка x_1^0 отображения f_1^M и отрезки $I_2' \subseteq I_2, \ldots, I_n' \subseteq I_n$ (возможно, вырожденные) такие, что ω-предельное множество $\omega_{F^M}(x)$ траектории точки x относительно F^M имеет вид*

$$\omega_{F^M}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^{n} I_j', \tag{12}$$

причем $\omega_{F^M}(x)$ состоит из неподвижных точек F^M.

Доказательство.

1. Утверждение теоремы 3 справедливо, если $n = 2$ (см. [3]). Предположим, что $n \geqslant 3$, и утверждение теоремы 3 верно для $n - 1$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$\omega_{\widehat{f}_{n-1}^M}(\widehat{x}_{n-1}) = pr_{n-1}(\omega_{F^M}(x)) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^{n-1} I_j',$$

где $x_1^0 \in Fix(f_1^M)$, $I_2', \ldots, I_{n-1}'$ — отрезки (возможно, вырожденные), причем $I_j' \subseteq I_j$, $2 \leqslant j \leqslant n-1$.

Обозначим через $L_n \subseteq I_n$ замкнутое множество предельных точек последовательности

$$\{f_{n,\widehat{x}_{n-1},Mk}(x_n)\}_{k\geqslant 1}.$$

Из предложения 8 следует связность L_n в I_n. Тогда L_n — отрезок в I_n, возможно вырожденный. Положим $L_n = I_n'$. При сделанном предположении имеем:

$$\omega_{F^M}(x) = \{x_1^0\} \times \prod_{j=2}^{n} I_j'.$$

В силу предложения 7 верно включение $\omega_{F^M} \subset Fix(F^M)$. Теорема 3 доказана. □

Вопрос существования ω-предельных множеств (у простейших косых произведений), представление которых по формуле (12) содержит невырожденные отрезки, решен только лишь в случаях, когда фазовое пространство имеет размерность $n = 2$ или 3 (см., например, [3,30,31]). Более того, в статье [31] построен пример простейшего косого произведения, заданного на трехмерном кубе и имеющего двумерное ω-предельное множество.

Покажем, что свойство траектории иметь ω-предельное множество, представление которого по формуле (12) содержит невырожденные отрезки, связано с расходимостью некоторых специальных рядов, построенных по исследуемой траектории.

Теорема 4. *Для простейшего отображения $F \in SP^0(I^n)$ ($n \geqslant 2$) следующие утверждения эквивалентны:*

(4.1) *Существует точка $x(\widehat{x}_{n-1}, x_n) \in I^n$ такая, что представление ω-предельного множества ее траектории относительно F^M по формуле (12) содержит невырожденный отрезок $I'_{j'}$ $(2 \leqslant j' \leqslant n)$;*

(4.2) *ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \varphi_{\widehat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}) \tag{13}$$

— расходящийся (знакопеременный), где

$$\varphi_{\widehat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}) = \begin{cases} f_{j', \widehat{x}_{j'-1}, M}(x_{j'}), & \text{если} \quad p = 1; \\ f_{j', \widehat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}) - f_{j', \widehat{x}_{j'-1}, M(p-1)}(x_{j'}), & \text{если} \quad p \geqslant 2. \end{cases}$$

Доказательство.

1. Обозначим через S'_q q-тую ($q \geqslant 1$) частичную сумму ряда (13), где

$$S'_q = f_{j', \widehat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'}). \tag{14}$$

Из (14) следует ограниченность последовательности $\{S'_q\}_{q \geqslant 1}$. Поэтому если ряд (13) расходится, то он знакопеременный.

2. Пусть (4.1) верно. Тогда в силу равенства (14) последовательность $\{S'_q\}_{q \geqslant 1}$ расходится вместе с рядом (13).

3. Пусть (4.2) верно. Тогда из (14) следует, что $\{f_{j', \widehat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'})\}_{p \geqslant 1}$ — расходящаяся последовательность, содержащая не менее двух предельных точек. Отсюда в силу теоремы 3 множество предельных точек последовательности $\{f_{j', \widehat{x}_{j'-1}, Mp}(x_{j'})\}_{p \geqslant 1}$ — невырожденный отрезок. Теорема 4 доказана. □

Корректность следующего определения вытекает из предложения 2 и теоремы 3.

Определение 8. *Пусть $F \in SP^0(I^n)$ — простейшее отображение. Точка $x^0(\widehat{x}^0_{n-1}, x^0_n) \in Fix(F^M)$ называется исключительной неподвижной точкой отображения F^M, если существует j, $2 \leqslant j \leqslant n$, такое, что срез $\big(Fix(\widehat{f}_j)\big)(\widehat{x}^0_{j-1})$ множества $Fix(\widehat{f}_j)$ слоем над $\widehat{x}^0_{j-1}$ (по поводу среза множества см. Введение) содержит невырожденный отрезок. Здесь $\widehat{f}_n \equiv F$, а $\widehat{x}^0_{n-1} = (\widehat{x}^0_{j-1}, \ldots, x^0_{n-1})$ при $j < n$.*

Множество исключительных неподвижных точек простейшего отображения $F^M \in SP^0(I^n)$ обозначим $Fix_e(F^M)$.

Как следует из теоремы 3, ω-предельное множество траектории (относительно простейшего косого произведения) произвольной точки n-мерной клетки ($n \geqslant 2$) есть либо периодическая орбита, либо орбита периодической j-мерной грани ($1 \leqslant j \leqslant n - 1$). Поэтому следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 3 и определения 8.

Предложение 9. *Пусть $F \in SP^0(I^n)$ — простейшее отображение, а $Fix_e(F^M) = \emptyset$. Тогда ω-предельное множество F-траектории произвольной точки из I^n есть периодическая орбита.*

Следствие 1. *Пусть все периодические точки отображения $F \in SP^1(I^n)$ являются гиперболическими. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1.1) *множество периодических точек F замкнуто;*

(1.2) ω*-предельное множество F-траектории произвольной точки из I^n есть периодическая орбита.*

Далее на первом этапе изучения ω-предельных множеств простейших косых произведений на многомерных клетках мы рассмотрим лишь нульмерные и одномерные ω-предельные множества.

Следующее утверждение представляет собой приспособленный к рассматриваемому случаю вариант леммы Адамара для функции нескольких переменных (ср., например, с [32, гл. 6, § 2], [33, гл. 8, § 6, п. 5]).

Лемма 2. *Пусть $F \in SP^0(I^n)$ — простейшее косое произведение ($n \geqslant 2$), и существует точка $x^0(\widehat{x}^0_{n-1}, x^0_n) \in Fix_e(F^M)$ такая, что наименьшее из чисел $2 \leqslant j \leqslant n$, при котором срез $(Fix(\widehat{f}^M_j))(\widehat{x}^0_{j-1})$ содержит невырожденный отрезок, равно n. Пусть I'_n — такой отрезок, а функция $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на $\{\widehat{x}^0_{n-1}\} \times I'_n$.*

Тогда существуют непрерывные на $\{\widehat{x}^0_{n-1}\} \times I'_n$ функции

$$\psi_{n,1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n), \ldots, \psi_{n,n-1}(\widehat{x}_{n-1}, x_n),$$

определенные на n-мерной клетке $\prod_{i=1}^{n-1} I_i \times I'_n$, такие, что справедливо равенство

$$f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n) = x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{n,i}(\widehat{x}_{n-1}, x_n)(x_i - x^0_i); \tag{15}$$

более того,

$$\psi_{n,i}(\widehat{x}^0_{n-1}, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f_{n,\widehat{x}^0_{n-1}}(x_n).$$

Лемма 2 (см. формулу (15)) позволяет преобразовать ряд (13) и, в частности, получить аналитические необходимые условия существования одномерных ω-предельных множеств специального вида у простейших отображений (1) на многомерных клетках.

Обозначим через $W^s(\widehat{x}^0_{n-1}, \widehat{f}^M_{n-1})$ *устойчивое многообразие неподвижной точки* $\widehat{x}^0_{n-1}$ *отображения* $\widehat{f}^M_{n-1}$, где

$$W^s(\widehat{x}^0_{n-1}, \widehat{f}^M_{n-1}) = \{\widehat{x}_{n-1} \in I^{n-1} : \lim_{k \to +\infty} \widehat{f}^{Mk}_{n-1}(\widehat{x}_{n-1}) = \widehat{x}^0_{n-1}\}.$$

Теорема 5. *Пусть отображение $F \in SP^0(I^n)$ является простейшим, причем для ω-предельного множества некоторого $x'(\widehat{x}'_{n-1}, x'_n) \in I^n$ выполнено*

$$\omega_{F^M}(x') = \{\widehat{x}^0_{n-1}\} \times I'_n, \tag{16}$$

где I'_n — невырожденный отрезок. Пусть функция $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n)$ дифференцируема по совокупности переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на отрезке $\{\widehat{x}^0_{n-1}\} \times I'_n$. Тогда

$$\widehat{x}'_{n-1} \in W^s(\widehat{x}^0_{n-1}, \widehat{f}^M_{n-1}) \setminus \{\widehat{f}^{-Mk}_{n-1}(\widehat{x}^0_{n-1})\}_{k \geqslant 1}, \tag{17}$$

где $\widehat{f}^{-Mk}_{n-1}(\cdot)$ — полный прообраз порядка Mk точки относительно $\widehat{f}_{n-1}$, и существует счётное подмножество $\mathbb{N}(I'_n)$ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, где

$$\mathbb{N}(I'_n) = \{p \in \mathbb{N} : f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n), f_{n,\widehat{x}'_{n-1},M(p+1)}(x'_n) \in I'_n\}, \tag{18}$$

такое, что ряд

$$\sum_{p \in \mathbb{N}(I'_n)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \psi_{n,i}\big(\widehat{f}^{Mp}_{n-1}(\widehat{x}'_{n-1}),\, f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n)\big)(f_{i,\widehat{x}'_{i-1},Mp}(x'_i) - x^0_i) \right) \tag{19}$$

расходится. Здесь $f_{1,\widehat{x}'_0,Mp}(x'_1) \equiv f_1^{Mp}(x'_1)$.

Доказательство.

1. Заметим, что $\widehat{x}'_{n-1} \notin \{\widehat{f}_{n-1}^{-Mk}(\widehat{x}^0_{n-1})\}_{k\geqslant 1}$. Действительно, в противном случае в силу предложения 5 (см. утверждение (5.2)) множество $\omega_{F^M}(x')$, так же, как и $\omega_{F^M}((\widehat{x}^0_{n-1},\ f_{n,\widehat{x}^0_{n-1},Mk_0}(x'_n))$, где $\widehat{x}^0_{n-1} = \widehat{f}^{Mk_0}_{n-1}(\widehat{x}'_{n-1})$, есть $\widehat{f}^M_{n-1}$-неподвижная точка. Последнее противоречит равенству (16).

2. Ряд

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\psi_{n,i}\big(\widehat{f}^{Mp}_{n-1}(\widehat{x}'_{n-1}),\ f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n)\big)\big(f_{i,\widehat{x}'_{i-1},Mp}(x'_i)-x^0_i\big)\right) \tag{20}$$

получен из (13) при $j' = n$ с использованием формулы (15). Поэтому в силу теоремы 4 при выполнении равенства (16) этот ряд расходится.

3. Положим $I'_n = [a'_n,\ b'_n]$. Во множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ выделим два подмножества:

$$\mathbb{N}' = \{p : f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n) < a'_n\} \ \text{ и } \ \mathbb{N}'' = \{p : f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n) > b'_n\}.$$

Тогда имеем

$$\mathbb{N} = \mathbb{N}(I'_n)\bigcup\mathbb{N}'\bigcup\mathbb{N}''.$$

Поэтому если каждое из множеств $\mathbb{N}'$ и $\mathbb{N}''$ конечно, то ряд (19) расходится вместе с рядом (20).

Пусть хотя бы одно из множеств $\mathbb{N}'$ или $\mathbb{N}''$ счетно. Тогда в силу теоремы 3 последовательность $\{f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n)\}_{p\in\mathbb{N}'}$ или $\{f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n)\}_{p\in\mathbb{N}''}$ сходится к точке a'_n или b'_n соответственно. Поэтому удаление из ряда (20) членов с номерами из множества $\mathbb{N}'\bigcup\mathbb{N}''$ также приводит к расходящемуся ряду (19). Теорема 5 доказана[1]. □

Обозначим через $SP_s(I^n)$ подмножество множества простейших отображений из $SP^0(I^n)$ со следующими свойствами:

(i) $\widehat{f}_{n-1} \in SP^1(I^{n-1})$ при $n \geqslant 3$ и $\widehat{f}_{n-1} \in C^1(I_{n-1})$ при $n = 2$;

(ii) $\frac{\partial}{\partial x_n} f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n) \in C^0(I^n)$;

(iii) функция $f_{n,\widehat{x}_{n-1}}$ дифференцируема по совокупности переменных $x_1,\ \dots,\ x_{n-1}$ на I^n.

В силу теоремы 2 отображения с замкнутым множеством периодических точек из пространства $SP^1(I^n)$ образуют собственное подмножество выделенного выше множества $SP_s(I^n)$.

Следствие 2. *Пусть $F \in SP_s(I^n)$, $x^0(\widehat{x}^0_{n-1},\ x^0_n) \in Fix_e(F^M)$, и наименьшее из чисел $2 \leqslant j \leqslant n$, при котором срез $(Fix(\widehat{f}^M_j))(\widehat{x}^0_{j-1})$ содержит невырожденный отрезок, равно n.*

Если ряд (20) сходится, то ω-предельное множество траектории точки $x'(\widehat{x}'_{n-1},\ x_n) \in I^n$ относительно F есть периодическая орбита.

Следствие 3. *Пусть $F \in SP_s(I^n)$, $x^0(\widehat{x}^0_{n-1},\ x^0_n) \in Fix_e(F^M)$, и наименьшее из чисел $2 \leqslant j \leqslant n$, при котором срез $(Fix(\widehat{f}^M_j))(\widehat{x}^0_{j-1})$ содержит невырожденный отрезок, равно n.*

(3.1) *Если ряд*

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\psi_{n,i}\big(\widehat{f}^{Mp}_{n-1}(\widehat{x}'_{n-1}),\ f_{n,\widehat{x}'_{n-1},Mp}(x'_n)\big)\right|$$

сходится, то сходится и ряд (20).

(3.2) *Если частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{n,\widehat{x}_{n-1},Mp}(x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, ограничены на I^n, а ряд*

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left|f_{i,\widehat{x}'_{i-1},Mp}(x'_i) - x^0_i\right|$$

сходится, то сходится и ряд (20).

---

[1]Подробные рассуждения (для косого произведения отображений интервала с двумерным фазовым пространством) приведены в [3].

Теорема 6. *Пусть $F \in SP_s(I^n)$, все периодические точки факторотображения $\widehat{f}_{n-1}$ являются либо стоками, либо источниками, а частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i} f_{n,\widehat{x}_{n-1}}(x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, ограничены. Тогда ω-предельное множество траектории произвольной точки из I^n есть периодическая орбита.*

Доказательство. Предположим противное. Допустим, что существует точка $x'(\widehat{x}'_{n-1},\, x'_n) \in I^n$ такая, что ω-предельное множество ее траектории относительно F представимо в виде (16). Тогда выполнено (17), и $\widehat{x}^0_{n-1}$ — сток факторотображения $\widehat{f}^M_{n-1}$ косого произведения F^M. Используя свойство (i) в определении множества отображений $SP_s(I^n)$, получаем отсюда, что найдутся окрестность $\widehat{U}_{n-1}(\widehat{x}^0_{n-1}) = \prod\limits_{i=1}^{n-1} U_i(x^0_i)$ точки $\widehat{x}^0_{n-1}$ и число $0 < q < 1$ такие, что

$$\left|\frac{d}{dx_1} f_1^M(x_1)\right| \leqslant q \ \text{ при } \ x_1 \in U_1(x_1^0);$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f_{i,\widehat{x}_{i-1},M}(x_i)\right| \leqslant q \ \text{ при } \ x_i \in U_i(x_i^0), \ 2 \leqslant i \leqslant n-1, \ n \geqslant 3.$$

В силу (17) существует натуральное число p_* такое, что при всех $p \geqslant p_*$ выполнено

$$f_1^{Mp}(x'_1) \in U_1(x_1^0) \ \text{ и } \ f_{i,\,\widehat{x}_{i-1},\,Mp}(x'_i) \in U_i(x_i^0), \ \text{где } \ 2 \leqslant i \leqslant n-1,\, n \geqslant 3.$$

Поэтому из теоремы Лагранжа для функции одного переменного при всех $p \geqslant p_*$ и $1 \leqslant i \leqslant n-1$ следует

$$|f_{i,\,\widehat{x}_{i-1},\,Mp}(x'_i) - x_i^0| \leqslant q^{p-p_*} l_*,$$

где l_* — наибольшая из длин отрезков $I_1,\, I_2, \ldots,\, I_{n-1}$. Последнее влечет за собой выполнение условий следствия 3 и сходимость ряда (20). В силу следствия 2 сделанное предположение неверно, и ω-предельное множество траектории любой точки из I^n есть периодическая орбита. Теорема 6 доказана. □

Заключение

В данной статье дано полное описание неблуждающего множества непрерывного косого произведения отображений интервала на n-мерной клетке ($n \geqslant 2$) в предположении ограниченности множества (наименьших) периодов периодических точек рассматриваемого отображения.

Введено понятие C^0- Ω-взрыва в семействе непрерывных отображений в слоях и предложен оригинальный способ исследования неблуждающего множества, основанный на применении как указанного выше понятия, так и понятия C^0- Ω-взрыва в пространстве непрерывных отображений отрезка.

Результаты, полученные при описании неблуждающего множества, использованы при изучении ω-предельных множеств рассматриваемых простейших косых произведений на многомерных клетках. Здесь дано описание допустимого топологического типа ω-предельных множеств рассматриваемых отображений. Найдены достаточные условия, при выполнении которых ω-предельным множеством траектории является периодическая орбита; а также необходимые условия существования одномерных ω-предельных множеств (последние — в терминах специальных расходящихся рядов). Дальнейшее развитие техники расходящихся рядов позволит перейти к описанию ω-предельных множеств вида (12) произвольной размерности d при $2 \leqslant d \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$.

Список литературы

1. *Efremova L. S.* Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map // In: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist., vol. 57. New York: Springer, 2014. P. 39–58. DOI: 10.1007/978-1-4614-9161-3_6.
2. *Ефремова Л. С.* Динамика косых произведений отображений интервала // Успехи матем. наук. 2017. Т. 72, № 1 С. 107–192. DOI: 10.4213/rm9745.
3. *Ефремова Л. С.* Дифференциальные свойства и притягивающие множества простейших косых произведений отображений интервала // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 6. С. 93–130. DOI: 10.4213/sm7551.
4. *Шарковский А. Н.* О притягивающих и притягивающихся множествах // Докл. АН СССР 1965. Т. 160, № 5. С. 1036–1038.
5. *Шарковский А. Н.* Аттракторы траекторий и их бассейны. Киев: Наукова Думка, 2013. 320 с.
6. *Blokh A., Bruckner A. M., Humke P. D., Smital J.* The space of ω-limit sets of a continuous map of the interval // Transac. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 348, no 4. P. 1357–1372.
7. *Efremova L. S.* Simplest skew products on n-dimensional ($n \geqslant 2$) cells, cylinders and tori // Lobachevskii J. Math. 2022. Vol. 43. P. 1598-1618. DOI: 10.1134/S1995080222100080.
8. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975. 304 с.
9. *Kolyada S. F.* On dynamics of triangular maps of the square // Ergodic Theory Dynam. Systems, 1992. Vol. 12, no 4. P. 749–768. DOI: 10.1017/S0143385700007082.
10. *Kloeden P. E.* On Sharkovsky's cycle coexistence ordering // Bull. Austral. Math. Soc. 1979. Vol. 20, no. 2. P. 171–177. DOI: 10.1017/S0004972700010819.
11. *Ефремова Л. С.* О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе // В кн.: Динамические системы и нелинейные явления. Киев: Ин-т матем. АН УССР, 1990. С. 15–25.
12. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. Кишинев: Штиинца, 1984. 291 с.
13. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 278 с.
14. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 747–817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11798-1.
15. *Palis J.* Ω-explosions // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol. 27, no. 1. P. 85–90. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0270400-3.
16. *Hirsch M. W., Pugh C. C.* Stable manifolds and hyperbolic sets // Global analysis (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1970. P. 133–163.
17. *Стенькин О. В., Шильников Л. П.* Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности // Матем. сб. 1998. Т. 189, № 4. С. 125–144.
18. *Гонченко С. В., Стенькин О. В.* Гомоклинический Ω-взрыв: интервалы гиперболичности и их границы // Нелинейная динам. 2011. Т. 7, № 1. С. 3–24.
19. *Ефремова Л. С., Махрова Е. Н.* Одномерные динамические системы // Успехи матем. наук. 2021. Т. 76, № 5. С. 81-146. DOI: 10.4213/rm9998.
20. *Ефремова Л. С.* О C^0- Ω-взрывах в гладких косых произведениях отображений интервала с замкнутым множеством периодических точек // Вестн. Нижегородского гос. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2012. № 3(1). С. 130–136.
21. *Шарковський О. М.* Неблукаючі точки та центр неперервного відображення прямоі в себе // Допов. АН УРСР. 1964. Т. 7. С. 865–868.
22. *Nitecky Z.* Maps of the interval with closed periodic set // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 85, no. 3. P. 451–456.

23. *Block L. S., Coppel W. A.* Dynamics in One Dimension. Lecture Notes in Math., vol. 1513. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 252 p. DOI: 10.1007/BFb0084762.
24. *Шарковский А. Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения // Укр. матем. журнал. 1965. Т. 17, № 3. С. 104–111.
25. *Федоренко В. В., Шарковский А. Н.* Непрерывные отображения интервала с замкнутым множеством периодических точек // В кн.: Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений / Под ред. А. Н. Шарковского. Киев: Институт матем. АН УССР, 1980. С. 137–145.
26. *Efremova L. S.* C^1-Smooth Ω-Stable Skew Products and Completely Geometrically Integrable Self-Maps of $3D$-Tori, I: Ω-Stability // Regular and Chaotic Dynamics. 2024. Vol. 29, no. 3. P. 491–514.
27. *Efremova L. S.* Skew products and geometrically integrable maps: Results, problems and prospects // New Developments in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. Statist. New York: Springer, 2024 (to appear).
28. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
29. *Аносов Д. В.* Динамические системы в 60-е годы: гиперболическая революция. Математические события XX века. М.: Фазис, 2003. С. 1–18.
30. *Balibrea F., Guirao J. L. G., Casado J. I. M.* A triangular map on I^2 whose ω-limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$ // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002. Vol. 8, no. 4. P. 983–994. DOI: 10.3934/dcds.2002.8.983.
31. *Balibrea F., Guirao J. L. G., Casado J. I. M.* On ω-limit sets of triangular maps on the unit cube // J. Difference Equ. Appl. 2003. Vol. 9, no. 3–4. P. 289–304. DOI: 10.1080/1023619021000047734.
32. *Райков Д. А.* Одномерный математический анализ. М.: Высшая школа, 1982. 416 с.
33. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1981. 543 с.

References

1. Efremova LS. Remarks on the nonwandering set of skew products with a closed set of periodic points of the quotient map. In: Nonlinear maps and their applications. Springer Proc. Math. Statist., vol. 57. New York: Springer; 2014. P. 39–58. DOI: 10.1007/978-1-4614-9161-3_6.
2. Efremova LS. Dynamics of skew products of interval maps. Russian Math. Surv. 2017;72(1): 101–178. DOI: 10.4213/rm9745.
3. Efremova LS. Differential properties and attracting sets of a simplest skew product of interval maps. Sbornik: Math. 2010;201(6):873–907. DOI: 10.4213/sm7551.
4. Sharkovsky A. N. On attracting and attracted sets. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1965;160(5):1036–1038 (in Russian).
5. Sharkovsky AN. Attractors of trajectories and their basins. Naukova Dumka: Kiev; 2013. 320 p. (in Russian).
6. Blokh A, Bruckner AM, Humke PD, Smital J. The space of ω-limit sets of a continuous map of the interval. Transac. Amer. Math. Soc. 1996;348(4):1357–1372.
7. Efremova LS. Simplest skew products on n-dimensional ($n \geqslant 2$) cells, cylinders and tori. Lobachevskii J. Math. 2022;43:1598-1618. DOI: 10.1134/S1995080222100080.
8. Nitecki Z. Differentiable Dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms. Cambridge, MA–London: The M.I.T. Press; 1971.
9. Kolyada SF. On dynamics of triangular maps of the square. Ergodic Theory Dynam. Systems. 1992;12(4):749–768. DOI: 10.1017/S0143385700007082.
10. Kloeden PE. On Sharkovsky's cycle coexistence ordering. Bull. Austral. Math. Soc. 1979;20(2): 171–177. DOI: 10.1017/S0004972700010819.

11. Efremova LS. On the nonwandering set and the center of triangular mappings with a closed set of periodic points in the base. In: Dynamical systems and nonlinear phenomena. Kiev: Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat.; 1990. P. 15–25 (in Russian).
12. Bronshtein IU. Non-autonomous dynamical systems. Kishinev: Shtiintsa; 1984. 291 p. (in Russian).
13. Sharkovsky AN, Maistrenko YuL, Romanenko EYu. Difference Equations and Their Applications. Math. Appl., vol. 250. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.; 1993. 358 p. DOI: 10.1007/978-94-011-1763-0.
14. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc. 1967;73(6):747–817. DOI: 10.1090/S0002-9904-1967-11798-1.
15. Palis J. Ω-explosions. Proc. Amer. Math. Soc. 1971;27(1):85–90. DOI: 10.1090/S0002-9939-1971-0270400-3.
16. Hirsch MW, Pugh CC. Stable manifolds and hyperbolic sets. Global analysis (Berkeley, CA, 1968), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 14, Amer. Math. Soc. Providence, RI; 1970. P. 133–163.
17. Sten'kin OV, Shilnikov LP. Homoclinic Ω-explosion and domains of hyperbolicity. Sb. Math. 1998;189(4):603–622.
18. Gonchenko SV, Sten'kin OV. Homoclinic Ω-explosion: hyperbolicity intervals and their boundaries. Nelin. Dinam. 2011;7(1):3–24 (in Russian).
19. Efremova LS, Makhrova EN. One-dimensional dynamical systems. Russian Math. Surv. 2021; 76(5):821–881. DOI: 10.4213/rm9998.
20. Efremova LS. On C^0-Ω-blow-ups in C^1-smooth skew products of interval mappings with a closed set of periodic points // Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod. 2012;3(1):130–136 (in Russian).
21. Sharkovsky AN. Nonwandering points and the center of a continuous mapping of the line into itself. Dopovidi Akad. Nauk Ukr. RSR. 1964;7:865–868 (in Ukrainian).
22. Nitecky Z. Maps of the interval with closed periodic set. Proc. Amer. Math. Soc. 1982;85(3): 451–456.
23. Block LS, Coppel WA. Dynamics in One Dimension. Lecture Notes in Math., vol. 1513. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 252 p. DOI: 10.1007/BFb0084762.
24. Sharkovsky AN. On cycles and a structure of a continuous mapping. Ukrain. Mat. Zh. 1965;17: 104–111 (in Russian).
25. Fedorenko VV, Sharkovsky AN. Continuous mappings of an interval with a closed set of periodic points. Investigation of differential and differential-difference equations: Collect. Sci. Works. Kiev, 1980. P. 137–145 (in Russian).
26. Efremova LS. C^1-Smooth Ω-Stable Skew Products and Completely Geometrically Integrable Self-Maps of $3D$-Tori, I: Ω-Stability // Regular and Chaotic Dynamics. 2024;29(3):491–514.
27. Efremova LS. Skew products and geometrically integrable maps: Results, problems and prospects. New Developments in Discrete Dynamical Systems, Difference Equations and Applications. Springer Proc. Math. Statist. New York: Springer; 2024 (to appear).
28. Kuratovsky K. Topology. Vol. 1. New York: Acad. Press; 1966. 588 p.
29. Anosov DV. Dynamical systems in the 1960s: the hyperbolic revolution. Mathematical events of the twentieth century. Berlin: Springer-Verlag; 2006. P. 1-17.
30. Balibrea F, Guirao JLG, Casado JIM. A triangular map on I^2 whose ω-limit sets are all compact interval of $\{0\} \times I$. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2002;8(4):983–994. DOI: 10.3934/dcds.2002.8.983.
31. Balibrea F, Guirao JLG, Casado JIM. On ω-limit sets of triangular maps on the unit cube. J. Difference Equ. Appl. 2003;9(3-4):289–304. DOI: 10.1080/1023619021000047734.
32. Raikov DA. One-Dimensional Mathematical Analysis. Moscow: Vysshaya Shkola; 1982. 416 p.
33. Zorich VA. Mathematical Analysis, Universitext. Vol. I. Berlin: Springer-Verlag; 2004. 578 p.

Ефремова Людмила Сергеевна — окончила механико-математический факультет Горьковского государственного университета (1974). Доктор физико-математических наук (2018), доцент. Работает в должности профессора в Нижегородском государственном университет им. Н. И. Лобачевского и Московском физико-техническом институте (государственном университете). Специалист по теории динамических систем. Автор более 70 научных публикаций.

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: lefunn@gmail.com, ludmila.efremova@itmm.unn.ru
ORCID: 0000-0001-5821-6697
AuthorID (eLibrary.Ru): 126259

Шалагин Матвей Андреевич — студент 4-го курса Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н. И. Лобачевского (специальность «Математика»).

Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
E-mail: shalaginmatvey@gmail.com
ORCID: 0009-0009-9392-5945
AuthorID (eLibrary.Ru): 1260272