



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Обзорная статья  
УДК 517.925 + 517.93

DOI: 10.18500/0869-6632-003138  
EDN: PFFDTK

### Смешанная динамика: элементы теории и примеры

С. В. Гонченко<sup>1,2</sup>, А. С. Гонченко<sup>1,2</sup>, А. О. Казаков<sup>1</sup>✉, Е. А. Самылина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия  
E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru, samylina\_evgeniya@mail.ru

Поступила в редакцию 15.07.2024, принята к публикации 4.08.2024,  
опубликована онлайн 26.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Основной целью работы является представление недавних результатов, полученных в математической теории динамического хаоса и связанных с открытием его новой третьей формы, так называемой смешанной динамики. Этот тип хаоса сильно отличается от двух его классических форм — консервативного и диссипативного хаоса, и главное его отличие состоит в том, что аттракторы и репеллеры могут пересекаться, не совпадая при этом. Основные результаты работы связаны с построением теоретических схем, направленных на математическое обоснование этого явления с помощью самых общих методов топологической динамики. В работе также приводятся ряд примеров систем из приложений, в которых наблюдается смешанная динамика. Показывается, что такая динамика может быть разных типов: от близкой к консервативной до сильно диссипативной, а также что она может возникать в результате различных бифуркационных механизмов.

**Ключевые слова:** динамический хаос, смешанная динамика, CRN-аттрактор, полный аттрактор, абсолютная область Ньюхауса.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ № 24-11-00339 (раздел 1), гранта РФФ № 23-71-30008 (раздел 2). Исследования в разделе 3.1 проведены в рамках гранта FSWR-2020-0036 Министерства науки и высшего образования РФ, а исследования разделах 3.2 и 3.3 выполнены при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

**Для цитирования:** Гонченко С. В., Гонченко А. С., Казаков А. О., Самылина Е. А. Смешанная динамика: элементы теории и примеры // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 722–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003138. EDN: PFFDTK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Mixed dynamics: elements of theory and examples

S. V. Gonchenko<sup>1,2</sup>, A. S. Gonchenko<sup>1,2</sup>, A. O. Kazakov<sup>1</sup>✉, E. A. Samylina<sup>1</sup>

<sup>1</sup>National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru, agonchenko@mail.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru,  
samylina\_evgeniya@mail.ru

Received 15.07.2024, accepted 4.08.2024, available online 26.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The main goal of the paper is to present recent results obtained in the mathematical theory of dynamical chaos and related to the discovery of its new, third, form, the so-called mixed dynamics. This type of chaos is very different from its two classical forms, conservative and dissipative chaos, and its main difference is that attractors and repellers can intersect without coinciding. The main results of the paper are related to construction of theoretical schemes aimed to mathematical justification of this phenomenon using the most general methods of topological dynamics. The paper also provides a number of examples of systems from applications in which mixed dynamics is observed. It is shown that such dynamics can be of different types, from close to conservative to strongly dissipative, and also that it can arise as a result of various bifurcation mechanisms.

**Keywords:** dynamical chaos, mixed dynamics, CRH-attractor, full attractor, absolute Newhouse domain.

**Acknowledgements.** The work was supported by the Russian Science Foundation grant No. 24-11-00339 (section 1), the Russian Science Foundation grant No. 23-71-30008 (section 2). Research in section 3.1 was carried out within the framework of the grant FSWR-2020-0036 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation. The studies in sections 3.2 and 3.3 were carried out with the financial support of the fundamental research program of the National Research University Higher School of Economics.

**For citation:** Gonchenko SV, Gonchenko AS, Kazakov AO, Samylina EA. Mixed dynamics: elements of theory and examples. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):722–765. DOI: 10.18500/0869-6632-003138

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Введение

Когда говорят о динамическом хаосе в конечномерных системах, обычно имеют в виду две его совершенно разные формы: консервативный и диссипативный.

*Консервативный хаос* характерен для систем, сохраняющих фазовый объем, в частности, для гамильтоновых систем с двумя и большим числом степеней свободы. При этом все фазовое пространство такой хаотической (неинтегрируемой) системы выглядит как некоторое неравномерно гиперболическое «хаотическое море» с беспорядочно разбросанными внутри него эллиптическими островами (островками устойчивости по Ляпунову), и никаких асимптотически устойчивых инвариантных множеств здесь нет. Говорят, что здесь хаос «размазан» (возможно, крайне неравномерно) по всему фазовому пространству. С точки зрения топологической динамики [1] консервативная динамика для систем с компактным фазовым пространством характеризуется тем, что это фазовое пространство является цепно-транзитивным, то есть от каждой его точки можно перейти к любой другой по  $\varepsilon$ -траекториям системы для любого  $\varepsilon > 0$ . Такие системы называются *топологически консервативными*, и их класс гораздо шире, чем системы, сохраняющие фазовый объем. В частности, таковыми являются все ановские отображения двумерного тора [2], которые в общем случае не сохраняют площадь. Существуют и другие примеры таких систем (см., в частности, раздел 1.3 и рис. 6).

*Диссипативный хаос* имеет совсем другую природу: он связан прежде всего с существованием в фазовом пространстве системы странных аттракторов — асимптотически устойчивых замкнутых инвариантных множеств с нетривиальной структурой. Поэтому фазовое пространство

диссипативной системы устроено совсем по-другому, чем у консервативных систем. Когда такое фазовое пространство компактно, в нем существуют «дырки» двух типов — это поглощающие области, в которые входят все положительные полутраектории, пересекающие их границу, и отталкивающие области, которые являются поглощающими при обращении времени. При этом аттракторы лежат внутри поглощающих областей, а репеллеры (аттракторы при обращении времени) — внутри отталкивающих областей. Соответственно, здесь аттракторы и репеллеры лежат в разных частях фазового пространства и, естественно, не пересекаются.

Целью настоящей работы является обзор недавних результатов, полученных в теории динамического хаоса, которые заставляют по-новому взглянуть на саму эту теорию. В основе этих результатов лежит открытие нового третьего типа динамического хаоса, так называемой *смешанной динамики* [3, 4], суть которой состоит в том, что аттракторы и репеллеры в системе могут пересекаться, не совпадая при этом. На первый взгляд это кажется невозможным и противоречащим здравому смыслу, если считать, как это общепринято, что аттрактор — это притягивающее множество, к которому стремятся все траектории из его окрестности, а репеллер — отталкивающее (притягивающее в обратном времени), и оба они являются замкнутыми инвариантными множествами. Однако в работе [5], как мы теперь знаем, было показано в главных деталях, как это противоречие между «отталкиванием и притягиванием» может быть преодолено, не выходя за рамки классической теории динамических систем.

О самой работе [5] мы поговорим более подробно в разделе 2, а здесь отметим только лишь ее основной результат. Именно в [5] было установлено, что двумерные отображения (диффеоморфизмы) могут иметь одновременно бесконечно много устойчивых и бесконечно много вполне неустойчивых периодических траекторий, стоков и источников соответственно, причем таких, что *замыкания множества стоков и множества источников имеют непустое пересечение*<sup>1</sup>. Очевидно, по любому разумному определению аттрактора системы, периодические стоки должны ему принадлежать, соответственно, периодические источники должны принадлежать репеллеру. Поскольку и аттракторы, и репеллеры являются замкнутыми инвариантными множествами, то, естественно, они должны содержать и замыкания входящих в них траекторий. В частности, они должны содержать не только сами множества стоков и источников, но и их замыкания. А тогда, в силу [5], хаотические аттракторы и репеллеры систем из абсолютных областей Ньюхауса должны типично нетривиально пересекаться<sup>2</sup>.

Таким образом, чисто математический результат, полученный в [5], непосредственно указывает на возможность существования совершенно нового типа хаоса, при котором аттракторы не отделены от репеллеров. Однако этот вывод тогда, в конце 90-х, казался абсолютно парадоксальным, поскольку он полностью противоречил общепринятой концепции (даже в определенном смысле аксиоме) динамического хаоса, по которой аттракторы должны быть отделены от репеллеров. При этом консервативный хаос рассматривался как абсолютно другой тип динамического хаоса, для которого понятия «аттрактор» и «репеллер» вообще не употреблялись<sup>3</sup>.

<sup>1</sup>Более того, диффеоморфизмы такого типа типичны в так называемых абсолютных областях Ньюхауса [6, 7], то есть они образуют подмножества второй категории Бэра в открытых (в  $C^2$ -топологии) областях пространства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями, а также системы с универсальной динамикой [8]. Одним из критериев универсальной динамики является существование у системы грубых периодических траекторий всех топологических типов, допускаемых ее размерностью (устойчивых, вполне неустойчивых и седловых всех индексов, то есть всех размерностей устойчивых инвариантных многообразий). Возможность появления такой динамики в любой размерности при бифуркациях негрубых гетероклинических контуров была установлена в работе [9].

<sup>2</sup>Конечно, с точки зрения эволюционной динамики аттракторы и репеллеры по определению разделены по времени как предельные режимы в будущем и в прошлом. Однако как множества в фазовом пространстве они всегда являются важнейшими топологическими инвариантами любой системы.

<sup>3</sup>Однако, в принципе, в случае консервативных систем, заданных на компактном фазовом пространстве  $M$ , можно считать, что «аттрактором» и одновременно «репеллером» системы является все  $M$  — тогда такие «аттрактор» и «репеллер» естественно совпадают. Это представление вполне согласуется с понятием максимального аттрактора

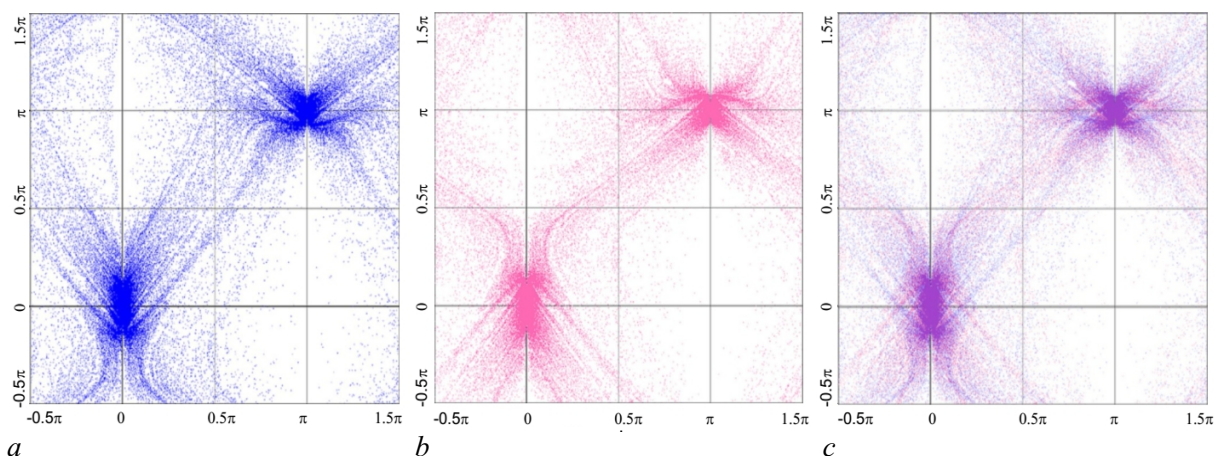


Рис. 1. Пример хаотической динамики в модели Пиковского–Топаж 4-х связанных ротаторов [16]. Здесь фазовое пространство для отображения Пуанкаре является двумерным тором. Подсчитано  $2 \cdot 10^5$  итераций, последние  $10^5$  из них показаны на картинках; *a* – аттрактор – результат итерирования вперед показан синими точками; *b* – репеллер – результат итерирования назад показан красными точками; *c* – смешанная динамика – картинки *a* и *b* наложены друг на друга, в результате то множество, по которому аттрактор пересекается с репеллером, получилось в фиолетовых тонах (цвет онлайн)

Fig. 1. An example of chaotic dynamics in the Pikovsky–Topaj model of 4 coupled rotators [16]. Here the phase space for the Poincaré map is a two-dimensional torus.  $2 \cdot 10^5$  iterations have been calculated, the last  $10^5$  of them are shown in the pictures; *a* – attractor – the result of iterating forward is shown with red dots; *b* – repeller – the result of iterating backwards is shown with blue dots; *c* – mixed dynamics – pictures *a* and *b* are superimposed on each other, as a result, the set by which the attractor intersects with the repeller turned out in purple tones (color online)

Но даже тот математический факт из [5], что в диссипативном случае аттракторы и репеллеры могут, в принципе, иметь непустое пересечение, сам по себе вполне мог оказаться интересным только лишь как чисто теоретический. С точки зрения приложений он мог оказаться совсем неинтересным, так как более вероятным (в силу «аксиомы» об отделимости аттракторов от репеллеров) казалось то, что явление смешанной динамики не может наблюдаться на практике. Действительно, численных экспериментов, в которых рассматривались репеллеры, было очень мало, а аттракторы практически во всех из них рассматривались исключительно как «аттракторы точки», то есть как асимптотически устойчивый предельный режим для положительных полутраекторий одной начальной точки, в лучшем случае нескольких – если, например, рассматривались вопросы мультистабильности. Более того, даже в случае двумерных диффеоморфизмов из абсолютных областей Ньюхауса, таких, как в [5], итерации точки могли вполне сходиться к простому аттрактору, например, устойчивой траектории очень большого периода, так что его трудно было бы отличить от хаотической орбиты, см. дискуссию на эту тему в [11–14].

Таким образом, идея о том, что хаотические аттракторы и репеллеры могут нетривиально пересекаться, на первых порах, что называется, «повисла в воздухе». Однако нужно сказать, что первый же известный нам численный эксперимент с аттракторами и репеллерами, проведенный в работе Пиковского и Топаж [15] с моделью четырех симметрично связанных простых ротаторов, показал, что численно найденные аттракторы и репеллеры могут пересекаться по визуально большому множеству (практически совпадают), см. рис. 1. Хаотическая динамика этой модели весьма детально была исследована в нашей работе [16], в которой, собственно,

или репеллера (когда в качестве поглощающей (отталкивающей) области рассматривается все  $M$ ), а также с введенным в работе Рюэля [10] определением аттрактора как устойчивого цепно-транзитивного множества, см. также раздел 1.4. Заметим, что для консервативных систем с компактным фазовым пространством, в силу теоремы Пуанкаре о возвращаемости, единственным цепно-транзитивным инвариантным множеством является все фазовое пространство.

и было доказано существование смешанной динамики в модели Пиковского–Топажа, см. также раздел 3.1 настоящей работы. Заметим, что самой первой моделью из приложений, в которой была целенаправленно найдена смешанная динамика, оказалась неголономная модель кельтского камня [17]. Кроме того, в работе [18] был не только предложен ряд критериев существования смешанной динамики у двумерных обратимых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, но также и сформулирована гипотеза об обратимой смешанной динамике (RMD-conjecture). Эта гипотеза была доказана в [19] для так называемого априори неконсервативного случая (в класс таких систем попадает также и указанная модель Пиковского–Топажа).

К настоящему времени известен уже целый ряд моделей из приложений, в которых наблюдается смешанная динамика, см., например, [16–18, 20–29]. На рис. 2 проиллюстрированы результаты исследования хаотической динамики неголономной модели кельтского камня [17], рис. 2, *a*, и модели двух вихрей взаимодействующих с акустической волной [24], рис. 2, *b*.

Здесь на рис. 1 и 2 показаны фазовые портреты аттрактора (синие точки) и репеллера (красные точки) у соответствующих отображений Пуанкаре, которые двумерны в случае модели Пиковского–Топажа и модели вихрей и трехмерны в случае модели кельтского камня. Как видно, аттрактор и репеллер во всех случаях пересекаются. При этом для модели Пиковского–Топажа, рис. 1, и неголономной модели кельтского камня, рис. 2, *a*, аттрактор и репеллер пересекаются по визуально достаточно большому множеству, которое выглядит преимущественно в перемешанном (фиолетовом) цвете. Здесь численные результаты хорошо согласуются с теорией [4], по которой в случае смешанной динамики пересекающиеся хаотические аттрактор и репеллер должны почти совпадать (см. также раздел 1.4). В противоположность этому для модели двух вихрей, рис. 2, *b*, аттракторы и репеллеры также определенно пересекаются, но по визуально довольно «тощему» множеству. Это видимое противоречие с теорией объясняется тем, что здесь мы имеем дело с так называемой *сильно диссипативной смешанной динамикой*. В этом случае носителями аттрактора и репеллера являются инвариантные множества, которые по теории должны почти совпадать. Однако предельное распределение положительных и отрицательных итераций на них, сходящееся к соответствующим взаимно сингулярным инвариантным мерам  $\mu_{+\infty}$  и  $\mu_{-\infty}$ , экстремально

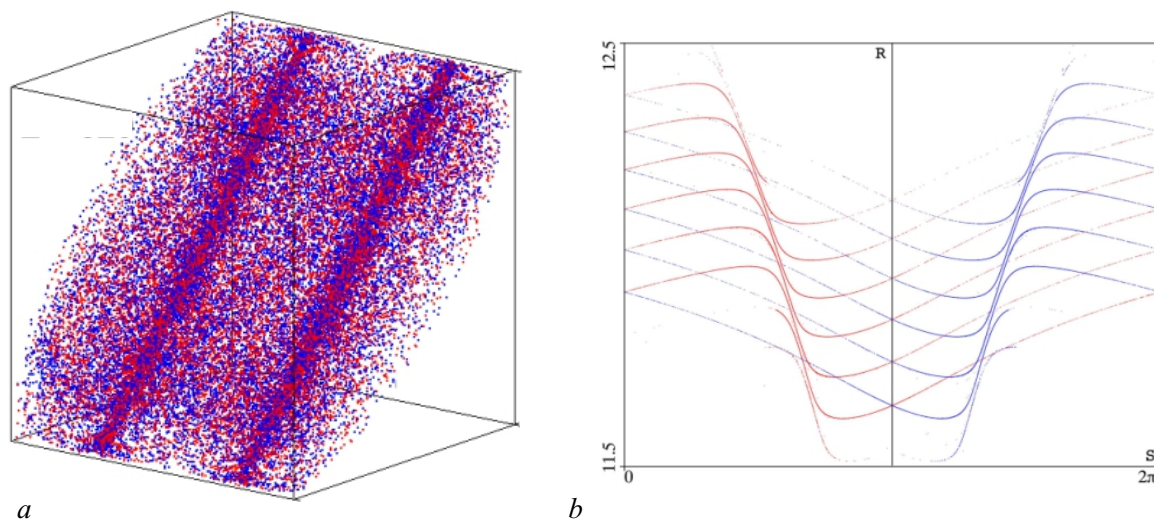


Рис. 2. Примеры смешанной динамики: *a* — в неголономной модели кельтского камня [17]; *b* — в модели двух вихрей, взаимодействующих с акустической волной [24] (цвет онлайн)

Fig. 2. Examples of mixed dynamics: *a* — in the nonholonomic model of the Celtic stone [17]; *b* — in the model of two vortices interacting with an acoustic wave [24] (color online)

асимметрично (почти вся  $\mu_{+\infty}$  сконцентрирована на синей части носителя (как бы на бывшем до слияния аттракторе), а почти вся  $\mu_{-\infty}$  — на красной части носителя<sup>4</sup>). Как показывают наши исследования, в случае модели двух вихрей никаким разумным числом итераций не удастся достичь хотя бы приблизительного сходства аттрактора и репеллера.

Математическое обоснование явления смешанной динамики в случае обратимых по времени систем было дано в работе [3], а в общем случае — в работе [4], см. также [29–31]. В первой части настоящей статьи (разделы 1 и 2) мы дадим детальный обзор результатов этих работ. В разделе 1 мы обсуждаем понятие аттрактора (и репеллера как аттрактора в обратном времени), а в разделе 2 — те теоретические результаты, из которых вытекает возможность нетривиального пересечения аттракторов и репеллеров. Основная проблема здесь — это как определить аттрактор универсальным образом так, чтобы его определение было бы максимально общим, то есть отражало природу аттрактора как «устойчивого замкнутого инвариантного множества», а кроме того, чтобы соответствующим образом определяемый аттрактор являлся бы еще и топологическим инвариантом. Последнее означает, что аттрактор должен быть определен в топологических терминах. По сути, здесь мы следуем подходу, предложенному в работах Конли, Рюэля и Харли [10, 32, 33], определять аттрактор в терминах топологической динамики, то есть с помощью аппарата  $\varepsilon$ -траекторий, и, соответственно, рассматривать тип его устойчивости как устойчивость относительно постоянных возмущений (что равносильно устойчивости относительно малого ограниченного шума), см. определения из раздела 1.4. У такого подхода есть ряд своих достоинств. Так, оно не противоречит классическому определению аттрактора, см. определение 1, а лишь обобщает его: дает возможность определять (в духе Конли [32]) аттрактор для любой системы с компактным фазовым пространством; имеет также практическую направленность, о чем писали еще Рюэлли и Харли [10, 33], есть и другие достоинства, подробнее см. раздел 1.4 и [30]. В разделе 1.6 мы даем определение полного аттрактора системы (фактически как максимального замкнутого инвариантного и устойчивого ее множества), а также полного репеллера системы, что, собственно, и является основой для возможности выделения трех различных форм динамики систем на компактном фазовом пространстве  $M$ :

- (топологически) консервативная динамика, когда полный аттрактор  $\mathcal{A}$  и полный репеллер  $\mathcal{R}$  совпадают, а также совпадают с  $M$ , то есть  $\mathcal{A} = \mathcal{R} = M$ ;<sup>5</sup>
- диссипативная динамика, когда  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ ;
- смешанная динамика, когда  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$ .

Однако в теории динамического хаоса, которую нельзя рассматривать как чисто математическую дисциплину, существуют важные проблемы, касающиеся того, как соответствующие теоретические конструкции и положения соотносятся с экспериментами. Во второй части работы, разделе 3, мы рассмотрим ряд моделей: модель Пиковского–Топажа 4-х связанных ротаторов; неголономную модель кельтского камня; модель двух вихрей, взаимодействующих с акустической волной и др., в которых наблюдается смешанная динамика, а также неконсервативное отображение Аносова, демонстрирующее заведомо топологически консервативную динамику. В последнем случае динамика такая, что все фазовое пространство (двумерный тор) является одновременно и аттрактором, и репеллером. В случае смешанной динамики аттрактор и репеллер также имеют непустое пересечение, но полностью не совпадают. Здесь множество  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R}$ , которое мы будем называть *обобщенным обратимым ядром*, см. [4], является замкнутым инвариантным

<sup>4</sup>Эту особенность распределения сингулярных мер  $\mu_{+\infty}$  и  $\mu_{-\infty}$  можно формализовать также тем, что так называемое расстояние Вассерштайна между аттрактором и репеллером в модели двух вихрей достаточно большое (тогда как оно мало в случаях модели Пиковского–Топажа и кельтского камня). См. также на эту тему работу [28].

<sup>5</sup>В этом случае  $M$  является цепно-транзитивным множеством и, следовательно, одновременно и аттрактором, и репеллером для любой точки фазового пространства.

множеством, к которому не стремятся ни при  $t \rightarrow +\infty$ , ни при  $t \rightarrow -\infty$  никакие траектории точек, не принадлежащих этому множеству. Однако в любой окрестности (обобщенного) обратимого ядра существует счетное множество асимптотических аттракторов и репеллеров. Здесь термином «асимптотический» мы подчеркиваем тот факт, что в любой окрестности такого аттрактора или репеллера существуют точки, траектории которых стремятся к нему при  $t \rightarrow +\infty$  или соответственно при  $t \rightarrow -\infty$ .

Это в теории. Однако в численных экспериментах эти асимптотические аттракторы и репеллеры часто совсем не обнаруживаются, так как они имеют экстремально узкие области притяжения и отталкивания (как, например, в аттракторе Эно, см. раздел 1.2). В результате, получается, что обобщенное обратимое ядро  $A \cap R$ , точнее его численная аппроксимация, распространяется на все фазовое пространство  $M$ . Этот факт можно объяснить следующим образом. Пусть  $\delta$  — это точность вычислений или амплитуда ограниченного внешнего шума. Тогда мы должны получить, что либо  $\delta$ -окрестность (или  $\delta$ -покрытие) множества  $A \cap R$  совпадает с  $M$ , либо, когда  $\delta$  очень мало, в множестве  $M \setminus (A \cap R)$  имеется лишь конечное число дырок размеров больших  $\delta$ , содержащих асимптотические аттракторы и репеллеры.

В тех примерах, которые мы рассматриваем (для  $\delta \sim 10^{-17}$ ), имеет место, скорее всего, первый случай. Для того чтобы обнаружить «дырки», нужна точность на несколько порядков более высокая. Например, в компьютерных экспериментах Галиаса и Такера [34] с отображением Эно для нахождения устойчивой периодической точки потребовалось не только брать  $\delta \sim 10^{-51}$ , но и использовать весьма нетривиальные принципы вычислений. Как нам кажется, и в наших численных экспериментах должна потребоваться примерно такая же точность для обнаружения «дырок», а кроме того, для уверенного их детектирования придется контролировать вычисления на каждом шагу, то есть вторгаться в область методов доказательных вычислений [35]. Однако здесь важны не сами «дырки» с асимптотическими аттракторами и репеллерами внутри, а факт их существования, который может быть установлен на основании определенных критериев [5, 18, 19, 36]. Эти критерии, основной из которых связан с тем, что рассматриваемая система принадлежит абсолютной области Ньюхауса, обсуждаются в разделе 2.

**Замечание 1.** В работе [16] было показано, что отображение Пуанкаре в случае модели Пиковского–Топажжа принадлежит абсолютной области Ньюхауса, то есть в этом случае доказан основной критерий смешанной динамики. Тот факт, что и для модели кельтского камня, и для модели вихрей соответствующие им системы принадлежат абсолютным областям Ньюхауса, не вызывает сомнения, хотя он пока и не доказан.

## 1. К вопросу об определении аттрактора

Понятие аттрактора, а в особенности странного аттрактора, является до сих пор одним из самых дискутируемых в теории динамических систем. К настоящему времени существует много разных его определений, которые с различных точек зрения отражают природу аттрактора как «устойчивого замкнутого инвариантного множества». Стандартное определение аттрактора (из математической энциклопедии) такое:

- *Аттрактор* — это компактное инвариантное подмножество фазового пространства динамической системы, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемся к бесконечности.

Приведем также его развернутое изложение (из Википедии).

**Определение 1.** *Аттрактор* — это подмножество  $A$  фазового пространства, для которого выполняются следующие три условия:

- (i)  $A$  положительно инвариантно для системы  $f$ , то есть если  $a \in A$ , то  $f(t, a) \in A$  для всех  $t > 0$ ;
- (ii) существует окрестность  $B(A)$  множества  $A$ , которая называется бассейном притяжения для  $A$  и такая, что  $B(A)$  состоит из всех точек  $b$  фазового пространства, обладающих следующим свойством: для любой открытой окрестности  $N$  множества  $A$  существует положительная константа  $T$  такая, что  $f(t, b) \in N$  для всех  $t > T$ ; говорят, что точки  $b$  «входят в  $A$  при  $t \rightarrow \infty$ »;
- (iii) не существует собственных (непустых) подмножеств в  $A$ , обладающих первыми двумя свойствами.

Здесь  $t$  является независимой переменной — временем, которое либо непрерывно,  $t \in \mathbb{R}$ , для потоков, либо дискретно,  $t \in \mathbb{Z}$ , для отображений.

В этом случае сам аттрактор  $A$  является вполне определенным объектом, и он же является максимальным аттрактором в своей поглощающей области  $U \subset B(A)$ , то есть такой открытой области в фазовом пространстве, что  $T(\bar{U}) \subset U$  в случае отображений или  $T_t(\bar{U}) \subset U$  при  $t > 0$  в случае потоков, где через  $\bar{U}$  обозначено замыкание множества  $U$ . Тогда, соответственно,

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(U) \quad \text{и} \quad A = \bigcap_{t \geq 0} T_t(U).$$

**1.1. Квазиаттракторы по Афраймовичу–Шильникову [12].** Заметим, что определение 1 является корректным и вполне адекватным (а также хорошо согласующимся с численными экспериментами) в случае систем как с простыми (регулярными) аттракторами, так со странными аттракторами, которые сохраняют свою хаотичность при всех малых возмущениях. К последним относятся (нетривиальные) гиперболические аттракторы [2], которые являются грубыми, а также псевдогиперболические аттракторы [37, 38], к которым относятся сингулярно-гиперболические аттракторы (они же аттракторы лоренцевского типа) и дикие гиперболические аттракторы.

Однако, помимо таких настоящих хаотических аттракторов, в теории динамического хаоса большой интерес представляют странные аттракторы другого типа, так называемые *квазиаттракторы*. Для них указанные выше классические определения аттрактора не вполне отражают их природу и, вообще говоря, не годятся, см. дискуссию на эту тему в [11, 12, 14].

Напомним, что квазиаттракторами (по терминологии Афраймовича и Шильникова [12]) называются странные аттракторы, которые либо сами содержат устойчивые периодические траектории с большими периодами и очень узкими областями притяжения, либо такие траектории появляются в них при сколь угодно малых гладких возмущениях. При этом основной механизм возникновения устойчивых периодических траекторий в аттракторе напрямую связан с тем, что системы с квазиаттракторами допускают гомоклинические касания, бифуркации которых приводят к появлению (внутри аттрактора) асимптотически устойчивых периодических траекторий [39, 40].

Фундаментальным свойством квазиаттракторов является то, что соответствующие им системы принадлежат *диссипативным областям Ньюхауса*, то есть открытым областям в пространстве динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями, причем таким областям, для которых имеет место явление *Ньюхауса*:

- В диссипативных областях Ньюхауса типичны (образуют подмножество второй категории Бэра) системы с бесконечным множеством периодических стоков, замыкания которых содержат нетривиальные гиперболические подмножества<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Один из результатов на эту тему здесь такой: пусть диффеоморфизм  $f$  принадлежит диссипативной области



Этот результат определенно показывает, что системы из указанных (диссипативных) областей Ньюхауса могут иметь бесконечно много аттракторов. Однако в численных экспериментах очень часто ничего такого не наблюдается. Здесь, как правило, обнаруживается только один большой аттрактор, фазовый портрет которого выглядит вполне хаотическим, что подтверждается также расчетом определенных характеристик, например, показателей Ляпунова — здесь типична ситуация, когда стандартные вычислительные схемы показывают наличие положительных показателей Ляпунова у траекторий вблизи большого аттрактора. Это позволяет говорить, что численно найденный аттрактор является странным, но нужно иметь в виду, что он является таковым (странным) лишь на физическом уровне строгости, что часто бывает вполне достаточным для экспериментатора.

Нужно также сказать, что характерным свойством систем с квазиаттракторами является также и то, что при изменении значений параметров наряду с сохранением видимой хаотичности могут также наблюдаться явления типа синхронизации: при определенных значениях параметров вместо хаоса наблюдается устойчивая периодическая траектория. Такие открытые множества значений параметров называются окнами устойчивости.

Таким образом, наличие в пространстве параметров областей хаотичности и окон устойчивости является, наряду с существованием гомоклинических касаний, характерной особенностью квазиаттракторов.

Примеров квазиаттракторов великое множество. Можно сказать, что это почти все известные странные аттракторы из приложений. Примеров настоящих (гиперболических, псевдогиперболических или сингулярно-гиперболических) аттракторов известно не так уж много — это:

- нетривиальные гиперболические аттракторы, такие как аттракторы Аносова, Плыкина, Смейла–Вильямса и др., см. обзор [2], которые долгое время представляли лишь теоретический интерес — фактически до работ С.П. Кузнецова, в которых они были обнаружены в прикладных моделях, см. [41];
- сингулярно-гиперболические аттракторы, такие как аттракторы Лоренца трехмерных потоков [42–45];
- дикие псевдогиперболические аттракторы, такие как дискретные аттракторы Лоренца трехмерных отображений [46–48] и дикие спиральные аттракторы Тураева–Шильникова в случае четырехмерных потоков [37, 38].

**Замечание 2.** *Все эти аттракторы являются настоящими странными аттракторами, так как сохраняют свою хаотичность при всех малых гладких возмущениях. При этом псевдогиперболические дикие аттракторы, теория которых была построена в работе Тураева и Шильникова [37], допускают гомоклинические касания. Примеров таких аттракторов известно пока не так уж много, практически все они показаны на рис. 3. На рис. 3, a–d приведены примеры аттракторов трёхмерных отображений, а на рис. 3, e — пример дикого спирального аттрактора четырёхмерного потока (он содержит состояние равновесия типа седло-фокус с одномерным неустойчивым многообразием). Дискретные аттракторы рис. 3, a–c имеют свои аналоги (сингулярно-гиперболические аттракторы) среди трёхмерных потоков — соответственно аттрактор Лоренца, гетероклинический аттрактор Лоренца [48] и сдвоенный аттрактор*

---

Ньюхауса, и пусть  $f$  имеет некоторое равномерно гиперболическое подмножество  $\Lambda$  (любого типа, например, подкову Смейла, несколько подков, одну или несколько седловых периодических траекторий и т. п.). Тогда в некоторой окрестности  $f$  (в  $C^r$ -топологии,  $r \geq 2$ ) типичны диффеоморфизмы, у которых пересечение множества стоков и множества источников содержат  $\Lambda$ . Доказательство здесь стандартное [5, 11], оно основано на принципе вложенных областей для диффеоморфизмов с периодическими стоками и том свойстве множества  $\Lambda$ , что в нем плотны гиперболические (седловые) периодические траектории, у которых для плотного множества значений параметра существуют гомоклинические касания.

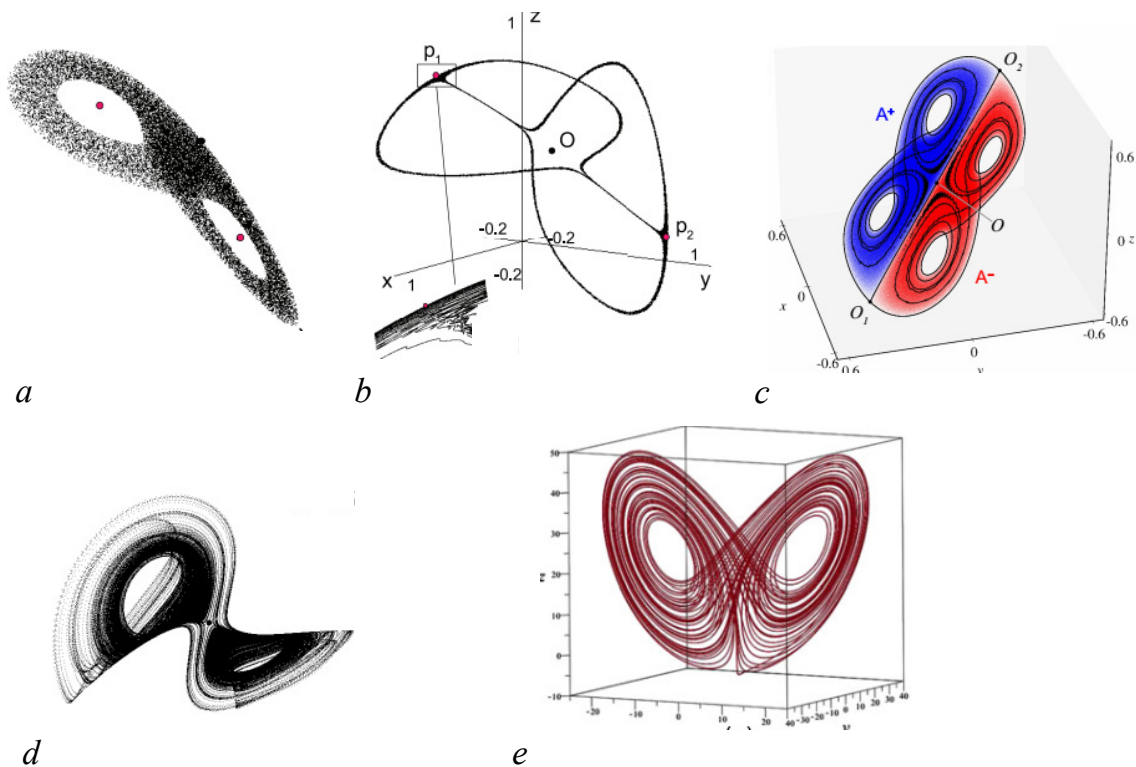


Рис. 3. Примеры гомоклинических аттракторов: *a* — дискретный аттрактор Лоренца [46, 48–50]; *b* — дискретный гетероклинический аттрактор Лоренца [48]; *c* — сдвоенный дискретный аттрактор Лоренца [51]; *d* — дискретный восьмерочный аттрактор [52]; *e* — дикий спиральный аттрактор [38] (цвет онлайн)

Fig. 3. Examples of homoclinic attractors: *a* — discrete Lorenz attractor [46, 48–50]; *b* — discrete heteroclinic Lorenz attractor [48]; *c* — conjoined Lorenz twins attractor [51]; *d* — discrete figure-eight attractor [52]; *e* — wild spiral attractor [38] (color online)

Лоренца [51] (с одним, двумя и тремя состояниями равновесия). У дискретного восьмерочного аттрактора (рис. 3, *d*) такого трехмерного потокового аналога не существует.

Вообще, теория квазиаттракторов составляет большой и весьма интересный раздел теории динамического хаоса, в котором существует огромное число нерешенных проблем. В частности, вопрос о том, что является аттрактором у систем из диссипативных областей Ньюхауса, обсуждался довольно активно, см., например, [5, 10–12, 14], и на этот счет были высказаны различные мнения и выработаны новые подходы.

**1.2. Квазиаттрактор в отображении Эно.** Один из интересных здесь вопросов связан с объяснением того эмпирического факта, что весьма часто в квазиаттракторе устойчивые периодические траектории вообще не наблюдаются. В определенном смысле это связано с тем, что периодические стоки рождаются здесь в основном в результате бифуркаций гомоклинических и гетероклинических (в гетероклинических контурах) касаний, и тогда по теории [5, 11, 39, 40, 53] такие стоки должны иметь большие периоды и области притяжения в виде очень узких ленточек, в которые трудно попасть при счете (и очень легко потерять за счет ошибок округления)<sup>7</sup>.

<sup>7</sup>Конечно, тут много зависит от специфики задачи. Например, в задаче о периодическом возмущении двумерной системы с диссипативной гомоклинической восьмеркой седла [54] окна устойчивости на плоскости параметров детектируются достаточно хорошо с помощью стандартных численных методов. Причем хорошо определяются те окна устойчивости, которые отвечают бифуркациям кубических гомоклинических касаний — эти окна имеют специфические



Заметим, что отображение (1) с помощью замены координат  $x \rightarrow a^{-1}y$ ,  $y \rightarrow ba^{-1}x$  приводится к виду

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = a + bx - y^2. \quad (2)$$

Отображение (2) называется стандартным отображением Эно. Именно в такой форме оно известно как одно из универсальных гомоклинических отображений — оно служит нормальной формой отображений первого возвращения вблизи квадратичных гомоклинических касаний [13, 58, 59].

**Замечание 3.** *Отличие в динамике отображений (1) и (2) проявляется, по существу, только вблизи  $a = 0$ . Здесь отображение (1) при  $a = 0$  становится линейным и, соответственно, никакого отношения к гомоклинической динамике не имеет. Случай  $a = 0$ , наоборот, является весьма интересным для отображения (2). Так, при  $b = -1$  оно становится консервативным, и при  $a = 0$  в нем наблюдается вырожденный резонанс 1:4; при  $a = 0, b = -1$  отображение (2) имеет неподвижную точку с мультипликаторами  $\pm i$ , комплексная нормальная форма которой имеет вид  $\bar{z} = iz + Az^2z^* + B(z^*)^3$  с вырождением  $|A| = |B|$  (случай Арнольда [60]). Бифуркации этой неподвижной точки в двухпараметрическом семействе отображений  $\bar{x} = y, \bar{y} = \varepsilon_1 - x - y^2 + \varepsilon_2 y^3$  были изучены в [61], см. также [62].*

Таким образом, уже в случае простейших (по виду) нелинейных систем, таких как отображение Эно, возникают достаточно серьезные математические проблемы, связанные с тем, как правильно или более менее адекватно определять и идентифицировать в них аттракторы. В следующих параграфах мы дадим краткий обзор различных подходов к определению аттрактора. В разделе 1.3 мы обсудим некоторые особенности хорошо известных максимальных аттракторов и аттракторов Милнора. По материалам нашей работы [4] в разделе 1.4 будут представлены основные элементы теории CRH-аттракторов, в разделе 1.5 будут приведены их простейшие примеры, а в разделе 1.6 будут рассмотрены их обобщения — полные аттракторы и полные аттракторы по Рюэллю.

**1.3. Максимальный аттрактор и аттрактор Милнора.** К настоящему времени известно много различных определений аттрактора как устойчивого и замкнутого инвариантного множества системы. При этом если замкнутость и инвариантность везде подразумевается, то тип устойчивости может пониматься по-разному. Это хорошо можно увидеть на примере двух хорошо известных типов аттрактора: максимального аттрактора и аттрактора Милнора.

Максимальный аттрактор  $A_{max}$  определяется как замкнутое инвариантное множество, лежащее внутри некоторой поглощающей области  $U$ , и такое, что

$$A_{max} = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^n(U)$$

в случае отображений или

$$A_{max} = \bigcap_{t \geq 0} T_t(U)$$

в случае потоков<sup>9</sup>.

Напомним, что открытая область  $U$  фазового пространства называется поглощающей, если под действием отображения  $T$  или потока  $T_t$  она переходит строго внутрь себя, то есть  $T(\bar{U}) \in U$

<sup>9</sup>Заметим, что формально максимальные аттракторы у систем с компактным фазовым пространством существуют всегда. Даже для тех систем, у которых единственной поглощающей областью является все фазовое пространство. Как, например, у консервативных систем или у отображений окружности с полуустойчивой неподвижной точкой, см. рис. 6, а. Тогда максимальный аттрактор — это все фазовое пространство (оно же и максимальный репеллер).

или  $T_t(\bar{U}) \in U$  при  $t > 0$ , где через  $\bar{U}$  мы обозначили замыкание области  $U$ . Соответственно, максимальный аттрактор получается в результате бесконечной процедуры пересечения образов  $U$  относительно положительных итераций отображения  $T$  или относительно сдвига  $U$  по траекториям потока  $T_t$  при  $t \rightarrow +\infty$ . На рис. 5 показаны простейшие примеры максимальных аттракторов.

Другое хорошо известное понятие аттрактора — это *аттрактор Милнора*  $A_M$  [63], который определяется как

- замкнутое инвариантное и минимальное по вложению множество в  $U$ , которое содержит  $\omega$ -предельные точки положительных полутраекторий почти всех (меры 1 по Лебегу) точек из  $U$ .

Конечно, у так определяемых аттракторов существуют как свои достоинства, так недостатки. Практически никаких других аттракторов, кроме максимальных, не рассматривается в гиперболической теории, имеющей дело с грубыми системами (либо с простой динамикой системы Морса–Смейла, либо с нетривиальными равномерно гиперболическими, базисными, множествами). Аттракторы Милнора также чрезвычайно популярны в теоретических исследованиях.

Однако и максимальный аттрактор, и аттрактор Милнора могут вообще не быть устойчивыми инвариантными множествами. С максимальным аттрактором это может случиться всякий раз, если выбирать неподходящую поглощающую область. Например, если такая область  $U$  содержит неустойчивую траекторию — источник (неустойчивый узел) или седло, то и максимальный аттрактор будет ее содержать, см. примеры рис. 5, *b* и *c*. Однако у максимального аттрактора всегда существуют его подмножества, которые являются настоящими аттракторами — на рис. 5, *b* и *c* это стоки (устойчивые узлы)  $a$  и  $b$ , у которых есть свои правильные поглощающие области  $U_a$  и  $U_b$ ; а на рис. 5, *a* область  $U$  сама является правильной поглощающей.

Что касается аттракторов Милнора, то они могут не быть аттракторами даже в простейших случаях. Так, в примере рис. 6, *a* отображения окружности с полуустойчивой (типа седло-узел) неподвижной точкой  $O$ , сама эта точка является аттрактором Милнора как  $\omega$ -предельная точка вообще для всех траекторий. Однако точка  $O$  не является устойчивой, соответственно, она не аттрактор в классическом смысле. Этот пример показывает, в частности, что и множество

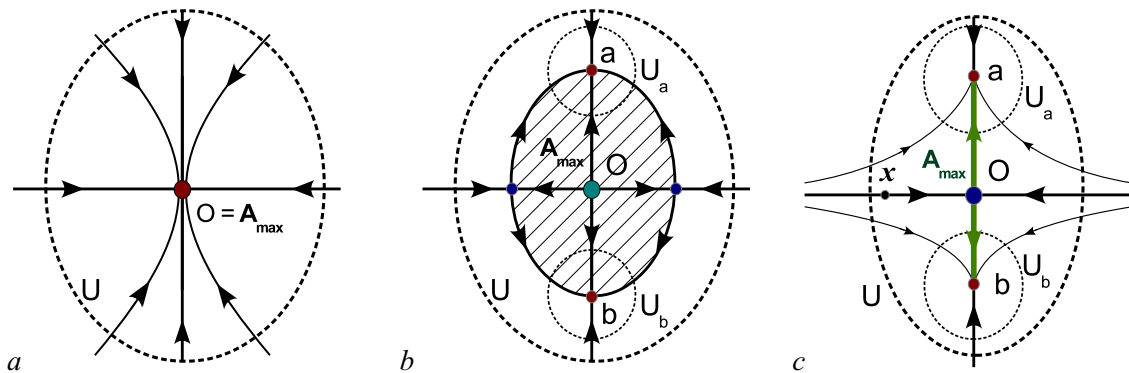


Рис. 5. Примеры максимальных аттракторов: *a* — устойчивая точка  $O$ ; *b* — диск с неустойчивым узлом  $O$  внутри; *c* — отрезок с седлом  $O$  внутри и устойчивыми точками  $a$  и  $b$  на концах. Максимальные аттракторы рисунков *b* и *c*, очевидно, не являются аттракторами в обычном смысле (например, они не являются аттракторами в смысле определения 1) (цвет онлайн)

Fig. 5. Examples of maximal attractors: *a* — a stable point  $O$ ; *b* — a disk with unstable node  $O$  inside; *c* — a segment with a saddle  $O$  inside and stable points  $a$  and  $b$  at its ends. The maximal attractors of figures *b* and *c* are obviously not attractors in the usual sense (for example, they are not attractors in the sense of Definition 1) (color online)

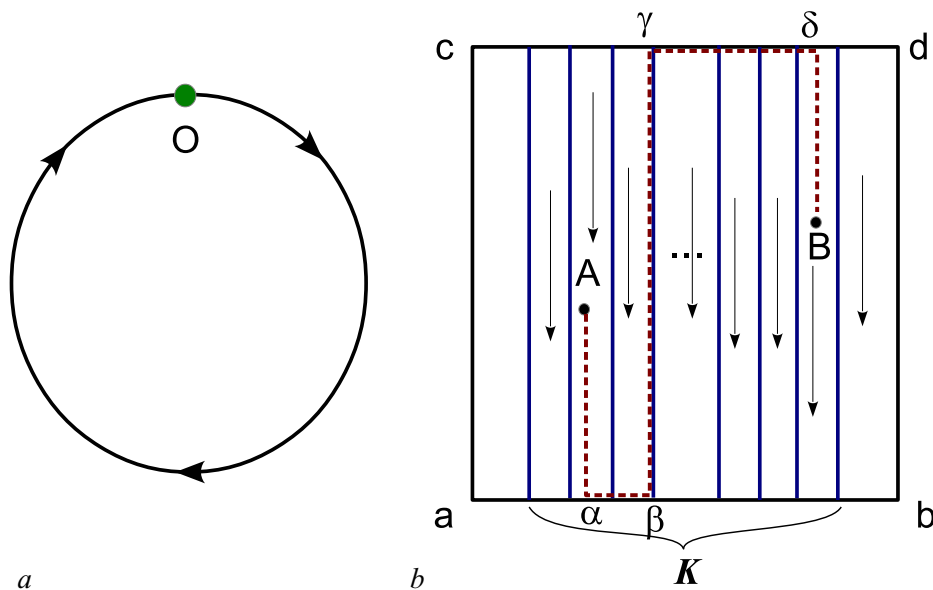


Рис. 6. Два примера систем с аттракторами Милнора:  $a$  – отображение окружности с полуустойчивой точкой  $O$ , которая является аттрактором Милнора, но не аттрактором;  $b$  – двумерный диффеоморфизм с канторовским множеством  $\mathcal{K}$  отрезков неподвижных точек, у которого аттрактор Милнора  $A_M$  это либо  $A_M = [ab]$ , если  $\text{mes } \mathcal{K} = 0$ , либо  $A_M = [ab] \cup \mathcal{K}$ , если  $\text{mes } \mathcal{K} \neq 0$  (цвет онлайн)

Fig. 6. Two examples of systems with Milnor attractors:  $a$  – a circle map with a semistable point  $O$ , which is a Milnor attractor but not an attractor;  $b$  – a two-dimensional diffeomorphism with a Cantor set  $\mathcal{K}$  of segments of fixed points, for which the Milnor attractor  $A_M$  is either  $A_M = [ab]$  if  $\text{mes } \mathcal{K} = 0$  or  $A_M = [ab] \cup \mathcal{K}$  if  $\text{mes } \mathcal{K} \neq 0$

$\omega$ -предельных траекторий также не всегда является аттрактором. Заметим, что в этом примере максимальным аттрактором является вся окружность, поскольку она целиком как фазовое пространство является единственно возможной здесь поглощающей областью.

Интересно также, что аттрактор Милнора, в отличие от максимального, может вообще не быть топологическим инвариантом (в том смысле, что у двух топологически эквивалентных систем аттракторы Милнора могут быть разными). Скорее всего, это может быть только в сильно вырожденном случае. Однако все же некоторые примеры систем подобного типа существуют. Один из них, пример С. Минкова [64], проиллюстрирован на рис. 6,  $b$ . Это диффеоморфизм  $\hat{f}$  квадрата  $Q$ , обладающий следующими свойствами. Квадрат  $Q$  содержит канторовское множество  $\mathcal{K}$  вертикальных отрезков, все точки сторон квадрата и точки множества  $\mathcal{K}$  неподвижные, а остальные точки квадрата при итерациях  $\hat{f}$  стремятся к его нижней стороне  $[a, b]$ . В том случае, когда мера канторовского множества  $\mathcal{K}$  равна нулю, аттрактором Милнора диффеоморфизма  $\hat{f}$  является отрезок  $[a, b]$ . Однако, когда мера  $\mathcal{K}$  ненулевая, аттрактором Милнора будет являться уже множество  $[a, b] \cup \mathcal{K}$ . С другой стороны, очевидно, что любые два таких диффеоморфизма, независимо от меры множества  $\mathcal{K}$ , являются топологически эквивалентными.

Только что рассмотренные примеры показывают, что в определение аттрактора, во-первых, должно входить в каком-то виде условие на тип устойчивости (например, асимптотическая устойчивость, как в классическом определении), а во-вторых, это условие, а также все остальные, должно формулироваться в топологических терминах – тогда аттрактор всегда будет топологическим инвариантом.

Для авторов статьи [4] о математической концепции трех типов хаоса оказалось большим подспорьем, что такое весьма подходящее для их цели определение аттрактора уже давно существует. Оно было дано в работах Конли, Рюэлла и Харли [10, 32, 33] еще в начале 80-х в терминах

топологической динамики. Поэтому мы назвали такой аттрактор в работе [4] аттрактором Конли–Рюэлля–Харли, или сокращенно *CRH-аттрактором*. В этой же работе [4] были введены понятия *полного аттрактора* и *полного аттрактора по Рюэллю* на основе определения CRH-аттрактора, которые в конце концов позволили построить концепцию трех форм динамического хаоса. Ниже мы кратко коснемся этих вопросов.

**1.4. CRH-аттракторы.** Напомним некоторые факты и определения из топологической динамики [1]. Рассмотрим гомеоморфизм  $f$  (непрерывное взаимнооднозначное отображение) компактного метрического пространства  $M$ .

Последовательность точек  $\{y_i\} \in M, i = 0, \pm 1, \dots$  называется траекторией отображения  $f$ , если  $y_{i+1} = f(y_i)$ . Бесконечные в одну сторону последовательности  $\{y_1, y_2, \dots\}$  и  $\{\dots, y_{-1}, y_0, y_1\}$  называются положительной и, соответственно, отрицательной полутраекторией точки  $y_1$ , а конечная последовательность  $\{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  — траекторией длины  $N$ . Точка  $a \in M$  называется  $\omega$ -предельной (соответственно,  $\alpha$ -предельной), если существует подпоследовательность точек  $y_{i_n} \subset \{y_i\}$  такая, что  $y_{i_n} \rightarrow a$  при  $i_n \rightarrow +\infty$  (соответственно при  $i_n \rightarrow -\infty$ ). Инвариантные множества, которые являются замыканием всех  $\omega$ -предельных и  $\alpha$ -предельных точек, называются соответственно  $\omega$ -предельным и  $\alpha$ -предельным множеством траектории  $\{y_i\}$ , а также  $\omega$ - и  $\alpha$ -предельным множеством любой точки этой траектории.

Для этих чисто динамических объектов в топологической динамике, см., например, [1], существуют свои аналоги, в основе которых лежит понятие  $\varepsilon$ -траектории.

**Определение 2.** Последовательность точек  $x_1, \dots, x_N$  называется  $\varepsilon$ -траекторией (длины  $N$ ) отображения  $f$ , если  $\text{dist}(f(x_j), x_{j+1}) < \varepsilon$  для всех  $j = 1, \dots, N - 1$ . Мы будем говорить, что  $\varepsilon$ -траектория  $x_1, \dots, x_N$  соединяет точки  $x_1$  и  $x_N$  и что  $x_N$  достижима от  $x_1$  (по  $\varepsilon$ -траекториям длины  $N$ ).

Соответствующим образом определяются положительные и отрицательные  $\varepsilon$ -траектории. Кроме того,  $\varepsilon$ -аналог для  $\omega$ -предельного множества точки  $x_1$ , так называемая *пролонгация* точки  $x_1$ , определяется как пересечение множеств  $\omega$ -предельных множеств для всех положительных  $\varepsilon$ -траекторий точки  $x_1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Заметим, что пролонгация точки — это замкнутое инвариантное множество, которое не только содержит  $\omega$ -предельное множество этой точки, но может быть больше его. Так, в примере рис. 5, с для точки  $x$  ее  $\omega$ -предельным множеством является седло  $O$ , а ее пролонгация — это отрезок  $[a, b]$  неустойчивого многообразия точки  $O$ , концевыми точками этого отрезка являются устойчивые точки  $a$  и  $b$ .

Напомним еще некоторые важные для нас понятия из топологической динамики.

**Определение 3.** Замкнутое инвариантное множество  $\Lambda$  называется *цепно-транзитивным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  и любых двух точек  $x \in \Lambda$  и  $y \in \Lambda$  существует  $\varepsilon$ -траектория, которая лежит в  $\Lambda$  и соединяет  $x$  и  $y$ .

**Определение 4.** Замкнутое инвариантное множество  $A_{tot}$  называется *устойчивым относительно постоянно действующих возмущений* (или *тотально устойчивым*), если оно устойчиво по Ляпунову относительно  $\varepsilon$ -траекторий для любого  $\varepsilon > 0$ . То есть если для любого  $\delta > 0$  существуют такое достаточно малое  $\varepsilon > 0$  такое, что любая положительная  $\varepsilon$ -траектория любой точки множества  $A_{tot}$  не покидает его  $\delta$ -окрестности.

Теперь мы можем дать определение аттрактора, на которое будем опираться в дальнейшем.

**Определение 5.** Замкнутое инвариантное множество, целиком лежащее в некоторой поглощающей области  $U$ , которое цепно-транзитивно и устойчиво относительно постоянно действующих возмущений, называется *CRH-аттрактором*.

Соответственно, CRH-репеллер определяется как CRH-аттрактор при обращении времени.

Можно высказать целый ряд аргументов в пользу использования такого определения аттрактора, которое обобщает другие хорошо известные определения, например, определения гиперболических аттракторов и аттракторов лоренцевского типа<sup>10</sup>, также явно содержит условие устойчивости и, кроме того, так определенный аттрактор является инвариантом топологической эквивалентности.

Одним из важных достоинств такого определения аттрактора является его практическая направленность. Действительно, когда численно или на эксперименте изучается какая-либо система, никогда нет гарантии, что она известна точно. Например, в том смысле, что на численном счете вместо точек траектории системы мы получаем последовательность точек, которые принадлежат, из-за ошибок счета, траектории(ям) постоянно изменяющейся, близкой, но другой системы. Поэтому то, что мы наблюдаем в эксперименте, это на самом деле нечто типа весьма специфической  $\varepsilon$ -траектории с достаточно малым  $\varepsilon$ . То есть в определенной мере определение 5 можно рассматривать как определение физически наблюдаемого аттрактора, когда точность наблюдения достаточно высока (соответственно,  $\varepsilon$  мало).<sup>11</sup>

Заметим также, что понятие CRH-аттрактора оказалось весьма важным и для теории динамического хаоса в целом. Так, например, в работе [4] было отмечено, что у конечномерных систем с компактным фазовым пространством  $M$  могут быть CRH-аттракторы только следующих трех типов:

- *консервативного* типа — в этом случае все фазовое пространство  $M$  является цепно-транзитивным множеством, и тогда  $M$  будет одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером;
- *диссипативного* типа — в этом случае в любой окрестности CRH-аттрактора существуют точки (отличные от точек самого аттрактора), положительные полутраектории которых стремятся к нему;
- *смешанного* типа — тогда это *обратимое ядро* (reversible core), то есть CRH-аттрактор, который одновременно является и CRH-репеллером; в этом случае любая траектория точки, не принадлежащей аттрактору, все время находится в его окрестности, но не стремится к этому аттрактору-репеллеру ни в прямом, ни в обратном времени. Более того, для любой точки, не принадлежащей ядру, существует такое  $\varepsilon > 0$ , что любая ее положительная и отрицательная  $\varepsilon$ -траектория не соединяет эту точку с точками обратимого ядра.

**1.5. Простейшие примеры CRH-аттракторов.** Самые известные примеры CRH-аттракторов *консервативного типа* — это сохраняющие объем отображения или потоки компактно-многообразия  $M$ , которое само является в этом случае цепно-транзитивным множеством. Соответственно,  $M$  является одновременно и CRH-аттрактором, и CRH-репеллером. Существуют похожие примеры не сохраняющих объем отображений (но обязательно где-то его растягивающие, а где-то сжимающие), например, ановские отображения тора [28]. Другой пример — это отображение окружности с полуустойчивой неподвижной точкой  $O$ , см. рис. 6, *a*. Заметим, что в этом случае CRH-аттрактором (и CRH-репеллером) является вся окружность, так как любые ее две точки можно соединить  $\varepsilon$ -траекторией для любого  $\varepsilon > 0$ .

Заметим также, что у примера двумерного диффеоморфизма  $\hat{f}$ , показанного на рис. 6, *b*, также существует CRH-аттрактор консервативного типа — это весь квадрат  $Q$ . Нетрудно видеть, что

<sup>10</sup>В частности, в определение лоренцевских аттракторов часто входит условие их транзитивности, которое может и не выполняться даже для аттрактора Лоренца [44], однако цепная транзитивность здесь всегда существует.

<sup>11</sup>Для того чтобы получить математически достоверную информацию о динамике системы и то не всю, приходится не только использовать «безумную» точность вычислений, но и каждый раз их контролировать, например, с помощью методов интервальной арифметики или чего-то другого, см., например, [35, 42].



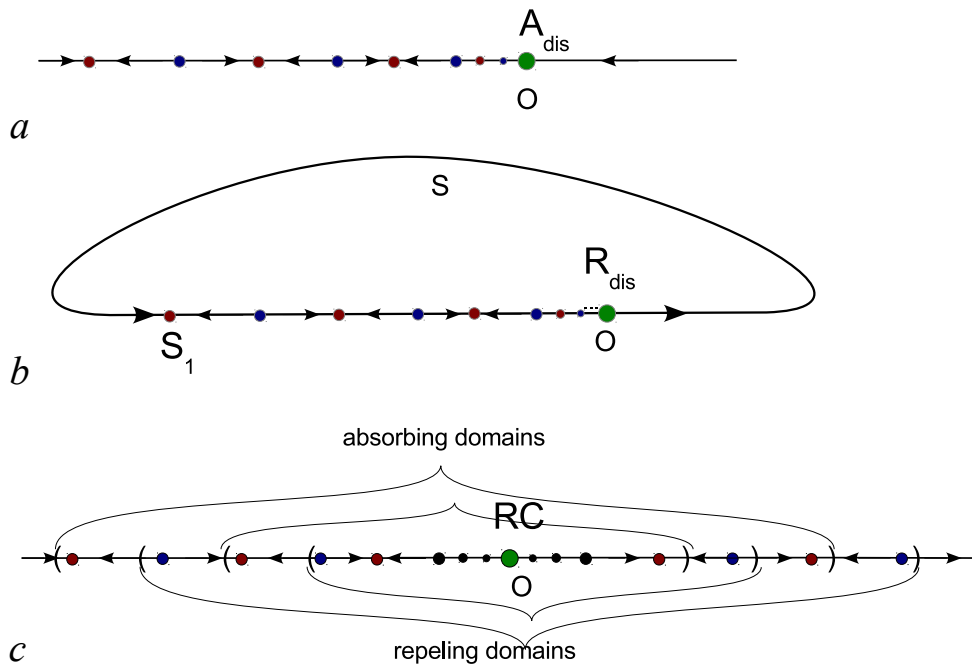


Рис. 7. Примеры одномерных отображений, у которых неподвижная точка  $O$  является пределом стоков и источников, и одновременно  $a$  – диссипативным  $CRH$ -аттрактором;  $b$  – диссипативным  $CRH$ -репеллером;  $c$  – обратимым ядром –  $CRH$ -аттрактором, который является одновременно и  $CRH$ -репеллером (цвет онлайн)

Fig. 7. Examples of one-dimensional maps whose fixed point  $O$  is a limit of sinks and sources, and simultaneously  $a$  – a dissipative  $CRH$ -attractor;  $b$  – a dissipative  $CRH$ -repeller;  $c$  – a reversible core –  $CRH$ -attractor that is also  $CRH$ -repeller (color online)

$Q$  является здесь цепно-транзитивным множеством. Действительно, пусть  $A(x_1, y_1)$  и  $B(x_2, y_2)$  – какие-либо две точки квадрата. Тогда легко построить  $\varepsilon$ -траекторию, соединяющую точки  $A$  и  $B$ : из точки  $A$  спускаемся по линии  $x = x_1$  до стороны  $[a, b]$  квадрата, по этой стороне, так как она состоит из неподвижных точек, достигаем (по  $\varepsilon$ -траектории) одной из линий множества  $\mathcal{K}$ , по этой линии добираемся до стороны  $[c, d]$ , по ней доходим до точки с координатой  $x = x_2$  и спускаемся вниз до точки  $B$  (путь  $AB$ , отмеченный пунктирной линией на рис. 6, b).

Примеры диссипативных  $CRH$ -аттракторов хорошо известны. Это, например, гиперболические аттракторы (в том числе простые – периодические стоки), аттракторы Лоренца, а также так называемые псевдогиперболические аттракторы [37, 38, 65]<sup>12</sup>. Все они также являются максимальными аттракторами в своей окрестности и характеризуются тем, что к ним стремятся все близкие траектории. Другой тип диссипативных  $CRH$ -аттракторов составляют те, к которым стремятся не все траектории точек из их окрестности. Простейший пример такого аттрактора в случае одномерного отображения показан на рис. 7, a. Здесь точка  $O$  является диссипативным  $CRH$ -аттрактором, так как траектории всех точек справа от точки  $O$  к ней стремятся, и одновременно  $O$  является также пределом (слева) бесконечной последовательности стоков и источников. В случае примера рис. 7, b точка  $O$  является  $CRH$ -репеллером (и одновременно она – предел бесконечной последовательности стоков и источников).

<sup>12</sup>Псевдогиперболические аттракторы характеризуются тем, что у любой их траектории существует положительный максимальный показатель Ляпунова, но тем не менее поведение траекторий в целом не является равномерно гиперболическим. Здесь возможны многочисленные бифуркации, но никакие из них не приводят к появлению устойчивых периодических траекторий. Это связано с тем, что в поглощающей области псевдогиперболического аттрактора система устроена так, что существуют инвариантные направления сильного (экспоненциального) сжатия и на трансверсальных к этим направлениям площадках их объемы растягиваются (также экспоненциально), подробнее см. [37, 66].

Примеров CRH-аттракторов смешанного типа — обратимых ядер — известно не так много, поскольку их теория начала развиваться сравнительно недавно. Обратимое ядро отличается от диссипативного аттрактора тем, что оно не притягивает (и не отталкивает) никаких траекторий. С другой стороны, динамика здесь не является также чисто консервативной. Так, в [4] (см. там теорему 1) показано, что

- обратимое ядро является пределом последовательности диссипативных аттракторов и репеллеров.

Простейшая иллюстрация к этой теореме показана на рис. 7, *c* для элементарного примера обратимого ядра одномерного отображения. Здесь точка  $O$  — обратимое ядро: она является пределом бесконечного множества диссипативных аттракторов и репеллеров (стоков и источников), однако сама не притягивает и не отталкивает никаких траекторий — любая траектория из ее окрестности стремится к ближайшему аттрактору, а в обратном времени — к ближайшему репеллеру. На рис. 7, *a* и 7, *b* показаны похожие примеры, у которых, однако, точка  $O$  не является обратимым ядром: в случае (*a*) она не репеллер (но является диссипативным CRH-аттрактором), а в случае (*b*) она не аттрактор.

Нетривиальными примерами обратимых ядер могут служить типичные симметричные эллиптические периодические траектории обратимых двумерных диффеоморфизмов [4,67]. В случае сохраняющих площадь отображений типичная эллиптическая траектория устойчива по Ляпунову из-за того, что она окружена континуумом инвариантных КАМ-кривых, которые не позволяют траектории уйти из окрестности точки. Однако такая точка неустойчива относительно постоянно действующих возмущений, поскольку КАМ-кривые и консервативные резонансы-гирлянды между ними не являются препятствием для  $\varepsilon$ -траекторий, рис. 8, *a*. В случае обратимых двумерных

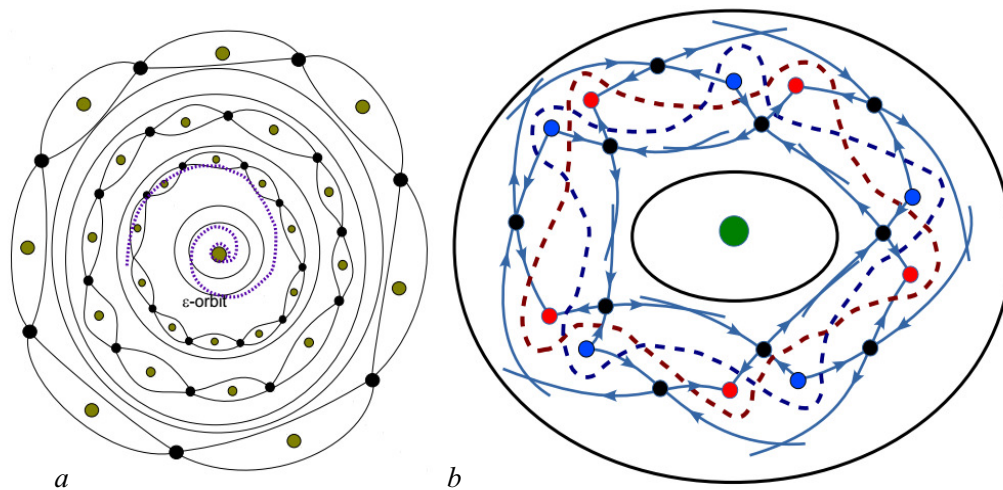


Рис. 8. Иллюстрация к структуре окрестности эллиптической точки  $O$ : *a* — в случае сохраняющего площадь отображения, здесь также символически показана  $\varepsilon$ -траектория, по которой точки могут убежать из окрестности точки  $O$ ; *b* — в случае обратимого отображения вокруг симметричной точки  $O$  также существуют КАМ-кривые, однако резонансы могут стать непроходимыми как для положительных, так и отрицательных  $\varepsilon$ -траекторий с достаточно малым  $\varepsilon$  из-за появления симметричных пар «источник-сток» периодических траекторий внутри резонансов (цвет онлайн)

Fig. 8. Illustration of the structure of a neighborhood of elliptic point  $O$ : *a* — in the case of area-preserving map, here is also symbolically shown an  $\varepsilon$ -orbit along which points can escape from the neighborhood of  $O$ ; *b* — in the case of reversible map, there are also KAM-curves around the symmetric point  $O$ , but the resonances can become impassable for both forward and backward  $\varepsilon$ -orbits with sufficiently small  $\varepsilon$  due to the appearance of symmetric “source-sink” pairs of periodic trajectories inside the resonances (color online)

диффеоморфизмов симметричная эллиптическая точка устроена очень похоже, поскольку она также окружена континуумом инвариантных КАМ-кривых, но в типичном случае [67] у нее появляются непроходимые для  $\varepsilon$ -траекторий резонансные зоны, внутри которых лежат периодические стоки и источники, рис. 8, *b*. Соответственно, как положительные, так и отрицательные  $\varepsilon$ -траектории с достаточно малым  $\varepsilon$  не могут перескочить через эти резонансы. Более подробно об этом см. в [4, 67].

**1.6. Полный аттрактор и полный аттрактор по Рюэллю.** Несомненно, что  $CRH$ -аттракторы — это настоящие аттракторы, которые составляют базис устойчивой динамики многомерных систем. В случае систем с гиперболическими и псевдогиперболическими аттракторами эти аттракторы также являются и  $CRH$ -аттракторами. Однако хорошо известно, что существуют странные аттракторы, которые не являются цепно-транзитивными множествами. Так, например, часто встречающиеся в приложениях квазиаттракторы (этот термин был предложен Афраймовичем и Шильниковым [12]) могут содержать внутри устойчивые периодические траектории (стоки) с настолько узкими областями притяжения и большими периодами, что они никак не обнаруживаются в экспериментах, и поэтому динамика кажется полностью хаотической. По этой причине квазиаттракторы также относят к странным аттракторам, во всяком случае, когда речь идет об экспериментах и прикладных задачах. Когда периодические стоки внутри квазиаттрактора имеют области притяжения очень малой ширины  $d$ , то они не являются препятствием для  $\varepsilon$ -траекторий с  $\varepsilon > d$ . Поэтому на численном счете, если точность вычислений не превышает  $d$ , такие аттракторы выглядят как  $CRH$ -аттракторы. Однако заранее величина  $d$  неизвестна, поэтому характерным свойством квазиаттракторов является то, что при изменении параметров хаотическое поведение траекторий может неожиданно сменяться регулярным (и наоборот). Соответствующие области значений параметров называются окнами устойчивости; они отвечают тому, что устойчивые периодические траектории становятся наблюдаемыми.

Примеров систем с квазиаттракторами очень много — это громадное большинство странных аттракторов моделей из приложений, кроме тех, для которых заранее известно, что они обладают гиперболическими или псевдогиперболическими аттракторами. Последних же, наоборот, пока еще очень мало<sup>13</sup>. Из этого можно сделать вывод, что квазиаттракторы нужно обязательно включать в хаотическую динамику. Это нужно делать даже с математической точки зрения, поскольку, как выясняется, без привлечения квазиаттракторов нельзя объяснить явление смешанной динамики, при котором пересекающиеся аттракторы и репеллеры, хотя и занимают примерно одну и ту же область фазового пространства, но никогда не совпадают полностью. В связи с этим отметим один результат, установленный в работе [4] (см. теорему 2 там):

- если  $CRH$ -аттрактор имеет непустое пересечение с  $CRH$ -репеллером, то они оба совпадают.

В частности, отсюда вытекает, что в случае смешанной динамики пересекающиеся аттракторы и репеллеры не являются цепно-транзитивными множествами, поскольку в противном случае они бы полностью совпадали. Их правильно нужно считать квазиаттракторами и квазирепеллерами.

Далее будем предполагать, что фазовое пространство  $M$  гомеоморфизма  $f$  не является цепно-транзитивным, соответственно, динамика не является топологически консервативной. Введем следующее понятие аттрактора для точки.

<sup>13</sup>Гиперболические аттракторы в физических моделях были открыты совсем недавно в работах С. П. Кузнецова, см. [41]. К псевдогиперболическим аттракторам можно отнести аттракторы Лоренца [44, 45], некоторые странные аттракторы опять же лоренцевского типа в случае трехмерных отображений [46, 47, 49, 50] и дикий спиральный аттрактор Тураева–Шильникова [37, 38]. Пожалуй, это все, что нам известно о таких настоящих странных аттракторах, которые являются, конечно,  $CRH$ -аттракторами.

**Определение 6.** Множество  $A_x$  называется аттрактором точки  $x$ , если оно является  $CRH$ -аттрактором и достижимо из  $x$  по  $\varepsilon$ -траекториям для любого  $\varepsilon > 0$ .

Заметим, что у точки  $x$  может быть несколько  $CRH$ -аттракторов. Например, на рис. 5,  $b$  у точки  $x$ , лежащей на устойчивой сепаратрисе седла  $O$ , существуют два таких аттрактора, точки  $a$  и  $b$ . Если число таких аттракторов конечно, то их объединение будем называть *полным аттрактором* точки  $x$ . В случае бесконечного числа таких аттракторов полным аттрактором точки  $x$  будем называть *замыкание объединения всех аттракторов точки  $x$* . Таким образом, полный аттрактор является замкнутым инвариантным множеством  $A_0(x)$ , которое, однако, не обязательно будет устойчивым. Как известно из топологической динамики [1], минимальное замкнутое устойчивое множество, содержащее  $A_0(x)$  — это *продолгация* множества  $A_0(x)$ , то есть *множество всех точек, достижимых из  $A_0(x)$  для всех произвольно малых  $\varepsilon > 0$* . Мы будем называть это множество *полным аттрактором по Рюэллю точки  $x$* .

Аналогичным образом определяется [4]:

**Определение 7.** *Полный аттрактор отображения  $f$  — это замыкание объединения всех  $CRH$ -аттракторов его точек, а полный аттрактор по Рюэллю отображения  $f$  — это продолгация его полного аттрактора.*

Таким же образом определяются репеллеры — как аттракторы для обратного отображения  $f^{-1}$ .

Рассмотрим простые примеры, показанные на рис. 7. На рис. 7,  $a$  полный аттрактор — это замыкание счетного множества стоков и точки  $O$ , к которой они накапливаются. Сама точка  $O$  является диссипативным  $CRH$ -аттрактором (но не репеллером). Очевидно, здесь полный аттрактор и полный аттрактор по Рюэллю совпадают. В примере рис. 7,  $b$  аналогично полный аттрактор состоит из счетного множества стоков и точки  $O$ . Однако точка  $O$  сама по себе не является аттрактором. Полный аттрактор по Рюэллю здесь получится, если к полному аттрактору добавим еще дугу  $\widehat{OS}_1$  — продолгацию точки  $O$ . Полученное множество уже будет устойчивым. В примере рис. 7,  $c$  полный аттрактор по Рюэллю (объединение счетного множества стоков и точки  $O$ ) и полный репеллер по Рюэллю (объединение счетного множества источников и точки  $O$ ) пересекаются по точке  $O$ , которая является здесь обратимым ядром. Этот последний пример можно рассматривать в качестве простейшей иллюстрации смешанной динамики.

## 2. Об областях Ньюхауса со смешанной динамикой

Как хорошо известно, в шестидесятых годах началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем. Одним из главных ее достижений явилось создание гиперболической теории — теории грубых многомерных систем. По определению гиперболические системы образуют открытые области в пространстве динамических систем, но в отличие от двумерных, они не плотны, так как негрубые многомерные системы также могут образовывать области в пространстве динамических систем. И здесь прежде всего следует отметить области негрубости, связанные с гомоклиническими касаниями, так называемые *области Ньюхауса* [68, 69], а также области систем с аттракторами Лоренца [43, 44]. Однако если для полного описания аттракторов Лоренца в несимметричном случае требуется только два инварианта — нидинг-инварианта (в симметричном случае — один) [70, 71], то в областях Ньюхауса ситуация значительно сложнее [72–75]: здесь требуется бесконечное множество инвариантов (в частности, так называемых  $\Omega$ -модулей [76, 77]). Материализацией последнего факта является то, что в областях Ньюхауса плотны системы со счетным множеством периодических движений любых порядков вырождения, а также системы со счетным множеством гомоклинических касаний любых порядков [73, 78].

Фундаментальным свойством областей Ньюхауса является то, что они существуют в любой окрестности любой системы с гомоклиническим касанием. В случае двумерных диффеоморфизмов этот результат был доказан в работе Ньюхауса [69], а в многомерном случае — в работах [58, 79, 80]. Более того, как было показано в [58], если исходное квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной (периодической) точке  $O$  многомерной системы  $F_0$  является простым и оно в однопараметрическом семействе  $F_\mu$  расщепляется при  $\mu = 0$  общим образом, то в этом семействе в любой окрестности  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$  точки  $\mu = 0$  существуют интервалы Ньюхауса  $\Delta_{hom}^i \subset I_\varepsilon$ . При этом в  $\Delta_{hom}^i$  плотны значения  $\mu$ , при которых  $F_\mu$  имеет квадратичное гомоклиническое касание к точке  $O_\mu$ , и это касание расщепляется общим образом при изменении  $\mu$ .

В этом параграфе мы ограничимся только случаем двумерных диффеоморфизмов, для которого квадратичное гомоклиническое касание многообразий седловой неподвижной (периодической) точки  $O$  всегда является простым, если ее седловая величина  $\sigma$  отлична от 1. Здесь  $\sigma = |\lambda\gamma|$ , где  $\lambda$  и  $\gamma$  — мультипликаторы точки  $O$  (собственные значения линеаризованного в ней отображения Пуанкаре — отображения за период в данном случае). В этом случае справедлив следующий результат:

**Теорема 1.** Теорема Ньюхауса [11]. Пусть  $F_\mu$  — однопараметрическое семейство, в котором квадратичное гомоклиническое касание к точке  $O$  расщепляется при  $\mu = 0$  общим образом. Тогда в интервалах  $\Delta_{hom}^i$  типичны значения  $\mu$ , при которых  $F_\mu$  имеет счетное множество асимптотически устойчивых (вполне неустойчивых) периодических траекторий при  $\sigma < 1$  (при  $\sigma > 1$ ).

Заметим, что в [74, 75, 81] для многомерных систем, близких к системе с гомоклиническим касанием, найдены условия как существования, так и отсутствия в малой окрестности негрубой гомоклинической траектории периодических траекторий того или иного топологического типа<sup>14</sup>. В частности, в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием было установлено, что если  $\sigma_0 < 1$ , то ни  $g_0$ , ни близкие к  $g_0$  диффеоморфизмы, не имеют в малой окрестности  $U(O \cup \Gamma_0)$  вполне неустойчивых периодических траекторий, а если  $\sigma_0 > 1$  — устойчивых.

Таким образом, при общих условиях двумерные диффеоморфизмы с негрубой гомоклинической траекторией и близкие к ним не могут содержать в ее малой окрестности одновременно устойчивые и вполне неустойчивые периодические траектории.

Заметим, что пограничный случай квадратичного гомоклинического касания с  $\sigma_0 = 1$  был рассмотрен в работе [82], в которой было показано, что такие гомоклинические касания (к нейтральному седлу) могут продуцировать как устойчивые, так и вполне неустойчивые периодические траектории, а также устойчивые и неустойчивые инвариантные кривые (двумерные торы в случае потоков). Соответственно, существование таких гомоклинических касаний к нейтральным седлам вполне можно рассматривать в качестве одного из критериев смешанной динамики. Однако для этого нужно рассматривать уже двухпараметрические семейства. Как оказалось, чтобы обнаружить смешанную динамику в однопараметрических семействах, нужно рассматривать негрубые гетероклинические контуры.

Напомним, что *гетероклиническим контуром* в случае диффеоморфизма называется множество траекторий  $\mathcal{G}$ , содержащее несколько грубых (гиперболических) седловых периодических орбит  $O_1, \dots, O_n$  и гетероклинических к ним траекторий  $\Gamma_{i,i+1} \subset W^u(O_i) \cap W^s(O_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и  $\Gamma_{n,1} \subset W^u(O_n) \cap W^s(O_1)$ .

<sup>14</sup>В [74, 75, 81] было установлено, например, что устойчивые периодические траектории могут возникать даже в случае, когда размерность неустойчивого многообразия точки  $O$  равна 2 (при этом ее неустойчивые мультипликаторы должны быть комплексно сопряженными), и что такие траектории неустранимым образом появляются лишь в двух- и даже трехпараметрических семействах. Соответственно, выход на границу устойчивости может сопровождаться появлением периодических орбит с двумя или даже, соответственно, с тремя мультипликаторами, равными по модулю единице.

В общем случае гетероклинический контур может содержать и другие траектории, например, несколько гетероклинических траекторий типа  $\Gamma_{i,i+1}$  или даже гомоклинические траектории типа  $\Gamma_{i,i}$ . Такой гетероклинический контур будем называть негрубым, если хотя бы одна из его гетероклинических или гомоклинических траекторий является негрубой, то есть в ее точках соответствующие устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются нетрансверсально.

В том случае, когда седловые величины всех неподвижных (периодических) точек негрубого гетероклинического контура одновременно меньше или больше единицы, динамические свойства и бифуркации таких контуров очень похожи на то, что имеет место в случае диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием, хотя и здесь есть свои особенности, см., например, [83, 84]. Однако если гетероклинический контур является *контуром смешанного типа*, то есть он содержит по крайней мере две неподвижные (периодические) точки, у одной из которых седловая величина меньше единицы, а у другой больше единицы, то и динамика в целом становится смешанной [5, 85].

В этом параграфе мы обсудим основной результат работы [5] — теорему о существовании абсолютных областей Ньюхауса вблизи двумерных диффеоморфизмов с негрубыми гетероклиническими контурами смешанного типа.

В работе [5] эта теорема доказывается в самом общем виде, но принципиальная часть доказательства проводится для контуров простейшего типа, таких как на рис. 9, а, а затем с использованием простых геометрических конструкций и понятий это доказательство легко переносится и на общий случай негрубых гетероклинических контуров, таких как на рис. 9, б.

Пусть  $f_0$  — двумерный диффеоморфизм с простейшим негрубыми гетероклиническим контуром, рис. 9, а. Он имеет две седловые неподвижные точки  $O_1$  и  $O_2$  с мультипликаторами  $\lambda_1, \gamma_1$  и  $\lambda_2, \gamma_2$  соответственно, где  $0 < \lambda_i < 1 < \gamma_i$ . Мы также предполагаем, что  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$  пересекаются трансверсально в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{12}$ , а  $W^u(O_2)$

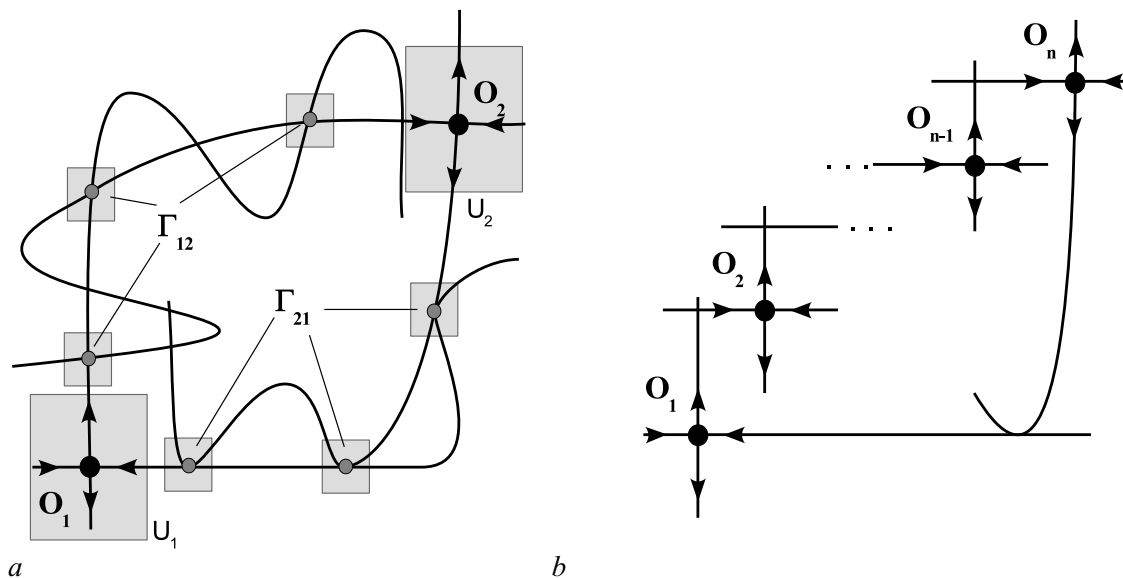


Рис. 9. Примеры двумерных диффеоморфизмов с простыми негрубыми гетероклиническими контурами: а — контур простейшего типа, который содержит 2 седловые неподвижные точки; б — контур общего типа с  $n$  седловыми неподвижными точками

Fig. 9. Examples of two-dimensional diffeomorphisms with simple non-transversal heteroclinic cycle: а — a cycle of simplest type which contains 2 saddle fixed points; б — a cycle of general type with  $n$  saddle fixed points

и  $W^s(O_1)$  имеют квадратичное касание в точках некоторой гетероклинической траектории  $\Gamma_{21}$ , рис. 9, а. Обозначим  $\sigma_i$  седловую величину точки  $O_i$ , то есть  $\sigma_i = |\lambda_i \gamma_i|$ . Будем предполагать, что у  $f_0$  одна из седловых величин  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$  меньше единицы, а другая больше единицы. Пусть для определенности  $0 < \sigma_1 < 1 < \sigma_2$ .

Пусть  $U$  — достаточно малая фиксированная окрестность гетероклинического контура  $C = O_1 \cup O_2 \cup \Gamma_{12} \cup \Gamma_{21}$ . Ее можно представить в виде объединения двух окрестностей  $U_1$  и  $U_2$  точек  $O_1$  и  $O_2$  с конечным числом окрестностей  $V_1, \dots, V_n$  тех точек траекторий  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_{21}$ , которые не лежат в  $U_1$  и  $U_2$ , рис. 9. Периодическую траекторию  $Q$ , целиком лежащую в  $U$ , будем называть  $k$ -обходной, если она пересекает каждую из окрестностей  $V_i$  ровно в  $k$  точках.

При исследовании бифуркаций систем с негрубым гетероклиническим контуром естественно в первую очередь рассматривать бифуркации в однопараметрическом семействе  $f_\mu$  диффеоморфизмов, в котором исходное гетероклиническое касание в точках траектории  $\Gamma_{21}$  расщепляется при  $\mu = 0$  общим образом. Это означает, что при малых  $\mu > 0$  (или  $\mu < 0$ ) в  $U$  нет гетероклинических траекторий, близких к  $\Gamma_{21}$ , а при  $\mu < 0$  (или  $\mu > 0$ ) в  $U$  существуют ровно две трансверсальные гетероклинические траектории  $\tilde{\Gamma}_{21}^1$  и  $\tilde{\Gamma}_{21}^2$ , близкие к  $\Gamma_{21}$ , такие, что  $\tilde{\Gamma}_{21}^i(\mu) \rightarrow \Gamma_{21}$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Будем считать для определенности, что траектории  $\tilde{\Gamma}_{21}^1$  и  $\tilde{\Gamma}_{21}^2$  появляются при  $\mu < 0$ . Достаточно очевидно, что при изменении  $\mu$  на отрезке  $(-\varepsilon, 0)$  для любого  $\varepsilon > 0$  в семействе  $f_\mu$  происходят многочисленные бифуркации, в том числе бифуркации, связанные с возникновением новых гомоклинических и гетероклинических касаний. На рис. 10 проиллюстрировано, как они образуются. Рассмотрим локальные куски  $l_i^u$  и  $l_i^s$  многообразий  $W^u(O_i)$  и  $W^s(O_i)$ ,  $i = 1, 2$ , такие, что при  $\mu = 0$  кривые  $l_1^u$  и  $l_2^s$  пересекаются трансверсально в некоторой точке  $M_2$  траектории  $G_{12}$ , а кривые  $l_2^u$  и  $l_1^s$  квадратично касаются в некоторой точке  $M_1$  траектории  $G_{21}$ . Выберем достаточно малые окрестности  $\Pi_1$  точки  $M_1$  и  $\Pi_2$  точки  $M_2$ . При некотором  $\mu < 0$  в этих окрестностях выберем отрезки кривых  $l_i^u$  и  $l_i^s$ : отрезки  $J \subset l_1^u$  и  $K \subset l_2^s$  на  $\Pi_2$  и отрезки  $L \subset l_1^s$  и  $I_0 \subset l_2^u$  на  $\Pi_1$ , как показано на рис. 10, а. При этом отрезок  $I_0$  выбирается так, что отрезок  $I = f_\mu^j(I_0)$  лежит в  $\Pi_2$  и пересекается с  $K$  трансверсально. Это (по  $\lambda$ -лемме) всегда можно сделать для всех достаточно больших  $j$ .

Теперь рассмотрим на  $\Pi_1$  образы и прообразы этих отрезков относительно итераций  $f_\mu$ : отрезки парабол  $I_k = f_\mu^k(I) \cap \Pi_1$  и  $J_k = f_\mu^k(J) \cap \Pi_1$ , а также горизонтальные отрезки  $K_m = f_\mu^{-m}(K) \cap \Pi_1$  и  $L = l_1^s \cap \Pi_1$ . Тогда при варьировании  $\mu$  мы получаем бифуркационные значения параметра:

- $\mu = \mu_k^1$ , отвечающее квадратичному гомоклиническому касанию к точке  $O_1$ , когда  $J_k \subset W^u(O_1)$  касается  $L \subset W^s(O_1)$ , рис. 10, b;
- $\mu = \mu_{kmj}^2$ , отвечающее квадратичному гомоклиническому касанию к точке  $O_2$ , когда  $I_k \subset f_\mu^{j+k}(I_0) \subset W^u(O_2)$  касается  $K_m \subset W^s(O_2)$ , рис. 10, c;
- $\mu = \mu_{km}^{12}$ , отвечающее квадратичному гетероклиническому касанию многообразий  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$ , когда  $J_k$  касается  $K_m$ , рис. 10, d;
- $\mu = \mu_{kj}^{21}$ , отвечающее квадратичному гетероклиническому касанию многообразий  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$ , когда  $I_k$  касается  $L$ , рис. 10, e.

По построению все эти бифуркационные значения  $\mu$  накапливаются к  $\mu=0$  при  $k, j, m \rightarrow \infty$ . Отметим, что значения  $\mu = \mu_{km}^{12}$  и  $\mu = \mu_{kj}^{21}$  отвечают существованию у  $f_\mu$  негрубых гетероклинических контуров: при  $\mu = \mu_k^{12}$  — это контур, содержащий точки  $O_1$  и  $O_2$ , нетрансверсальную гетероклиническую траекторию  $\tilde{\Gamma}_{12}$  и трансверсальную  $\tilde{\Gamma}_{21}$ ; при  $\mu = \mu_k^{21}$  — это контур исходного типа, содержащий точки  $O_1$  и  $O_2$ , старую трансверсальную гетероклиническую траекторию  $\Gamma_{12}$  и новую нетрансверсальную  $\tilde{\Gamma}_{21}$ .

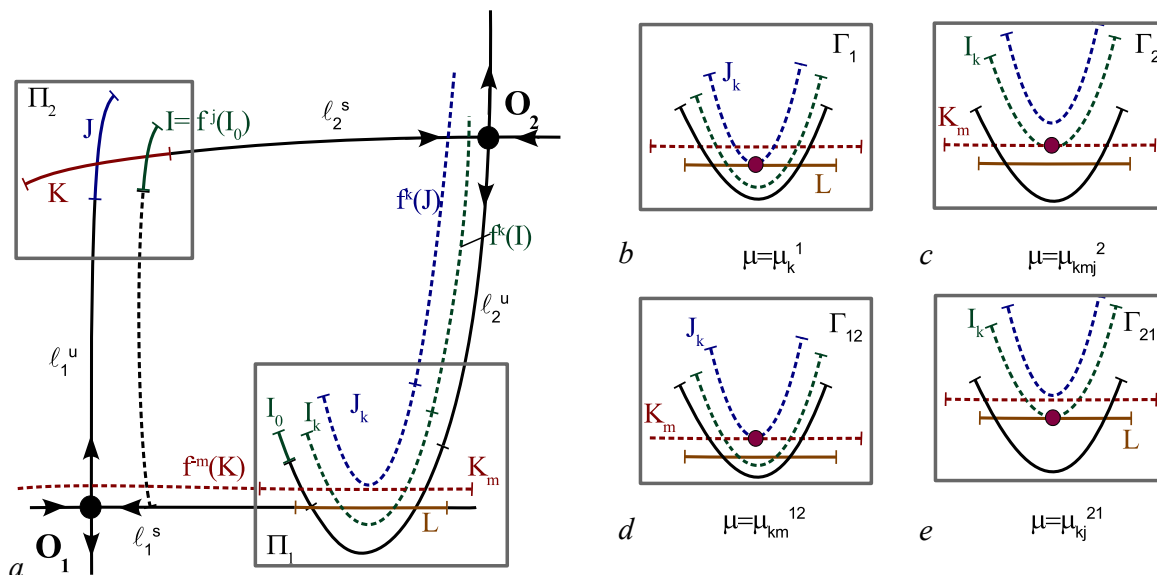


Рис. 10. Иллюстрация к существованию в семействе  $f_\mu$  бифуркаций, связанных с образованием гомоклинических и гетероклинических касаний при расщеплении исходного квадратичного гетероклинического касания между  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$ . *a* – Выделение отрезков многообразий  $W^u(O_i)$  и  $W^s(O_i)$ ,  $i = 1, 2$ , участвующих в образовании соответствующих касаний: *b* – гомоклиническое касание к точке  $O_1$ ; *c* – гомоклиническое касание к точке  $O_2$ ; *d* – гетероклиническое касание между  $W^u(O_1)$  и  $W^s(O_2)$ ; *e* – вторичное гетероклиническое касание между  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  (цвет онлайн)

Fig. 10. Illustration of the existence in the family  $f_\mu$  of bifurcations related to the formation of homoclinic and heteroclinic tangencies at the splitting of the initial quadratic heteroclinic tangency between  $W^u(O_2)$  and  $W^s(O_1)$ . *a* – Selection of segments of manifolds  $W^u(O_i)$  and  $W^s(O_i)$ ,  $i = 1, 2$ , involved in the formation of the corresponding tangencies: *b* – homoclinic tangency to the point  $O_1$ ; *c* – homoclinic tangency to the point  $O_2$ ; *d* – heteroclinic tangency between  $W^u(O_1)$  and  $W^s(O_2)$ ; *e* – a secondary heteroclinic tangency between  $W^u(O_2)$  and  $W^s(O_1)$  (color online)

Для контура того типа, который показан на рис. 10, <sup>15</sup> условие  $\mu < 0$  (соответствующие куски многообразий  $W^u(O_2)$  и  $W^s(O_1)$  пересекаются на  $\Pi_1$  в двух точках) является необходимым: как легко видеть, при  $\mu > 0$  не существует гомоклинических и гетероклинических траекторий к точке  $O_1$ .

Таким образом, в семействе  $f_\mu$  происходят бесконечно много бифуркаций, связанных с образованием квадратичных гомоклинических к неподвижной точке  $O_1$  с седловой величиной  $0 < \sigma < 1$  и к неподвижной точке  $O_2$  с  $\sigma > 1$ . В свою очередь, поскольку в семействе  $f_\mu$  эти касания расщепляются общим образом, это приводит к тому, что у диффеоморфизмов  $f_\mu$  появляются устойчивые и вполне неустойчивые периодические траектории, а также, как показано в [5], интервалы со смешанной динамикой. Последний результат как итоговый в этом параграфе мы сформулируем более детально.

<sup>15</sup>В двумерном случае негрубые гетероклинические контуры могут быть разбиты на три класса [83, 84] в зависимости от типа описания множества  $N$  траекторий, целиком лежащих в малой окрестности  $U$  контура: тривиальное (когда  $N = \{O_1, O_2, \Gamma_{12}, \Gamma_{21}\}$ ); полное (когда все траектории  $N$  находятся во взаимнооднозначном соответствии с топологической схемой Бернулли из 4-х символов, в которой две гетероклинические траектории отождествлены); хаотическое (когда  $N$  является релятивно негрубым даже в случае, когда гетероклиническое касание сохраняется, в  $N$  непрерывным образом происходят бифуркации, в том числе с периодическими траекториями при варьировании параметров). Как и системы с гомоклиническими касаниями, системы с негрубыми гетероклиническими контурами играют важную роль в вопросах классификации глобальных бифуркаций. Так, контуры с тривиальным описанием могут принадлежать границе систем с простой структурой (систем Морса–Смейла), контуры с полным описанием – границе систем с нетривиальной равномерно гиперболической динамикой, а контуры с хаотическим описанием всегда лежат в областях систем с хаотической негиперболической динамикой (в том числе в областях Ньюхауса) [84].



**Теорема 2. (Гонченко–Тураев–Шильников [5]).** В семействе  $f_\mu$  на любом отрезке  $[-\mu_0, \mu_0]$  значений параметра  $\mu$  существуют интервалы Ньюхауса  $\Delta_i$  со смешанной динамикой, то есть в  $\Delta_i$  плотны (и типичны) значения параметра  $\mu$ , при которых  $f_\mu$  имеет одновременно счетное множество устойчивых и счетное множество вполне неустойчивых периодических траекторий. Замыкания множеств этих траекторий всегда содержат точки  $O_1$  и  $O_2$ .

Эта теорема также допускает следующее обобщение. Пусть диффеоморфизм  $f_\mu$  имеет в  $U$  при всех  $|\mu| < \mu_0$  равномерно гиперболическое множество  $\Lambda$  (например, какую-нибудь подкову Смейла). Тогда для типичного множества значений  $\mu$  из интервала  $\Delta_i$  замыкание множества стоков и замыкание множества источников в своем пересечении содержат  $\Lambda$ <sup>16</sup>. Еще с работы [39, 40] хорошо известно, что гиперболические множества занимают большую часть множества траекторий из окрестности гомоклинического касания, и более того, они создают скелет хаотической динамики в квазиаттракторах (и в квазирепеллерах).

Как мы сейчас знаем, в работе [5] было открыто новое динамическое явление, названное впоследствии *смешанной динамикой* [86, 87]. Как оказалось, у этого явления существует два взаимно связанных, но принципиально разных уровня. Первый, чисто математический, — это новый цикл результатов в теории динамических систем, связанный с существованием многомерных систем, демонстрирующих исключительное и максимальное разнообразие динамики, и постулируемый в таких новых понятиях, как абсолютные области Ньюхауса, ультимативно дикое гиперболическое множество [6, 7], системы с универсальной динамикой [8], с максимальной эффективной и бифуркационной размерностью [9] и т. п.

Второй уровень — это то, что можно назвать как «три типа динамики» или «три типа динамического хаоса», и это то, что привело к открытию нового третьего типа динамического хаоса, который называется «смешанной динамикой». Второй уровень — гораздо более широкий, и он выходит далеко за рамки просто математики и теории динамических систем. Работа [5] относится, конечно, к первому уровню, но в ней были получены прорывные результаты, которые, собственно, и позволили почти через 20 лет перейти на второй уровень. В результате чего, в работах [17, 18] уже в явном виде обсуждались проблемы смешанной динамики как третьей формы динамического хаоса<sup>17</sup>, а ее математическое обоснование было дано в работах [3] и [4]. При этом в работе [3] рассматривались только обратимые (реверсивные) системы, а в работе [4] теория смешанной динамики была построена в самом общем виде для гомеоморфизмов компактных фазовых пространств на основе базовых понятий топологической динамики.

### 3. Примеры динамических систем из приложений, обладающих смешанной динамикой

В этом параграфе мы рассмотрим ряд моделей из приложений, в которых была обнаружена смешанная динамика. Таких известных нам моделей пока еще не слишком много, во-первых, в силу того, что сама концепция смешанной динамики возникла совсем недавно, а во-вторых, наверняка многие модели такого рода нам неизвестны в силу того, что тематика, связанная с аттракторами, всегда была преобладающей, а репеллеры практически совсем не рассматривались.

Нам кажется, что вообще первой работой, в которой хотя бы и на физическом уровне строгости анализировались взаимоотношения между аттракторами и репеллерами, была работа Пиковского и Топажа [15]. В нашей работе [16] модель Пиковского–Топажа четырех симметрично

<sup>16</sup>Такое утверждение для случая диссипативных областей Ньюхауса доказано в [11], см. также [75]. Сам метод доказательства, основанный на свойствах типичных множеств, автоматически переносится и на случай абсолютных областей Ньюхауса.

<sup>17</sup>В работе [17] было, в частности, показано, что смешанная динамика наблюдается в неголономной модели кельтского камня. По сути, это была первая модель из приложений, в которой этот тип хаоса был целенаправленно обнаружен и исследован.

связанных элементарных ротаторов была рассмотрена с математической точки зрения. Ниже мы дадим обзор некоторых полученных в [16] результатов.

**3.1. Модель Пиковского–Топажа четырех связанных ротаторов.** Модель Пиковского–Топажа [15] представляет собой систему следующего вида:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3 \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{3}$$

Она описывает динамику четырех симметрично и нелинейно связанных элементарных ротаторов  $\Psi_k = \omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , где  $\omega_k$  константы такие, что  $\omega_i - \omega_{i+1} = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , для разности их фаз  $\psi_i = \Psi_i - \Psi_{i+1}$ . Соответственно,  $\psi_i \in [0, 2\pi)$  — это угловые переменные, и фазовым пространством системы (3) является трехмерный тор  $\mathbb{T}^3$ .

В этом параграфе рассмотрим систему (3), на примере которой мы попытаемся объяснить явление пересечения аттрактора и репеллера, которое визуально как бы подтверждается их фазовыми портретами, представленными на рис. 1. Если придерживаться традиционной точки зрения, что аттрактор не может пересекаться с репеллером, то можно представить, что они очень близко подходят друг к другу. Настолько близко, что промежутки между аттрактором и репеллером перестают быть заметными, но тем не менее всегда можно провести две непересекающиеся границы, близкие по форме к фрактальным, для поглощающей и отталкивающей областей. Однако такое представление вступает в противоречие с результатами из [5], и нужно считать, что рисунки 1 хорошо иллюстрируют явление смешанной динамики, о котором мы говорили выше.

Основной целью нашей работы [16] было как раз доказательство существования смешанной динамики в модели Пиковского–Топажа. Заметим, что система (3) является обратимой: она инвариантна относительно обращения времени  $t \rightarrow -t$  и замены координат вида

$$h: \psi_1 \rightarrow \pi - \psi_3, \quad \psi_2 \rightarrow \pi - \psi_2, \quad \psi_3 \rightarrow \pi - \psi_1,\tag{4}$$

которая является инволюцией, то есть  $h^2 = id$ , в случае трехмерного тора.

После замены координат

$$\xi = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}, \quad \eta = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2}, \quad \rho = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2} + \psi_2 - \pi$$

и времени  $t_{new} = (2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta))t$  система (3) принимает следующий вид, см. [16]:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)} \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(\rho - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta)} \\ \dot{\rho} &= 1\end{aligned}$$

или, что эквивалентно, она может быть представлена в форме неавтономной периодической по времени (с периодом  $2\pi$ ) системы вида

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)} \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(t - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)}.\end{aligned}\tag{5}$$

Заметим, что система (5) корректно определена при всех  $\varepsilon < 2$ . Кроме того, она сама, а также ее отображение Пуанкаре  $T = T_{2\pi}$ , то есть отображение сдвига по траекториям за период  $t = 2\pi$ , обладают целым рядом симметрий [16].

- Отображение  $T_{2\pi}$  является обратимым относительно инволюции

$$R : \xi \rightarrow \xi, \eta \rightarrow -\eta,$$

которая является следствием инволюции (4). Это означает, что отображение  $T_{2\pi}$  и его обратное  $T_{2\pi}^{-1}$  сопряжены с помощью инволюции  $R$ , то есть  $T_{2\pi}^{-1} = R \circ T_{2\pi} \circ R$ .

- Система (5) и отображение  $T_{2\pi}$  симметричны относительно линейного преобразования вида

$$\sigma : \xi \rightarrow \pi - \xi, \eta \rightarrow \pi + \eta. \quad (6)$$

- Отображение  $T_{2\pi}$  является квадратом неориентируемого отображения, именно  $T_{2\pi} = (\tilde{T})^2$ , где  $\tilde{T} = \sigma \circ T_\pi$  и  $T_\pi$  — ориентируемое отображение сдвига по траекториям системы (5) за полпериода ( $t = \pi$ )<sup>18</sup>.

При  $\varepsilon = 0$  система (5) является автономной и ее динамика тривиальна — фазовое пространство заполнено замкнутыми траекториями. Соответственно, динамика отображения  $T_{2\pi}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon = 0$  будет полностью квазипериодической. Однако при увеличении  $\varepsilon$  у отображения  $T_{2\pi}(\varepsilon)$  начинают происходить многочисленные бифуркации, связанные с возникновением периодических траекторий, первоначально очень больших периодов, затем эти периоды постепенно уменьшаются, что позволяет численно проследить соответствующие бифуркации.

Так как отображение  $T_{2\pi}$  обратимо, то специальный интерес здесь представляют бифуркации разрушения симметрии, связанные сначала с рождением симметричных периодических траекторий, которые пересекают множество

$$\text{Fix}(R) : \{\eta = 0\} \cup \{\eta = \pi\}$$

неподвижных точек инволюции  $R$ , а затем с появлением из них симметричных пар периодических траекторий противоположных типов устойчивости (например, пары сток и источник или седла с якобианами больше и меньше 1).

В бифуркационный момент негрубая симметричная периодическая траектория двумерного ориентируемого отображения  $T_{2\pi}$  имеет два мультипликатора равных  $+1$ . Напомним, что если траектория  $Q$  отображения  $T$  имеет период  $n$ , то есть  $T^n(q) = q$  для любой точки  $q \in Q$ , то ее мультипликаторы это собственные значения матрицы линеаризации для  $T^n$  в точке  $q$ . В общем обратимом случае симметричные периодические траектории рождаются в результате так называемых параболических бифуркаций, имеющих тип « $0 \rightarrow 2$ », когда из ничего у  $T^n$  возникает симметричная неподвижная точка с мультипликаторами  $(+1; +1)$ , которая затем распадается на две симметричные неподвижные точки — седловую и эллиптическую. Для нашей задачи такие бифуркации не очень интересны, так как они в главном порядке являются консервативными.

Гораздо больший интерес представляют обратимые бифуркации типа « $0 \rightarrow 4$ », которые встречаются в рассматриваемой модели и разрушают ее консервативность. Они появляются здесь благодаря тому, что отображение Пуанкаре  $T_{2\pi}$  является квадратом неориентируемого отображения  $\tilde{T} = \sigma T_\pi$ . Соответственно, у отображения  $\tilde{T}$  рождающиеся симметричные периодические точки будут иметь пару мультипликаторов  $+1$  и  $-1$ , а значит, они могут распадаться на 4 точки — две консервативные симметричные периода 2 и две неконсервативные неподвижные несимметричные. Локальная теория таких бифуркаций, называемых обратимыми бифуркациями потери симметрии (symmetry-breaking bifurcations), была представлена в [16, 91, 92]. В частности, там было показано, что в случае симметричной неподвижной точки с мультипликаторами  $+1$  и  $-1$  возможны два случая невырожденных бифуркаций типа « $0 \rightarrow 4$ ». В первом случае точка распадается на две

<sup>18</sup>Последнее свойство симметрии отображения Пуанкаре является следствием так называемой симметрии потока по сдвигу времени (time-shift symmetry), часто встречающейся в периодически возмущенных автономных системах [88–90].

симметричные эллиптические точки периода 2 и две несимметричные седловые неподвижные точки с якобианами больше и меньше 1. Во втором случае точка распадается на две симметричные седловые точки периода 2 и две несимметричные неподвижные устойчивую и неустойчивую точки (сток и источник). Соответственно, у квадрата неориентируемого отображения будут появляться 4 неподвижные точки соответствующих типов. Это показывает, что бифуркации типа «0 → 4» должны быть типичными для периодических траекторий в случае отображения  $T_{2\pi}$ , когда они имеют нечетные периоды  $n = 2m + 1$ , то есть когда отображение первого возвращения  $T_{2\pi}^{2m+1} = (\tilde{T}^2)^{2m+1} = (\tilde{T}^{2m+1})^2$  является квадратом неориентируемого отображения. Заметим, что в случае четных периодов отображение  $T_{2\pi}^{2m}$  будет квадратом ориентируемого отображения  $\tilde{T}^{2m}$ , и поэтому здесь, скорее всего, должны происходить лишь консервативные в первом приближении параболические бифуркации.

В работе [16] были исследованы бифуркации типа «0 → 4» периодических точек отображения  $T_{2\pi}$  в случае нечетных периодов  $n \leq 9$  (для точек периодов  $\geq 11$  моменты бифуркаций еще можно было найти, но исключительная малость масштабов не позволяла исследовать что-то большее). На рис. 11 показаны некоторые детали соответствующей бифуркации для точки периода 3, которая происходит при  $\varepsilon = \varepsilon_3^* \simeq 0.455$ .

Отметим, что свойство обратимости отображения  $T_{2\pi}$  позволяет проводить достаточно простую процедуру нахождения тех значений параметра  $\varepsilon$ , при которых происходят бифуркации рождения симметричных периодических траекторий. Для данного периода  $n$  нужно только построить кривую  $T_{2\pi}^n(Fix(R))$  и найти момент, когда эта кривая будет касаться соответствующей линии множества  $Fix(R)$ . На рис. 11, а, в частности, показан случай, когда кривая  $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$  (здесь линия  $\eta = \pi$  — одна из линий множества  $Fix(R)$ ) близка к моменту касания линии  $\eta = \pi$

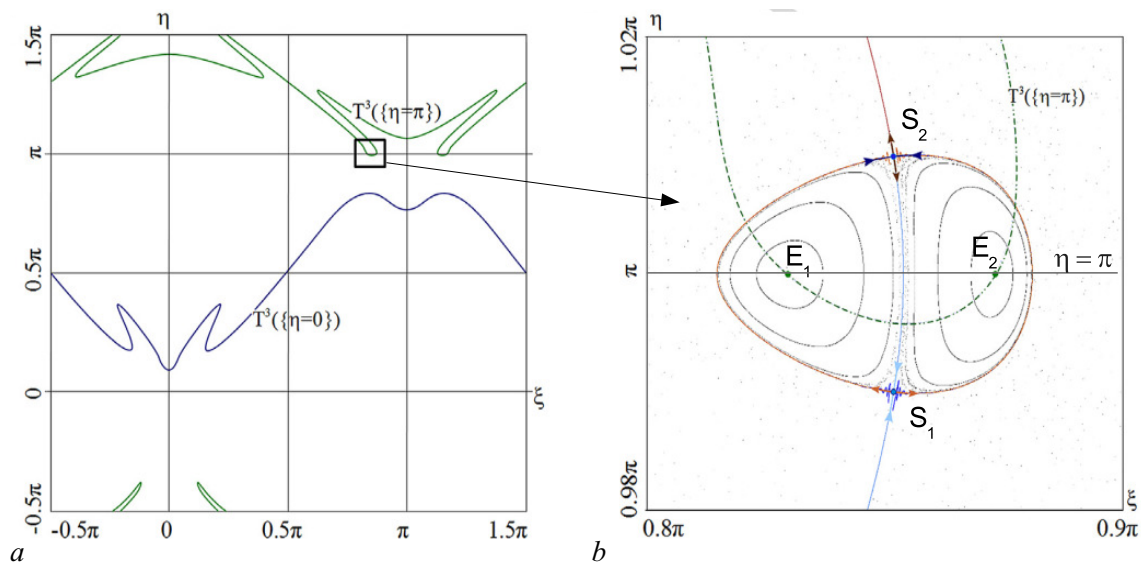


Рис. 11. а — Кривые  $T_{2\pi}^3(Fix(R))$  при  $\varepsilon = 0.457 > \varepsilon_3^*$ . Кривая  $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$  пересекает линию  $\eta = \pi$  в двух парах точек, симметричных относительно линии  $\xi = \pi$ , так как система (5) симметрична относительно замены координат вида (6). б — Увеличенный фрагмент фазового портрета в прямоугольнике из рис. а, здесь отображение  $T_{2\pi}^3$  имеет 4 неподвижных точки: две симметричные эллиптические  $E_1$  и  $E_2$  и два неконсервативных седла  $S_1$  и  $S_2$  (с якобианами  $J(S_1) = J(S_2)^{-1} \simeq 1.39$ ) (цвет онлайн)

Fig. 11. а — Curves  $T_{2\pi}^3(Fix(R))$  at  $\varepsilon = 0.457 > \varepsilon_3^*$ . The curve  $T_{2\pi}^3(\{\eta = \pi\})$  intersects the line  $\eta = \pi$  at two pairs of points symmetric with respect to the line  $\xi = \pi$ , since system (5) is symmetric with respect to the coordinate substitution of the form (6). б — Magnified fragment of the phase portrait in the rectangle from Fig. а, here the map  $T_{2\pi}^3$  has 4 fixed points: two symmetric elliptic  $E_1$  and  $E_2$  and two non-conservative saddles  $S_1$  and  $S_2$  (with Jacobians  $J(S_1) = J(S_2)^{-1} \simeq 1.39$ ) (color online)

(они касаются друг друга при  $\varepsilon = \varepsilon_3^*$ ). Когда бифуркационные моменты найдены, структуру бифуркации можно уже изучать по фазовым портретам.

Отметим также, что указанные локальные бифуркации, которые, очевидно, разрушают консервативность в модели, ведут также и к глобальным бифуркациям, связанным с образованием негрубых гетероклинических контуров, содержащих седла с якобианами больше и меньше 1. Например, в случае с несимметричными седлами периода 3, примеры таких контуров, найденных в [16] численно, показаны на рис. 12. В силу теорем из работ [5, 93], бифуркации таких контуров приводят к возникновению смешанной динамики, когда у системы появляется счетное множество периодических стоков, источников и седел, в совокупности неотделимых друг от друга.

Таким образом, в работе [16] вопрос о существовании смешанной динамики в модели Пиковского–Топажа был исследован с разных сторон. Был подтвержден не только факт ее существования, но и исследованы бифуркационные механизмы ее возникновения как локальные, разрушающие консервативность, так и глобальные, распространяющие неконсервативные элементы динамики (периодические стоки и источники, например) далеко по фазовому пространству.

Отметим, что в работе [16] был найден также еще один интересный механизм «взрывного» возникновения смешанной динамики, в основе которой лежит бифуркация исчезновения неподвижной точки у отображения Пуанкаре  $T_{2\pi}$ . Эта бифуркация происходит при  $\varepsilon = \varepsilon_1^* \simeq 0.6042$ , она имеет тип « $0 \rightarrow 4$ » и связана с появлением при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$  двух симметричных друг другу наборов из четырех неподвижных точек (сток, источник и два седла) вблизи точек пересечения линий симметрии  $\xi = 0 \cup \xi = \pi$  и линий  $\eta = 0 \cup \eta = \pi$  неподвижных точек инволюции  $R$ . В результате этого при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$  динамика модели становится сугубо диссипативной — большинство траекторий стремится к стокам, которые становятся глобальными аттракторами, соответственно, глобальными репеллерами становятся источники. Если теперь проследить за этими аттракторами и репеллерами при уменьшении  $\varepsilon$ , то обнаруживается интересное явление типа «обратимой перемежаемости» — сначала возникает сложное непритягивающее (и неотталкивающее) множество, а после того,

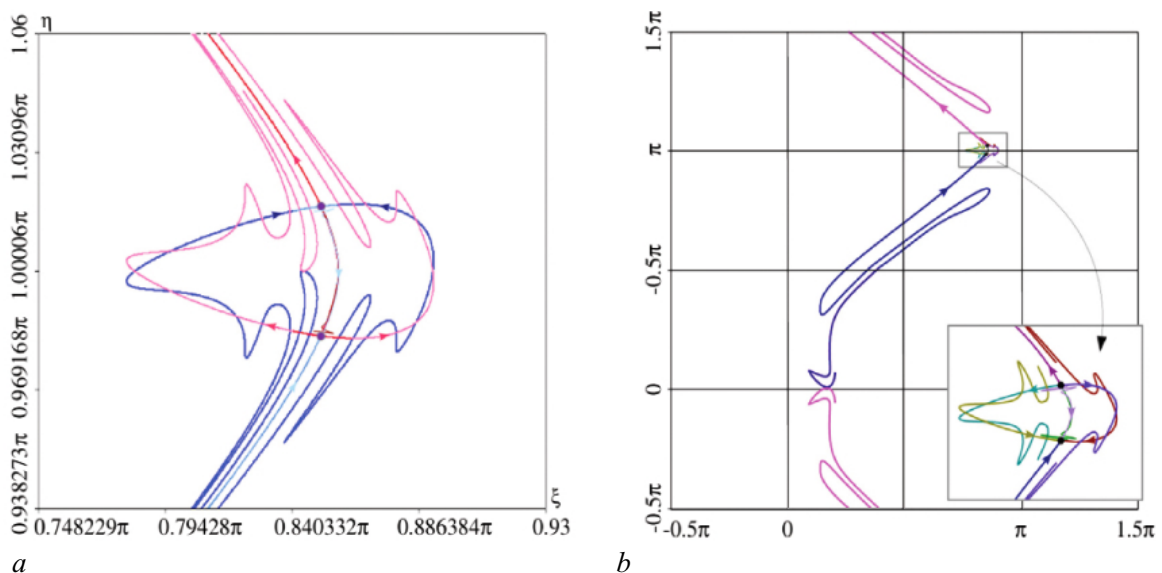


Рис. 12. *a* — Образование «малого» гетероклинического контура при  $\varepsilon \approx 0.46207$ . *b* — Образование «большого» гетероклинического контура при  $\varepsilon \approx 0.463$  (цвет онлайн)

Fig. 12. *a* — Formation of a “small” heteroclinic cycle at  $\varepsilon \approx 0.46207$ . *b* — Formation of a “large” heteroclinic cycle at  $\varepsilon \approx 0.463$  (color online)

как аттракторы и репеллеры сливаются (вместе с седлами), мгновенно возникает хаотическая смешанная динамика, см. рис. 1, который построен при  $\varepsilon = 0.6 < \varepsilon_1^*$ . На рис. 13 показаны некоторые этапы формирования упомянутой сложной динамики, которая метастабильна до тех пор, пока неподвижные точки не исчезнут.

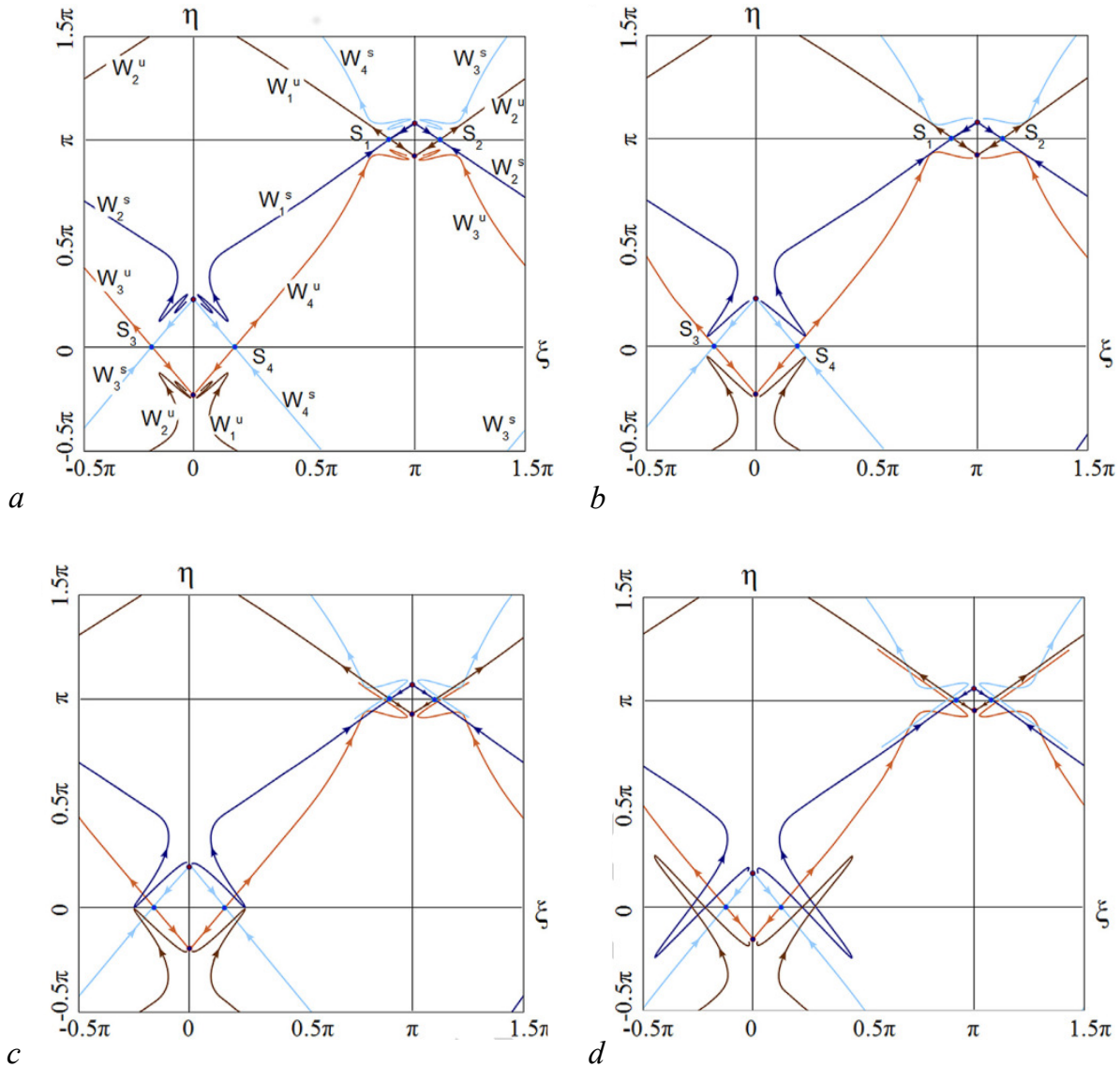


Рис. 13. Развитие динамики (при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$ ) в модели при уменьшении  $\varepsilon$  в результате образования гетероклинических пересечений между инвариантными многообразиями седловых неподвижных точек  $S_i, i = 1, \dots, 4$ . *a* – Многообразия не пересекаются,  $\varepsilon = 0.7$  (динамика простая); *b* – момент образования гетероклинических пересечений,  $\varepsilon = \varepsilon_1^{het} \simeq 0.690$  (динамика становится хаотической); *c* – возникают симметричные гетероклинические траектории,  $\varepsilon = \varepsilon_2^{het} \simeq 0.679$  (начало возникновения консервативной динамики); *d* – уже развитые гомоклинические и гетероклинические структуры,  $\varepsilon = 0.650$  (возникают при  $\varepsilon < \varepsilon_2^{het}$ ) (цвет онлайн)

Fig. 13. Dynamics development (at  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$ ) in the model at decreasing  $\varepsilon$  as a result of the formation of heteroclinic intersections between invariant manifolds of saddle fixed points  $S_i, i = 1, \dots, 4$ . *a* – The manifolds do not intersect,  $\varepsilon = 0.7$  (the dynamics are simple); *b* – the moment of the formation of heteroclinic intersections,  $\varepsilon = \varepsilon_1^{het} \simeq 0.690$  (dynamics become chaotic); *c* – symmetric heteroclinic trajectories emerge,  $\varepsilon = \varepsilon_2^{het} \simeq 0.679$  (the beginning of the emergence of conservative dynamics); *d* – already developed homoclinic and heteroclinic structures,  $\varepsilon = 0.650$  (arise when  $\varepsilon < \varepsilon_2^{het}$ ) (color online)

**3.2. Неголономная модель кельтского камня.** Кельтским камнем называется твердое тело с округлой симметричной поверхностью, которое обладает динамической асимметрией в следующем смысле. Если положить такой камень на плоскость и завращать его вокруг вертикальной оси в определенном направлении, например, по часовой стрелке, то он может устойчиво продолжать свое вращение, как и всякое обычное округлое тело. Однако если попытаться закрутить такой камень против часовой стрелки, то он без всякой видимой причины вскоре замедлит свое вращение, начнет сильно раскачиваться, затем поменяет направление вращения на противоположное и, наконец, продолжит устойчиво вращаться по часовой стрелке (в идеале с той же угловой скоростью, как и в начале).

Неголономная модель кельтского камня (когда предполагается, что контакт камня с плоскостью точечный и отсутствует проскальзывание, соответственно, сила трения не производит работы) дает простое математическое объяснение этому явлению. Достаточно быстрому вращению

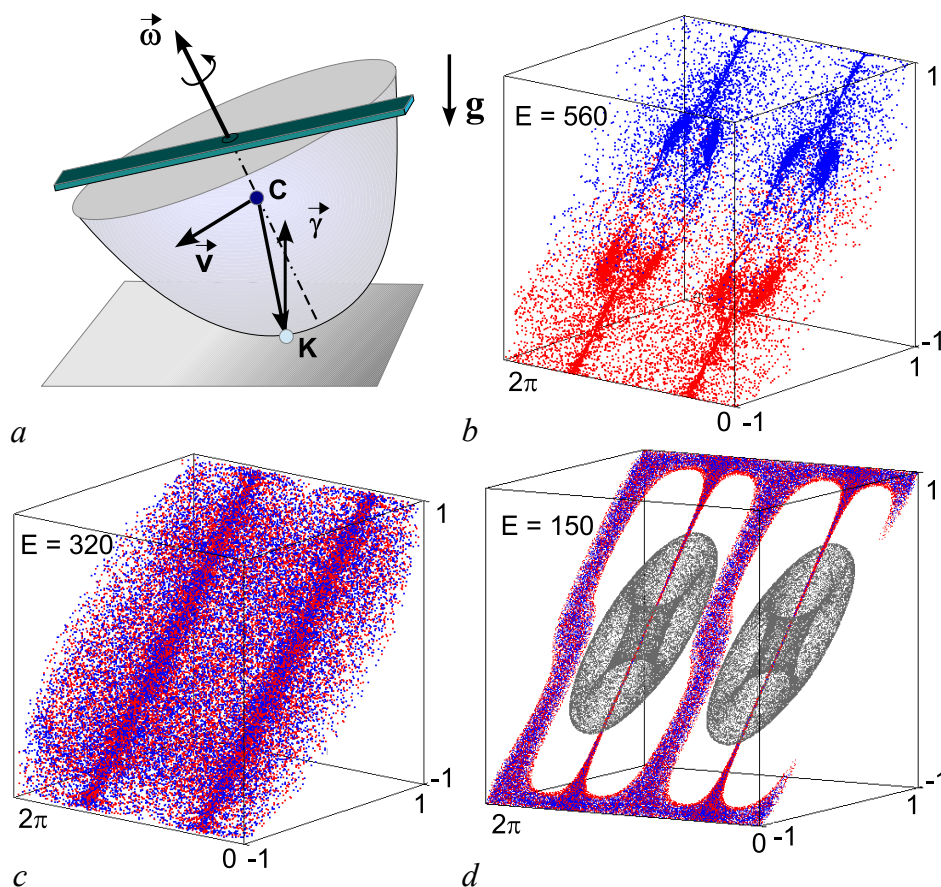


Рис. 14. *a* — Кельтский камень на плоскости — его можно представить как однородное тело с выпуклой поверхностью, симметричной относительно осей  $O_x$  и  $O_y$ , с плоской площадкой  $z = z_0$  в центре которой прикреплена тяжелая штанга, поворачивая ее, можно задавать соответствующую динамическую асимметрию камня; *b* — странный аттрактор (синие точки) и странный репеллер (красные точки); *c* — смешанная динамика; *d* — сосуществование смешанной динамики с поведением траекторий, которое практически не отличается на счете от консервативного (2 серых овала в середине куба) (цвет онлайн)

Fig. 14. *a* — Celtic stone on the plane — it can be represented as a homogeneous body with a convex surface symmetric about the axes  $O_x$  and  $O_y$ , with a flat area  $z = z_0$  in the center of which a heavy rod is attached; by rotating it, one can set the corresponding dynamical asymmetry of the stone; *b* — strange attractor (blue points) and strange repeller (red points); *c* — mixed dynamics; *d* — coexistence of mixed dynamics with trajectory behavior that is almost indistinguishable in numerics from the conservative one (2 gray ovals in the middle of the cube) (color online)

камня вокруг вертикальной оси, например, по часовой стрелке, отвечает в модели асимптотически устойчивое (так называемое перманентное) состояние равновесия  $O_s$ . Так как неголономная модель камня описывается системой, обратимой относительно инволюции  $\vec{\omega} \rightarrow -\vec{\omega}$  и обращения времени [94], то в этой системе также присутствует вполне неустойчивое состояние равновесия  $O_u$ , отвечающее вращению камня вокруг той же оси, но против часовой стрелки. Если в системе, кроме устойчивого состояния равновесия, других аттракторов нет (что бывает при большой энергии камня), то траектории из окрестности неустойчивого равновесия  $O_u$  будут естественно стремиться к устойчивому состоянию равновесия  $O_s$ .

Важно отметить, что помимо устойчивого состояния равновесия, неголономная модель кельтского камня может обладать и другими, как регулярными, так и хаотическими аттракторами. Впервые странные аттракторы в динамике кельтских камней были обнаружены в работе [94]. Исследованию странных аттракторов в этой модели также посвящены работы [17, 22, 95].

Что касается смешанной динамики, то это явление в неголономной модели кельтского камня впервые было обнаружено в работе [17], в которой было показано, что аттрактор системы может пересекаться, но не совпадать с репеллером. На рис. 14, *b*, 14, *c* и 14, *d* изображены фазовые портреты аттрактора  $A$  (синие точки) и репеллера  $R$  (красные точки) в неголономной модели кельтского камня при различных значениях параметров. Когда энергия вращения камня достаточно велика, полный аттрактор системы отделен от полного репеллера, см. рис. 14, *b*. Однако при ее уменьшении аттрактор и репеллер начинают увеличиваться в размерах и в некоторый момент начинают пересекаться — возникает смешанная динамика, см. рис. 14, *c*, в которой можно выделить симметричное подмножество, поведение траекторий на котором практически не отличимо на счете от консервативного, рис. 14, *d*. Отметим также, что в нашей работе [22] были изучены бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики в модели кельтского камня. В частности, показано, что она может возникать взрывным образом в результате столкновения на линии неподвижных точек инволюции простых аттрактора и репеллера — устойчивой и вполне неустойчивой неподвижных точек. Это явление «обратимой перемежаемости» похоже на то, которое мы обсуждали выше для модели Пиковского–Топажа, но, во-первых, оно наблюдается в случае трехмерного отображения, а во-вторых, здесь сливаются только две точки — сток и источник (в модели Пиковского–Топажа сливались 4 точки: сток, источник и два седла).

**3.3. Примеры смешанной динамики, возникающей при столкновении хаотических аттрактора и репеллера.** Выше мы рассмотрели примеры систем, демонстрирующих смешанную динамику, которая возникает либо в результате бифуркаций разрушения консервативности, либо взрывным образом в результате бифуркаций слияния простого аттрактора и простого репеллера. Здесь мы рассмотрим другие возможности, когда смешанная динамика возникает в результате столкновения странного аттрактора со странным репеллером. Если бы указанные аттракторы и репеллеры были цепно-транзитивными, то есть, соответственно, сталкивались бы CRH-аттрактор и CRH-репеллер, то они по теореме 2 из [4] (и как мы объясняли в разделе 2) должны просто объединиться и образовать одно большое множество, обратимое ядро, которое будет одновременно и CRH-аттрактором и CRH-репеллером. На самом деле этого никогда не происходит (было бы очень странно, когда таким образом возникает топологическая консервативная динамика, для которой  $A = R$ ). Реальная картина может получиться, когда сталкиваются квазиаттрактор и квазирепеллер, что также согласуется с другим результатом из [4], по которому образующееся обратимое ядро должно быть окружено счетным множеством диссипативных аттракторов и репеллеров (стоков и источников, например).

В качестве первого примера модели, демонстрирующей смешанную динамику такого типа, рассмотрим неголономную модель волчка Сулова — тяжелого твердого тела, движения которого ограничено неголономной связью  $(\vec{\omega}, \vec{e}) = 0$ , запрещающей какие-либо его вращения вокруг



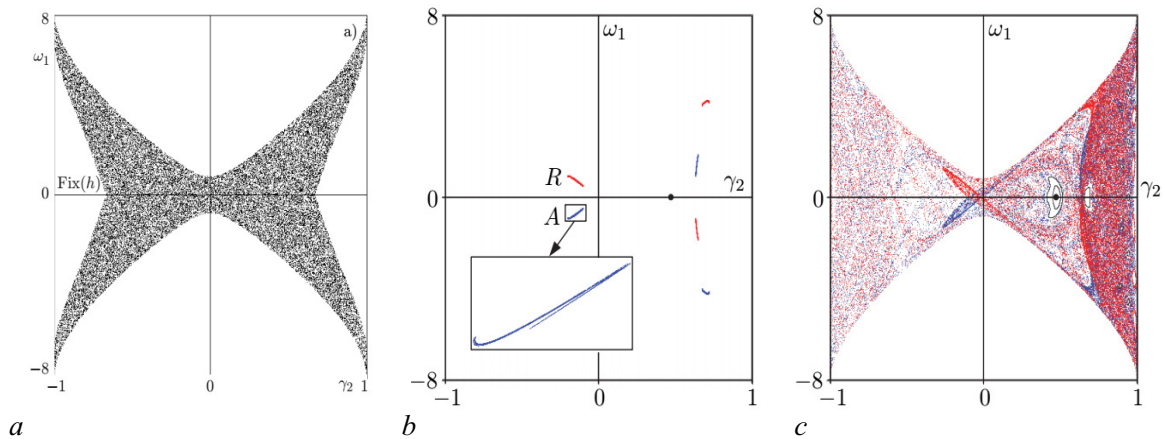


Рис. 15. *a* — Развитый консервативный хаос в модели волчка Суслова; *b* — трехкомпонентные странные аттрактор *A* и репеллер *R* типа Эно симметричны и разделены (показан увеличенный фрагмент компоненты аттрактора); *c* — смешанная динамика после их столкновения — полный аттрактор модели (синие точки) полный репеллер модели (красные точки) почти совпадают, но видно, что они отличаются в некоторых деталях (цвет онлайн)

Fig. 15. *a* — Developed conservative chaos in the Suslov top model; *b* — three-component strange attractor *A* and repeller *R* of Hénon type are symmetric and separated (an enlarged fragment of the attractor component is shown); *c* — mixed dynamics after their collision — the full attractor (blue points) the full repeller (red points) almost coincide, but it can be seen that they differ in some details (color online)

некоторой фиксированной оси  $\vec{e}$ . Существование смешанной динамики в такой модели было установлено в работе [23], в которой, в частности, было показано, как смешанная динамика возникает в результате столкновения симметричных хаотических аттрактора и репеллера. Заметим, что, в частности, такой аттрактор по своим свойствам очень похож на квазиаттрактор в отображении Эно.

Напомним, что аттрактор Эно был найден еще в работе [56] и он является квазиаттрактором двумерного диссипативного отображения (с якобианом меньше 1 по модулю), содержащий седловую неподвижную точку с мультипликаторами  $\lambda$  и  $\gamma$  такими, что  $|\lambda| < 1$  и  $\gamma < -1$  (в ориентируемом случае  $-1 < \lambda < 0$ , в неориентируемом случае  $0 < \lambda < 1$ ). Такой аттрактор содержит целиком неустойчивое многообразие  $W^u(O)$  точки  $O$ , и он может быть представлен либо как замыкание множества  $W^u(O)$ , либо, что эквивалентно, как пролонгация неподвижной точки  $O$ . Также у аттрактора Эно существует поглощающая область, в которой он является максимальным аттрактором, то есть содержит помимо  $W^u(O)$  еще и все устойчивые периодические точки из этой окрестности. Обычно аттракторами Эно называют только аттракторы, которые наблюдаются именно в отображении Эно  $\bar{x} = y$ ,  $\bar{y} = M - bx - y^2$ , которое является квадратичным отображением плоскости с постоянным якобианом  $J = b$ . Однако подобные аттракторы в других случаях мы будем называть аттракторами типа Эно<sup>19</sup>. Такие аттракторы представляют большой интерес, так как часто встречаются в приложениях, в том числе в моделях, которые представлены в этом параграфе.

У модели волчка Суслова, в отличие от неголономной модели кельтского камня, существует три независимых первых интеграла, поэтому исследование ее динамики может быть сведено к изучению трехмерного потока или соответствующего двумерного отображения Пуанкаре на некотором компактном фазовом пространстве. При определенных условиях (в частности, когда один из элементов тензора моментов инерции равен нулю) у системы, описывающей движение волчка Суслова, существует гладкая инвариантная мера [96], и тогда ее динамика полностью консервативна. В частности, на рис. 15, *a* представлен фазовый портрет такой динамики в случае, когда консервативный хаос развит достаточно сильно, и, соответственно, итерации отображения

<sup>19</sup>Заметим, что в английском языке, в зависимости от контекста, существует определенное различие между терминами «the Hénon attractor» (это тот, который был найден в оригинальной работе [56] при  $M = 1.4$  и  $b = -0.3$ ) и «a Hénon attractor», и тем более «Hénon-like attractor». Наш аттрактор в модели Суслова — это «Hénon-like attractor».

Пуанкаре одной случайно выбранной начальной точки более или менее плотно заполняют фазовое пространство.

В общем случае такая инвариантная мера отсутствует, и в фазовом пространстве системы могут существовать как регулярные, так и хаотические аттракторы. При некоторых значениях параметров в системе возникает странный аттрактор типа Эно, содержащий седловую точку периода 3 и симметричный ему странный репеллер типа Эно, рис. 15, *b*. В результате столкновения этих аттрактора и репеллера мгновенно возникает смешанная динамика, рис. 15, *c*, в результате которой аттрактор и репеллер визуально не только объединяются, но и хаос также начинает распространяться далеко по всему фазовому пространству. Распределение этих точек (синих для аттрактора, красных для репеллера — так в [23]) по фазовому пространству показывает, что здесь имеет место явление похожее на перемежаемость, которую можно назвать здесь «обратимой хаотической».

Другой весьма интересный пример системы, в которой смешанная динамика возникает в результате столкновения хаотических аттракторов и репеллеров, был рассмотрен в работе [24]. В этой работе изучалась модель двух точечных вихрей при возмущении их акустической волной. Исследование динамики такой модели проводилось с помощью отображения Пуанкаре двумерного цилиндра. Было показано, что в этой модели существует смешанная динамика, которая возникает в результате опять же столкновения аттракторов и репеллеров типа Эно. Однако таких столкновений должно быть, как показано в [24], как минимум восемь — фазовый портрет итоговой смешанной динамики показан на рис. 16. Здесь обращает внимание тот факт, что итоговая смешанная динамика совсем не похожа на те типы, которые были представлены выше. По сути, здесь наблюдается новый тип такой динамики, которая называется *диссипативной смешанной динамикой*, когда аттрактор и репеллер пересекаются, но распределение положительных и отрицательных итераций даже одной и той же точки на их общем симметричном множестве (обратимом ядре) выглядит чрезвычайно несимметрично. Положительные итерации имеют тенденцию плотно группироваться вблизи «бывшего аттрактора», а отрицательные — вблизи «бывшего репеллера». При этом никакой тенденции для того, чтобы точки аппроксимировали обратимое ядро, здесь не наблюдается и близко (теоретически по теореме из [4] такая тенденция должна существовать, но даже при «неразумном» увеличении времени счета она никак не проявляется). Можно сделать вывод, что в отличие от других рассмотренных в настоящей работе примеров смешанной динамики, в которых консервативность обратимого ядра условно превалирует, здесь существенно превалирует диссипативность сталкивающихся аттракторов и репеллеров, которая и передает сильную асимметрию взаимно сингулярным мерам для положительных и отрицательных итераций.

Еще один пример системы адаптивно связанных фазовых осцилляторов, в которой также возникает смешанная динамика, был рассмотрен в работах А. Емельяновой и В. Некоркина [25, 26]. Эти работы интересны с той точки зрения, что в них был впервые приведен пример системы, не являющейся обратимой по времени, а также тем, что в [26] также впервые был целенаправленно построен фазовый портрет отображения Пуанкаре в ограничении на обратимое ядро системы.

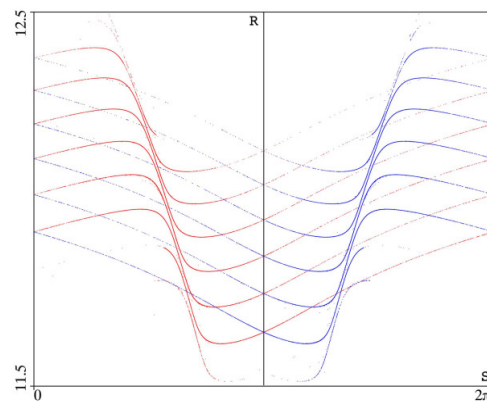


Рис. 16. Пример фазового портрета сильно диссипативной смешанной динамики, возникающей после последовательных столкновений восьми пар симметричных аттракторов и репеллеров типа Эно. Результирующий аттрактор изображен синими точками, репеллер — красными (цвет онлайн)

Fig. 16. An example of a phase portrait of strongly dissipative mixed dynamics arising after successive collisions of eight pairs of symmetric attractors and repellers of Hénon type. The resulting attractor is represented by blue points, the repeller by red ones (color online)

## Список литературы

1. *Аносов Д. В., Бронштейн И. У.* Топологическая динамика // В кн.: Динамические системы–1. М.: ВИНТИ, 1985. С. 224–227.
2. Динамические системы с гиперболическим поведением // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. направления. Динамические системы-9 / Под ред. Аносова Д. В. М.: ВИНТИ, 1991. 247 с.
3. *Gonchenko S. V.* Reversible mixed dynamics: A concept and examples // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. 2016. Vol. 5, no. 4. P. 365–374. DOI: 10.5890/DNC.2016.12.003.
4. *Гонченко С. В., Тураев Д. В.* О трех типах динамики и понятии аттрактора // Труды МИАН. 2017. Vol. 297. P. 133–157. DOI: 10.1134/S0371968517020078.
5. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром // Труды МИАН. 1997. Vol. 216. P. 76–125.
6. *Turaev D. V.* Richness of chaos in the absolute Newhouse domain // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 2010. P. 1804–1815. DOI: 10.1142/9789814324359\_0122.
7. *Turaev D. V.* Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain // *Communications in Mathematical Physics*. 2015. Vol. 335, no. 3. P. 1235–1277. DOI: 10.1007/s00220-015-2338-4.
8. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps // *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20, no. 2. P. 241–275. DOI: 10.1088/0951-7715/20/2/002.
9. *Turaev D. V.* On dimension of non-local bifurcational problems // *Bifurcation and Chaos*. 1996. Vol. 6, no. 5. P. 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.
10. *Ruelle D.* Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors // *Comm. Math. Phys.* 1981. Vol. 82. P. 137–151. DOI: 10.1007/BF01206949.
11. *Newhouse S.* Diffeomorphisms with infinitely many sinks // *Topology*. 1974. Vol. 13. P. 19–18.
12. *Afraimovich V. S., Shilnikov L. P.* Strange attractors and quaiattractors // In.: G. I. Barenblatt, G. Iooss, D. D. Joseph (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitmen, 1983. P. 1–34.
13. *Tedeschini-Lalli L., Yorke J. A.* How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? // *Commun. Math. Phys.* 1986. Vol. 106. P. 635–657. DOI: 10.1007/BF01463400.
14. *Lai Y. C., Grebogi C., Yorke J. A., Kan I.* How often are chaotic saddles nonhyperbolic // *Nonlinearity*. 1993. Vol. 6, no. 5. P. 779–797.
15. *Pikovsky A., Topaj D.* Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices // *Physica D*. 2002. Vol. 170. P. 118–130.
16. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. V.* On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotator // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2017. Vol. 350. P. 45–57. DOI: 10.1016/j.physd.2017.02.002.
17. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O.* Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18, no. 5. P. 521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
18. *Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazo J. T., Sten'kin O.* Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps // *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26. P. 1–33.
19. *Гонченко С. В., Гонченко М. С., Синицкий И. О.* О смешанной динамике двумерных обратимых диффеоморфизмов с симметричными негрубыми гетероклиническими контурами // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84, № 1. С. 27–59. DOI: 10.1070/IM8786.
20. *Kazakov A. O.* Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013. Vol. 18, no. 5. P. 508–520. DOI: 10.1134/S1560354713050043.
21. *Kuznetsov S. P.* Regular and chaotic motions of the Chaplygin sleigh with periodically switched location of nonholonomic constraint // *EPL (Europhysics Letters)*. 2017. Vol. 118, no. 1. P. 10007. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10007.

22. Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Самылина Е. А. Хаотическая динамика и мультистабильность в неголономной модели кельтского камня // Известия вузов. Радиофизика. 2018. Vol. 61, no. 10. P. 867–882.
23. Kazakov A. O. On the appearance of mixed dynamics as a result of collision of strange attractors and repellers in reversible systems // Radiophysics and Quantum Electronics. 2019. Vol. 61, no. 8–9. P. 650–658. DOI: 10.1007/s11141-019-09925-6.
24. Kazakov A. O. Merger of a Henon-like attractor with a Henon-like repeller in a model of vortex dynamics // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30, no. 1. P. 011105. DOI: /10.1063/1.5144144.
25. Emelianova A. A., Nekorkin V. I., On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Vol. 29, no. 11. P. 111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
26. Emelianova A. A., Nekorkin V. I., The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30, no. 5. P. 051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
27. Ariel G., Schiff J. Conservative, dissipative and super-diffusive behavior of a particle propelled in a regular flow // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2020. Vol. 411. P. 132584. DOI: 10.1016/j.physd.2020.132584.
28. Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2020. Vol. 30, no. 7. P. 073114. DOI: 10.1063/5.0007230.
29. Гонченко С. В., Гонченко А. С., Казаков А. О. Три типа аттракторов и смешанная динамика неголономных моделей движения твердого тела // В кн.: Дифференциальные уравнения и динамические системы: сб. статей. Сер. Труды МИАН. Т. 308. М.: МИАН, 2020. P. 135–151. DOI: 10.4213/tm4053.
30. Гонченко С. В. Три формы динамического хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 2020. Т. 63, № 9. С. 840–862.
31. Гонченко С. В., Гонченко А. С., Морозов К. Е. Третий тип динамики и гомоклинические траектории Пуанкаре // Известия вузов. Радиофизика. 2023. Т. 66, № 9. С. 767–796. DOI: 10.52452/00213462-2023-66-09-767.
32. Conley C. C. Isolated Invariant Sets and the Morse Index. Regional conference series in mathematics, vol. 38. American Mathematical Soc, 1978. 89 p. DOI: 10.1090/cbms/038.
33. Hurley M. Attractors: persistency, and density of their basins // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 269, no. 1. P. 247–271. DOI: 10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7.
34. Galias Z., Tucker W. Is the Hénon attractor chaotic? // Chaos. 2015. Vol. 25, iss. 3. 033102. DOI: 10.1063/1.4913945.
35. Tucker W. A rigorous ode solver and Smale's 14th problem // Foundations of Computational Mathematics. 2002. Vol. 2. P. 53–117. DOI: 10.1007/s002080010018.
36. Delshams A., Gonchenko M., Gonchenko S. V., Lazaro J. T. Mixed dynamics of 2-dimensional reversible maps with a symmetric couple of quadratic homoclinic tangencies // Discrete Continuous Dyn. Sys. A. 2018. Vol. 38, no. 9. P. 4483–4507. DOI: 10.3934/dcds.2018196.
37. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. сборник. 1998. Vol. 189, no. 2. С. 137–160. DOI: 10.4213/sm300.
38. Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system // Nonlinearity. 2021. Vol. 34, no. 4. P. 2018–2047. DOI: 10.1088/1361-6544/abc794.
39. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. Часть 1 // Матем. сб. 1972. Т. 88, № 4. С. 475–492.
40. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. Часть 2 // Матем. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 139–156.
41. Кузнецов С. П. Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике // Москва-Ижевск, 2013. 488 с.

42. *Tucker W.* The Lorenz attractor exists // *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999. Vol. 328, № 12. P. 1197–1202. DOI: 10.1016/S0764-4442(99)80439-X.
43. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // *ДАН СССР*. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
44. *Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П.* О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // *Труды ММО*. 1982. Т. 44. С. 150–212.
45. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. Vol. 20, no. 2. P. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.C.
46. *Gonchenko S., Ovsyannikov I., Simo C., Turaev D.* Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors // *Int. J. of Bifurcation and chaos*. 2005. Vol. 15, no. 11. P. 3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180.
47. *Gonchenko S. V., Gonchenko A. S., Ovsyannikov I. I., Turaev D. V.* Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps // *Math. Model. Nat. Phen.* 2013. Vol. 8, no. 5. P. 48–70.
48. *Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., Samylyna E.* On discrete Lorenz-like attractors // *Chaos*. 2021. Vol. 31, iss. 2. P. 023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
49. *Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П.* К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений // *Нелинейная Динамика*. 2012. Т. 8, № 1. С. 3–28.
50. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D.* Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps // *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014. Vol. 24, no. 8. 25 p. DOI: 10.1142/S0218127414400057.
51. *Gonchenko S., Karatetskaia E., Kazakov A., Kruglov V.* Conjoined Lorenz twins — a new pseudohyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows // *Chaos*. 2022. Vol. 32. P. 121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
52. *Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R.* The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014. Vol. 19. P. 718–733. DOI: 10.1134/S1560354714060094.
53. *Гонченко С. В.* Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // *Мат. заметки*. 1983. Т. 33, вып. 5. С. 745–755.
54. *Gonchenko S. V., Simo C., Vieiro A.* Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight // *Nonlinearity*. 2013. Vol. 26, no. 3. P. 621–678. DOI: 0.1088/0951-7715/26/3/621.
55. *Гонченко С. В.* О двухпараметрическом семействе систем, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой // В кн.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений*. Горький, 1985. С. 55–72.
56. *Henon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Commun. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69–77. DOI: 10.1007/BF01608556.
57. *Benediks M., Carleson L.* Dynamics of the Henon Map // *Ann. Math.* 1991. Vol. 133. P. 73–169. DOI: 10.2307/2944326.
58. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) // *Докл. Росс. Акад. Наук*. 1993. Т. 329, № 4. С. 404–407.
59. *Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Shilnikov L. P.* On homoclinic origin of Henon-like maps // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010. Vol. 15, no. 4–5. P. 462–481. DOI: 10.1134/S1560354710040052.
60. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
61. *Biragov V. S.* Bifurcations in a two-parameter family of conservative mappings that are close to the Hénon mapping // *Methods of the qualitative theory of differential equations*. 1987. P. 10–24.
62. *Simó C., Vieiro A.* Resonant zones, inner and outer splitting in generic and low order resonances of area preserving maps // *Nonlinearity*. 2009. Vol. 22, no. 5. P. 1191–1245. DOI: 10.1088/0951-7715/22/5/012.

63. *Milnor J.* On the concept of attractor // *Comm. Math. Phys.* 1985. Vol. 99. P. 177–195. DOI: 10.1007/BF01212280.
64. *Минков С. С.* Толстые аттракторы и косые произведения: диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук. Москва, 2016. 61 с.
65. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // *Доклады Академии Наук.* 2008. Т. 418, № 1.
66. *Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Kozlov A. D.* Elements of contemporary theory of dynamical chaos: A tutorial. Part I. Pseudohyperbolic attractors // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* 2018. Vol. 28, no. 11. P. 1830036. DOI: 10.1142/S0218127418300367.
67. *Гонченко С. В., Лэмб Й. С. В., Риос И., Тураев Д.* Аттракторы и репеллеры в окрестности эллиптических точек обратимых систем // *Доклады РАН.* 2014. Vol. 454. P. 375–378. DOI: 10.7868/S0869565214040045.
68. *Newhouse S.* Nondensity of axiom  $A(a)$  on  $S^2$  // *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.* 1970. Vol. 14. С. 191–202.
69. *Newhouse S.* The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms // *Publ. Math. IHES.* 1979. Vol. 50. P. 101–152. DOI: 10.1007/BF02684771.
70. *Guckenheimer J., Williams R. F.* Structural stability of Lorenz attractors // *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 1979. Vol. 50. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF02684769.
71. *Malkin M. I.* Rotation intervals and dynamics of Lorenz-like maps // In: *Methods of qualitative theory of diff. eq. Gorki,* 1985. С. 122–139.
72. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *ДАН СССР.* 1991. Т. 320, № 2. С. 269–272.
73. *Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V.* On models with non-rough Poincare homoclinic curves // *Physica D.* 1993. Vol. 62, no. 1–4. P. 1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.
74. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Докл. Росс. Акад. Наук.* 1993. Т. 330, № 2. С. 144–147.
75. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions // *Nonlinearity.* 2008. Vol. 21, no. 5. P. 923–972. DOI: 10.1088/0951-7715/21/5/003.
76. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* Об инвариантах  $\Omega$ -сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией // *Укр. мат. журнал.* 1990. Т. 42, № 2. С. 153–159.
77. *Гонченко С. В., Шильников Л. П.* О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // *Известия Росс. Акад. Наук, серия математическая.* 1992. Т. 56, № 6. С. 1165–1197.
78. *Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П.* Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса // *Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения; тематические обзоры.* 1999. Т. 67. С. 69–128.
79. *Palis J., Viana M.* High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks // *Ann. Math.* 1994. Vol. 140. P. 91–136.
80. *Romero N.* Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions // *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* 1995. Vol. 15. P. 735–757.
81. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits // *Chaos.* 1996. Vol. 6, No. 1. P. 15–31. DOI: 10.1063/1.166154.
82. *Гонченко С. В., Гонченко В. С.* О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями // *Труды МИАН.* 2004. Т. 244. С. 87–114.
83. *Гаврилов Н. К.* О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур // *Мат. заметки.* 1973. Т. 14, № 5. С. 687–697.
84. *Гонченко С. В.* Модули  $\Omega$ -сопряженности двумерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром. *Мат. сборник.* 1996. Т. 187, no. 9. С. 3–24. DOI: 10.4213/sm155.
85. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Stenkin O. V.* On Newhouse regions with infinitely many stable

- and unstable invariant tori // Proc. Int. Conf. Progress in Nonlinear Science dedicated to 100th Anniversary of A. A. Andronov, July 2–6; “Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics”, vol. 1. Nizhni Novgorod, 2002. P. 80–102.
86. Гонченко С. В. Динамические системы с гомоклиническими касаниями, омега-модули и бифуркации: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Н. Новгород, 2004. 300 с.
  87. Гонченко С. В., Стенькин О. В., Шильников Л. П. О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями // Нелинейная динамика. 2006. Т. 2, № 1. С. 3–25.
  88. Dmitriev A. S., Komlev Yu. A., Turaev D. V. Bifurcation phenomena in the 1:1 resonant horn for the forced van Der Pol-Duffing equation // Int. J. Bifurcation Chaos. 1992. Vol. 2, no. 1. P. 93–100. DOI: 10.1142/S0218127492000094.
  89. Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey // Physica D. 1998. Vol. 112. P. 1–39.
  90. Rom-Kedar V., Wiggins S. Transport in two-dimensional maps // Arch. Ration. Mech. Anal. 1990. Vol. 109, no. 3. P. 239–298.
  91. Haragus M., Iooss G. Reversible bifurcations // In: Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems. London: Universitext, Springer, 2011.
  92. Lerman L. M., Turaev D. V. Breakdown of symmetry in reversible systems // Reg. Chaotic Dyn. 2012. Vol. 17, no. 3–4. P. 318–336. DOI: 10.1134/S1560354712030082.
  93. Lamb J. S. W., Stenkin O. V. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits // Nonlinearity. 2004. Vol. 17, no. 4. P. 1217–1244. DOI: 10.1088/0951-7715/17/4/005.
  94. Борисов А. В., Мамаев И. С. Странные аттракторы в динамике кельтских камней // Успехи физических наук. 2003. Vol. 173, no. 4, 407–418. DOI: 10.3367/UFNr.0173.200304d.0407.
  95. Кузнецов С. П., Жалнин А. Ю., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Феномены нелинейной динамики диссипативных систем в неголомомной механике кельтского камня // Нелинейная динамика. 2012. Vol. 8, no. 4. С. 735–762.
  96. Kozlov V. V. On the theory of integration of the equations of nonholonomic mechanics // Uspekhi Mekh. 1985. Vol. 8, no. 3. P. 85–107. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000203.
  97. Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20, no. 5. P. 605–626.

## References

1. Anosov DV, Bronshtein IU. Smooth dynamical systems. Dynamical systems – 1, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. Moscow: VINITI; 1985. P. 204–229.
2. Dynamical systems – 9, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr. Moscow: VINITI; 1991. 248 p.
3. Gonchenko SV. Reversible mixed dynamics: A concept and examples. Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016;5(4):365–374. DOI: 10.5890/DNC.2016.12.003.
4. Gonchenko SV, Turaev DV. On three types of dynamics and concept of attractor. Proc. Steklov Math. Inst. 2017;297:116–137. DOI: 10.1134/S0081543817040071.
5. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On Newhouse regions for two-dimensional diffeomorphisms close to diffeomorphism with non-rough heteroclinic contour. Proc. Steklov Math. Inst. 1997;216:76–125.
6. Turaev DV. Richness of chaos in the absolute Newhouse domain. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 2010:1804–1815. DOI: 10.1142/9789814324359\_0122.
7. Turaev DV. Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain. Communications in Mathematical Physics. 2015;335(3):1235–1277. DOI: 10.1007/s00220-015-2338-4.
8. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in

- conservative and dissipative two-dimensional maps. *Nonlinearity*. 2007;20(2):241-275. DOI: 10.1088/0951-7715/20/2/002.
9. Turaev DV. On dimension of non-local bifurcational problems. *Bifurcation and Chaos*. 1996;6(5): 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.
  10. Ruelle D. Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors. *Comm. Math. Phys.* 1981;82:137–151. DOI: 10.1007/BF01206949.
  11. Newhouse S. Diffeomorphisms with infinitely many sinks. *Topology*. 1974;13:19–18.
  12. Afraimovich VS, Shilnikov LP. Strange attractors and quaiattractors. In: Barenblatt GI, Iooss G, Joseph DD. (eds) *Nonlinear Dynamics and Turbulence*. Boston: Pitmen; 1983. P. 1–34.
  13. Tedeschini-Lalli L, Yorke JA. How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? *Commun. Math. Phys.* 1986;106:635–657. DOI: 10.1007/BF01463400.
  14. Lai YC, Grebogi C, Yorke JA, Kan I. How often are chaotic saddles nonhyperbolic. *Nonlinearity*. 1993;6(5):779–797.
  15. Pikovsky A, Topaj D. Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices. *Physica D*. 2002;170: 118–130.
  16. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev DV. On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Topaj system of coupled rotators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2017;350:45–57. DOI: 10.1016/j.physd.2017.02.002.
  17. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013;18(5):521–538. DOI: 10.1134/S1560354713050055.
  18. Delshams A, Gonchenko SV, Gonchenko VS, Lazaro JT, Sten'kin O. Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps. *Nonlinearity*. 2013;26: 1–33.
  19. Gonchenko SV, Gonchenko MS, Sinitzky IO. On mixed dynamics of two-dimensional reversible diffeomorphisms with symmetric non-transversal heteroclinic cycles. *Izv. RAN. Ser. Mat.* 2020; 84(1):23–51. DOI: 10.1070/IM8786.
  20. Kazakov AO. Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2013;18(5):508–520. DOI: 10.1134/S1560354 713050043.
  21. Kuznetsov SP. Regular and chaotic motions of the Chaplygin sleigh with periodically switched location of nonholonomic constraint. *EPL (Europhysics Letters)*. 2017;118(1):10007. DOI: 10.1209/0295-5075/118/10007.
  22. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Samylina EA. Chaotic dynamics and multistability in nonholonomic model of Celtic stone. *Izvestia of universities. Radiophysics*. 2018;61(10): 867-882.
  23. Kazakov AO. On the appearance of mixed dynamics as a result of collision of strange attractors and repellers in reversible systems. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2019;61(8–9):650–658. DOI: 10.1007/s11141-019-09925-6.
  24. Kazakov AO. Merger of a Henon-like attractor with a Henon-like repeller in a model of vortex dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(1):011105. DOI: /10.1063/1.5144144.
  25. Emelianova AA, Nekorkin VI. On the intersection of a chaotic attractor and a chaotic repeller in the system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(11):111102. DOI: 10.1063/1.5130994.
  26. Emelianova AA, Nekorkin VI. The third type of chaos in a system of two adaptively coupled phase oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(5):051105. DOI: 10.1063/5.0009525.
  27. Ariel G, Schiff J. Conservative, dissipative and super-diffusive behavior of a particle propelled in a regular flow. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2020:132584.



28. Chigarev V, Kazakov A, Pikovsky A. Kantorovich-Rubinstein-Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2020;30(7):073114. DOI: 10.1063/5.0007230.
29. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO. Three types of attractors and mixed dynamics of nonholonomic models of rigid body motion. *Proc. Steklov Inst. Math*. 2020;308:125–140. DOI: 10.1134/S0081543820010101.
30. Gonchenko SV. Three Forms of Dynamical Chaos. *Radiophys Quantum El*. 2021;63:756–775.
31. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Morozov KE. The third type of dynamics and Poincaré homoclinic trajectories. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2024;66(9):693–719. DOI: 10.1007/s11141-024-10329-4.
32. Conley CC. Isolated Invariant Sets and the Morse Index. *Regional conference series in mathematics*, vol. 38. American Mathematical Soc.; 1978. 89 p. DOI: 10.1090/cbms/038.
33. Hurley M. Attractors: persistency, and density of their basins. *Trans. Amer. Math. Soc*. 1982;269(1):247–271. DOI: 10.1090/S0002-9947-1982-0637037-7.
34. Galias Z, Tucker W. Is the Hénon attractor chaotic? *Chaos*. 2015;25(3):033102. DOI: 10.1063/1.4913945.
35. Tucker W. A rigorous ode solver and Smale’s 14th problem. *Foundations of Computational Mathematics*. 2002;2:53–117. DOI: 10.1007/s002080010018.
36. Delshams A, Gonchenko M, Gonchenko SV, Lazaro JT. Mixed dynamics of 2-dimensional reversible maps with a symmetric couple of quadratic homoclinic tangencies. *Discrete Continuous Dyn. Sys. A*. 2018;38(9):4483–4507. DOI: 10.3934/dcds.2018196.
37. Turaev DV, Shilnikov LP. An example of a wild strange attractor. *Math. Sb*. 1998;189(2):291–314. DOI: 10.1070/sm1998v189n02ABEH000300.
38. Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system. *Nonlinearity*. 2021;34(4):2018–2047. DOI: 10.1088/1361-6544/abc794.
39. Gavrilov NK, Shilnikov LP. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 1. *Math.USSR Sb*. 1972;17:467–485 DOI: 10.1070/SM1972v017n04ABEH001597.
40. Gavrilov NK, Shilnikov LP. On three-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curve. Part 2. *Math.USSR Sb*. 1973;19(1):139–156 DOI: 10.1070/SM1973v019n01ABEH001741.
41. Kuznetsov SP. *Dynamical chaos and hyperbolic attractors. From mathematics to physics*. Moscow-Izhevsk; 2013. 488 p.
42. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999;328(12):1197–1202. DOI: 10.1016/S0764-4442(99)80439-X.
43. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. The origin and structure of the Lorenz attractor. *Sov. Phys. Dokl*. 1977;22:253–255.
44. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type. *Trans. Mosc. Math. Soc*. 1982;44:153–216.
45. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963;20(2):130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.C.
46. Gonchenko S, Ovsyannikov I, Simo C, Turaev D. Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors. *Int. J. of Bifurcation and chaos*. 2005;15(11):3493–3508. DOI: 10.1142/S0218127405014180.
47. Gonchenko SV, Gonchenko AS, Ovsyannikov II, Turaev DV. Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps. *Math. Model. Nat. Phen*. 2013;8(5):48–70.
48. Gonchenko S, Gonchenko A, Kazakov A, Samylyna E. On discrete Lorenz-like attractors. *Chaos*. 2021;31:023117. DOI: 10.1063/5.0037621.
49. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Shilnikov LP. Towards scenarios for emergence of chaos in three-dimensional maps. *Rus. Nonlinear Dynamics*. 2012;8(1):3–28.

50. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps. *Int. J. Bif. and Chaos*. 2014;24(8). DOI: 10.1142/S0218127414400057.
51. Gonchenko S, Karatetskaia E, Kazakov A, Kruglov V. Conjoined Lorenz twins - a new pseudo-hyperbolic attractor in three-dimensional maps and flows. *Chaos*. 2022;32:121107. DOI: 10.1063/5.0123426.
52. Borisov AV, Kazakov AO, Sataev IR. The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2014;19:718–733. DOI: 10.1134/S1560354714060094.
53. Gonchenko SV. On stable periodic motions in systems close to systems with a non-rough homoclinic curve. *Mathematical notes*. 1983;33(5):745–755. DOI: 10.1007/BF01158287.
54. Gonchenko SV, Simo C, Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight. *Nonlinearity*. 2013;26(3):621–678. DOI: 10.1088/0951-7715/26/3/621.
55. Gonchenko SV. On a two parameter family of systems close to a system with a nontransversal Poincaré homoclinic curve. I. *Selecta Math. Sovietica*. 1990, 10.
56. Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Commun. Math. Phys.* 1976;50:69–77. DOI: 10.1007/BF01608556.
57. Benediks M, Carleson L. Dynamics of the Hénon Map. *Ann. Math.* 1991;133:73–169.
58. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On the existence of Newhouse domains in a neighborhood of systems with a structurally unstable Poincaré homoclinic curve (the higher-dimensional case). *Dokl. Math.* 1993;47(2):268–273.
59. Gonchenko SV, Gonchenko VS, Shilnikov LP. On homoclinic origin of Henon-like maps. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2010;15(4–5):462–481. DOI: 10.1134/S1560354710040052.
60. Arnold VI. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer; 1988.
61. Biragov VS. Bifurcations in a two-parameter family of conservative mappings that are close to the Hénon mapping. *Selecta Math. Soviet.* 1990;9(3):273–282.
62. Simó C, Vieiro A. Resonant zones, inner and outer splitting in generic and low order resonances of area preserving maps. *Nonlinearity*. 2009;22(5):1191–1245. DOI: 10.1088/0951-7715/22/5/012.
63. Milnor J. On the concept of attractor. *Comm. Math. Phys.* 1985;99:177–195. DOI: 10.1007/BF01212280.
64. Minkov SS. Thick attractors and skew products. PhD thesis math. and phys., 2016. 61 p.
65. Turaev DV, Shilnikov LP. Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbation of Lorenz-like attractors. *Dokl. Math. RAN*. 2008;418(1).
66. Gonchenko AS, Gonchenko SV, Kazakov AO, Kozlov AD. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2018;28(11):1830036. DOI: 10.1142/S0218127418300367.
67. Gonchenko SV, Lamb JSW, Rios I, Turaev D. Attractors and repellers near elliptic points of reversible systems. *Dokl. Math. RAN*. 2014;454:375–378. DOI: 10.7868/S0869565214040045.
68. Newhouse S. Nondensity of axiom  $A(a)$  on  $S^2$ . *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.* 1970;14:191–202.
69. Newhouse S. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. *Publ. Math. IHES*. 1979;50:101–152. DOI: 10.1007/BF02684771.
70. Guckenheimer J, Williams RF. Structural stability of Lorenz attractors. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* 1979;50:59–72. DOI: 10.1007/BF02684769.
71. Malkin MI. Rotation intervals and dynamics of Lorenz-like maps. In: *Methods of qualitative theory of diff. eq. Gorki*; 1985. P. 122–139 (in Russian).
72. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves. *Sov. Math. Docl.* 1991;320(2):269–272.
73. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves. *Physica D*. 1993;62(1–4):1–14. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90268-6.

74. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. Dynamical phenomena in multidimensional systems with non-rough Poincare homoclinic curv. *Docl. RAN.* 1993;330(2):144–147.
75. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev D. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. *Nonlinearity.* 2008;21(5):923–972.
76. Gonchenko SV, Shilnikov LP. On invariants of  $\Omega$ -conjugacy of diffeomorphisms with a nontransversal homoclinic orbit. *Ukr. Math. J.* 1990;42(2):153–159.
77. Gonchenko SV, Shilnikov LP. On moduli of systems with a non-rough Poincare homoclinic curve. *Izv. RAN, ser. math.* 1992;56(6):1165–1197.
78. Gonchenko SV, Turaev DV, Shilnikov LP. Homoclinic tangencies of an arbitrary order in Newhouse domains. *J. Math. Sci.* 2001;105:1738–1778. DOI: 10.1023/A:1011359428672.
79. Palis J, Viana M. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many sinks. *Ann. Math.* 1994;140:91–136.
80. Romero N. Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions. *Ergod. Th. and Dyn. Sys.* 1995;15:735–757.
81. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Turaev DV. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits. *Chaos.* 1996;6(1):15–31. DOI: 10.1063/1.166154.
82. Gonchenko SV, Gonchenko VS. On bifurcations of birth of closed invariant curves in the case of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies. *Proc. Steklov Math. Inst.* 2004;244:87–114.
83. Gavrilov NK. On three-dimensional dynamical systems with a non-rough homoclinic contour. *Mat. Notes.* 1973;14(5):953–957. DOI: 10.1007/BF01462256.
84. Gonchenko SV. Moduli of  $\Omega$ -conjugacyes for two-dimensional diffeomorphisms with non-rough heteroclinic contour. *Math. Sb.* 1996;187(9):1261–1281.
85. Gonchenko SV, Shilnikov LP, Stenkin OV. On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori. *Proc. Int. Conf. “Progress in Nonlinear Science” dedicated to 100th Anniversary of A. A. Andronov, July 2–6; v. 1 “Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics”.* Nizhni Novgorod; 2002. P. 80–102.
86. Gonchenko SV. Dynamical systems with homoclinic tangency, omega-moduli and bifurcations. *Thesis of Doctor of Phys. and Math. Sci., N. Novgorod, 2004.* 300 p.
87. Gonchenko SV, Stenkin OV., Shilnikov LP. On the existence of a countable set of stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse domains with heteroclinic tangencies. *Rus. Nonlinear Dynamics.* 2006;2(1):3–25.
88. Dmitriev AS, Komlev YuA, Turaev DV. Bifurcation phenomena in the 1:1 resonant horn for the forced van Der Pol-Duffing equation. *Int. J. Bifurcation Chaos.* 1992;2(1):93–100. DOI: 10.1142/S0218127492000094.
89. Lamb JSW, Roberts JAG. Time-reversal symmetry in dynamical systems: A survey. *Physica D.* 1998;112:1–39.
90. Rom-Kedar V, Wiggins S. Transport in two-dimensional maps, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1990;109(3):239–298.
91. Haragus M, Iooss G. Reversible Bifurcations. In: *Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* London: Springer; 2011.
92. Lerman LM, Turaev DV. Breakdown of symmetry in reversible systems. *Reg. Chaotic Dyn.* 2012;17(3–4):318–336. DOI: 10.1134/S1560354712030082.
93. Lamb JSW, Stenkin OV. Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits. *Nonlinearity.* 2004;17:1217–1244.
94. Borisov AV, Mamaev IS. Strange attractors in dynamics of Celtic stones. *Advances in Physical Sciences.* 2003;173(4):407–418. DOI: 10.1070/pu2003v046n04abeh001306.
95. Kuznetsov SP, Zhalnin AYu, Sataev IR, Sedova YuV. Phenomena of nonlinear dynamics of dissipative systems in the nonholonomic mechanics of Celtic stone. *Rus. Nonlinear dynamics.* 2012;84:735–762.

96. Kozlov VV. On the Theory of Integration of the Equations of Nonholonomic Mechanics. *Uspekhi Mekh.* 1985;8(3):85–107. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000203.
97. Bizyaev IA, Borisov AV, Kazakov AO. Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: reversal and strange attractors. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2015;5:605–626.



*Гонченко Сергей Владимирович* — родился в Горьком (1953). Окончил Горьковский государственный университет имени Н. И. Лобачевского (1975). Доктор физико-математических наук (2004, ГГУ). Автор монографии «Гомоклинические касания» (в соавторстве с Л. П. Шильниковым). Опубликовал более 150 научных статей по направлениям, указанным выше. Федеральный профессор в области математики. Работает в ННГУ заведующим лабораторией динамических и управляемых систем (с 2011).

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Национальный исследовательский Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского  
 E-mail: sergey.gonchenko@mail.ru  
 ORCID: 0000-0003-2573-6009  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 5569



*Гонченко Александр Сергеевич* — родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010) и аспирантуру ННГУ (2012). Кандидат физико-математических наук (2013, ННГУ). Работает в ННГУ старшим научным сотрудником лаборатории динамических и управляемых систем и в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» старшим научным сотрудником в международной лаборатории динамических систем и приложений. Опубликовал около 25 научных статей по исследованию динамического хаоса в различных динамических системах.

Россия, 603950 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23  
 Нижегородский университет им. Н. И. Лобачевского  
 Россия, 603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 НИУ «Высшая школа экономики»  
 E-mail: agonchenko@mail.ru  
 ORCID: 0000-0003-0505-9725



*Казаков Алексей Олегович* — родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010). Доктор физико-математических наук (2021, НИУ ВШЭ). Работает главным научным сотрудником в лаборатории динамических систем и приложений, профессором на кафедре фундаментальной математики НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Его научные интересы связаны с исследованиями динамического хаоса, бифуркаций и странных аттракторов. Автор более 50 научных работ в ведущих российских и международных журналах.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: kazakovdz@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-0002-6553  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 826649



*Самылина Евгения Александровна* — родилась в 1996 году. Окончила Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2019). Работает младшим научным сотрудником в международной лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Научные интересы лежат в области исследования динамического хаоса, анализа бифуркаций и странных аттракторов.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: samylina\_evgeniya@mail.ru  
 ORCID: 0000-0001-8537-8851  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1048032