Бифуркации в динамических системах. Детерминированный хаос. Квантовый хаос

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья
УДК 517.9

DOI: 10.18500/0869-6632-003135
EDN: NITFSM

Квазинормальные формы для систем двух уравнений с большим запаздыванием

С. А. Кащенко✉*, А. О. Толбей*

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Россия
E-mail: ✉kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 15.06.2024, принята к публикации 1.08.2024, опубликована онлайн 31.10.2024, опубликована 29.11.2024

Аннотация. Рассматривается система двух уравнений с запаздыванием. Основной *целью* исследования является изучение локальной динамики этой системы в предположении, что параметр запаздывания является достаточно большим. Выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия и показано, что они имеют бесконечную размерность. *Методы.* Исследования основаны на применении специальных методов бесконечномерной нормализации. Классические методы, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм, оказываются непосредственно неприменимы. *Результаты.* В качестве основных результатов построены специальные нелинейные краевые задачи, которые играют роль нормальных форм. Их нелокальная динамика определяет поведение всех решений исходной системы в окрестности состояния равновесия.

Ключевые слова: динамика, устойчивость, запаздывание, квазинормальные формы, сингулярные возмущения.

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-71-30011, https://rscf.ru/project/21-71-30011/.

Для цитирования: *Кащенко С. А., Толбей А. О.* Квазинормальные формы для систем двух уравнений с большим запаздыванием // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 781–795. DOI: 10.18500/0869-6632-003135. EDN: NITFSM

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003135

Quasinormal forms for systems of two equations with large delay

S. A. Kashchenko✉*, A. O. Tolbey*

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Russia
E-mail: ✉kasch@uniyar.ac.ru, a.tolbey@uniyar.ac.ru

Received 15.06.2024, accepted 1.08.2024, available online 31.10.2024, published 29.11.2024

Abstract. A system of two equations with delay is considered. The *purpose* of this work is to study the local dynamics of this system under the assumption that the delay parameter is sufficiently large. Critical cases in the problem of stability of an equilibrium state are identified and it is shown that they have infinite dimension. *Methods.* The research is based on the use of special methods of infinite-dimensional normalization. Classical methods based on the application of the theory of invariant integral manifolds and normal forms turn out to be directly inapplicable. *Results.* As the main results, special nonlinear boundary value problems are constructed, which play the role of normal forms. Their nonlocal dynamics determine the behavior of all solutions of the original system in the vicinity of the equilibrium state.

Keywords: dynamics, stability, delay, quasinormal forms, singular perturbations.

Acknowledgements. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation № 21-71-30011, https://rscf.ru/project/21-71-30011/.

For citation: Kashchenko SA, Tolbey AO. Quasinormal forms for systems of two equations with large delay. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6):781–795. DOI: 10.18500/0869-6632-003135

Введение

Рассматривается нелинейная система из двух дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\dot{u} = Au + bBu(t-T) + F(u(t-T)) = 0. \tag{1}$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^2$, A и B — 2×2 матрицы, запаздывание $T > 0$, $b \geqslant 0$ — некоторый параметр. Нелинейная вектор-функция $F(u)$ имеет вид

$$F(u) = F_2(u,u) + F_3(u,u,u),$$

где вектор-функции $F_{2,3}$ — линейны по каждому аргументу. В качестве пространства начальных функций фиксируем пространство $\mathbb{C}_{[-T,0]}(\mathbb{R}^2)$.

Исследуется вопрос о поведении всех решений (1) с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия. Основное предположение, открывающее путь к применению асимптотических методов, заключается в том, что параметр T является достаточно большим, а значит,

$$0 < \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \tag{2}$$

Системы вида (1) изучались в работах многих авторов (см., например, [1–15]). В работах [16–19] рассматривались уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + x = \beta x(t-T) + f(x(t-T)), \quad T \gg 1. \tag{3}$$

Результаты из [16–19] будут существенно использоваться.

В (1) удобно произвести замену времени $t \to Tt$. В результате приходим к сингулярно возмущенной системе

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bBu(t-1) + F(u(t-1)). \tag{4}$$

Отметим, что вырожденная при $\varepsilon = 0$ система

$$Au + bBu(t-1) + F(u(t-1)) = 0$$

не дает информации о поведении решений системы (4) при $t \to \infty$. Будут существенно использоваться фундаментальные результаты [20–23] об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений.

Важную роль при изучении локальной динамики системы (4) играет поведение решений линеаризованной (в нуле) системы

$$\varepsilon \dot{u} = Au + bBu(t-1). \tag{5}$$

Поведение решений этой системы полностью определяется расположением корней ее характеристического квазиполинома

$$\det\big(A + b\exp(-\lambda)B - \varepsilon\lambda I\big) = 0.$$

Пусть $A = \{a_{ij}\}^2$, $B = \{b_{ij}\}^2$ и $a_1 = \det A$, $b_1 = \det B$. Тогда характеристический квазиполином принимает вид

$$\varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1 = b^2 b_1 \exp(-2\lambda) + b(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)\exp(-\lambda), \tag{6}$$

где

$$b_2 = b_{11} + b_{22}, \quad b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12}.$$

В том случае, когда все корни (6) имеют отрицательные вещественные части и отделены от нуля при $\varepsilon \to 0$, все решения системы (5) и все решения с достаточно малыми начальными условиями системы (4) при малых ε стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если же уравнение (6) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, то нулевое решение в (5) и (4) неустойчиво и в малой окрестности нуля не может быть аттрактора в (4). Поэтому задача о динамике (4) становится нелокальной.

Рассмотрим вопрос о поведении всех решений (4) из окрестности нулевого состояния равновесия в случаях, близких к критическим, когда у уравнения (6) нет корней с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью, но есть корень, вещественная часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Будет показано, что в этих случаях бесконечно много корней (6) стремится к мнимой оси при $\varepsilon \to 0$, поэтому критические случаи имеют бесконечную размерность.

Отметим, что известные методы исследования локальной динамики в критических случаях, основанные на применении теории инвариантных интегральных многообразий [8, 24, 25], здесь неприменимы. Будут использованы и развиты методы бесконечной нормализации, предложенные в работах [16–19]. В разделе 1 будет исследована линейная система (5), а в разделе 2 будут получены основные результаты: построена специальная нелинейная краевая задача параболического типа — квазинормальная форма. Эта квазинормальная форма играет роль нормализованного для системы (4) уравнения. Нелокальная динамика квазинормальной формы определяет локальную структуру решений системы (4). В разделе 3 будут рассмотрены примеры.

Введем еще одно предположение. Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Тем самым

$$a = a_{11} + a_{22} < 0 \quad \text{и} \quad a_1 = \det A > 0. \tag{7}$$

При достаточно малых значениях параметра b все корни характеристического уравнения (6) тоже имеют отрицательные вещественные части. Поэтому речь пойдет о нахождении такого значения b_0 ($b_0 > 0$), при котором для $b \in [0, b_0)$ все корни (6) имеют отрицательные вещественные части, а при $b = b_0$ реализуется критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения (5) и (4).

1. Линейный анализ

В данном разделе исследуем линейную систему (5) при условии (2). Сначала определим коэффициенты в (5), при которых реализуется критический случай в задаче об устойчивости. Затем найдем асимптотику при $\varepsilon \to 0$ всех тех корней (6), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Дополнительно предполагаем, что

$$b_1 \neq 0. \tag{8}$$

Случай, когда $b_1 = 0$, будет рассмотрен в разделе 3.

Рассмотрим уравнение (6) как квадратичное уравнение относительно величины $b\exp(-\lambda)$. Тогда получаем, что

$$b\exp(-\lambda) = R^{\pm}(\varepsilon\lambda), \tag{9}$$

где

$$R^{\pm}(\varepsilon\lambda) = (2b_1)^{-1}\big[b_3 - \varepsilon\lambda b_2 \pm \big((b_3 - \varepsilon\lambda b_2)^2 + 4b_1 \cdot (\varepsilon^2\lambda^2 - a\varepsilon\lambda + a_1)\big)^{1/2}\big].$$

В (9) положим $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$, где $\omega \geqslant 0$ — вещественное, и пусть

$$R^{\pm}(i\omega) = \rho^{\pm}(\omega)\exp(i\Omega^{\pm}(\omega)), \quad \big(\rho^{\pm}(\omega) = |R^{\pm}(i\omega)|\big).$$

Наименьшее значение $\rho^{\pm}(\omega)$ по всем $\omega \geqslant 0$ обозначим через $\rho_0^{\pm}$:

$$\min_{\omega} \rho^{\pm}(\omega) = \rho^{\pm}(\omega^{\pm}) = \rho_0^{\pm}$$

и

$$\min\big(\rho^{+}(\omega^{+}), \rho^{-}(\omega^{-})\big) = \rho_0(\omega_0) = \rho_0,$$

где

$$\omega_0 = \begin{cases} \omega^{+}, & \text{если } \rho_0^{+} \leqslant \rho_0^{-}, \\ \omega^{-}, & \text{если } \rho_0^{-} \leqslant \rho_0^{+}, \end{cases} \qquad \rho_0 = \rho_0(\omega_0) = \begin{cases} \rho^{+}(\omega^{+}), & \text{если } \rho_0^{+} \leqslant \rho_0^{-}, \\ \rho^{-}(\omega^{-}), & \text{если } \rho_0^{-} \leqslant \rho_0^{+}, \end{cases}$$

$$\Omega_0 = \Omega_0(\omega_0) = \begin{cases} \Omega^{+}(\omega^{+}), & \text{если } \rho_0^{+} \leqslant \rho_0^{-}, \\ \Omega^{-}(\omega^{-}), & \text{если } \rho_0^{-} \leqslant \rho_0^{+}. \end{cases}$$

Наконец, через $R_0(\omega)$ обозначим выражение $R_0(\omega) = \rho_0(\omega)\exp(i\Omega_0(\omega))$.

Лемма 1. *Пусть $b < \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε все корни уравнения (6) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части.*

Лемма 2. *Пусть $b > \rho_0$. Тогда при достаточно малых ε уравнение (6) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью.*

Простые, но громоздкие доказательства этих утверждений опустим.

Ниже рассмотрим критический случай, когда выполнены равенства

$$b_0 = \rho_0, \quad b = b_0 + \varepsilon^2 b^0. \tag{10}$$

Найдем асимптотику при $\varepsilon \to 0$ всех тех корней $\lambda_n(\varepsilon), \bar{\lambda}_n(\varepsilon)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (6), вещественные части которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Введем обозначение. Через $\theta = \theta(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$ обозначим такую величину, которая дополняет до целого кратного 2π значение $\omega_0 \varepsilon^{-1}$. Применяя стандартные методы теории возмущений, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3. *Пусть выполнены равенства* (10). *Тогда для* $\lambda_n(\varepsilon)$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\lambda_n(\varepsilon) = i\big(\omega_0 \varepsilon^{-1} + \varepsilon(\theta - \Omega_0 + 2\pi n)\big) + \varepsilon \lambda_{1n} + \varepsilon^2 \lambda_{2n} + \ldots,$$

в которых

$$\lambda_{1n} = -i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0[\theta - \Omega_0 + 2\pi n],$$

$$\lambda_{2n} = \left(\frac{1}{2}\rho_0''(\omega_0) - \frac{1}{2} i\Omega_0''(\omega_0)\rho_0\right)[\theta - \Omega_0 + 2\pi n]^2 - i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0[\theta - \Omega_0 + 2\pi n] + b^0 b_0^{-1}.$$

Напомним, что корню $\lambda_n(\varepsilon)$ уравнения (6) отвечает решение Эйлера $u_n(t, \varepsilon)$ системы (5)

$$u_n(t, \varepsilon) = g_n(\varepsilon) \exp(\lambda_n(\varepsilon) t),$$

где $g_n(\varepsilon) = g_0 + \varepsilon g_{1n} + \ldots$ — собственный вектор матрицы

$$C_n(\varepsilon) = A + b_0 \exp\left[i\Omega_0 - \varepsilon \lambda_{1n} - \varepsilon^2 \lambda_{2n} - \ldots\right] B,$$

отвечающий собственному значению $i\omega_0 + \varepsilon i(\theta - \Omega_0 + 2\pi n) + \varepsilon^2 \lambda_{1n} + \varepsilon^3 \lambda_{2n} + \ldots$:

$$C_n(\varepsilon) g_n(\varepsilon) = \left[i\omega_0 + \varepsilon i(\theta - \Omega_0 + 2\pi n) + \varepsilon^2 \lambda_{1n} + \ldots\right] g_n(\varepsilon),$$

и для матрицы $C = C_n(0) = A + b_0 \exp(i\Omega_0)$ имеем равенство

$$C g_0 = i\omega_0 g_0.$$

Ниже понадобится собственный вектор q_0 матрицы C^*:

$$C^* q_0 = -i\omega_0 q_0.$$

Удобно этот вектор нормировать так, чтобы $(g_0, q_0) = 1$.

Линейная система уравнений (5) тогда имеет совокупность решений с произвольными коэффициентами ξ_n

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n u_n(t, \varepsilon) = E(t, \varepsilon) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp[2\pi n i x + \varepsilon^2(\lambda_{2n} + O(\varepsilon))t] \cdot g_n(\varepsilon) =$$
$$= E(t, \varepsilon) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau) g_0 \cdot \exp(2\pi n i x) + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau)(g_{1n} + \varepsilon g_{2n} + \ldots) \cdot \exp(2\pi n i x) =$$
$$= E(t, \varepsilon) \xi(\tau, x) g_0 + \varepsilon \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n(\tau)(g_{1n} + \varepsilon g_{2n} + \ldots) \cdot \exp(2\pi n i x). \tag{11}$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2 t$ — «медленное» время, $E(t,\varepsilon) = \exp[i(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta - \Omega_0 - \varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\theta - \Omega_0))t]$, $x = (1 - \varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0)t$, $\xi_n(\tau) = \xi_n \exp((\lambda_{2n} + O(\varepsilon))\tau)$ — коэффициенты Фурье 1-периодической по x функции $\xi(\tau, x)$.

Отдельно остановимся на случае, когда $\omega_0 = 0$. Тогда $\theta = 0$, а Ω_0 принимает одно из двух значений: либо $\Omega_0 = 0$, либо $\Omega_0 = \pi$. Отметим еще, что $\Omega_0'(0) = a \cdot a_1^{-1}\exp(i\Omega_0(0))$, $\Omega_0''(0) = 0$, $\rho_0'(0) = 0$. Равенство $\Omega_0 = 0$ имеет место при условии

$$R_0(0) = \rho_0(0)\exp(i\Omega_0(0)) = \rho_0(0) > 0. \tag{12}$$

В этом случае $E(t,\varepsilon) \equiv 1$ и в выражении (11) $\xi(\tau, x)$ и g_0 — вещественные:

$$u(t,\varepsilon) = \xi(\tau, x)g_0 + o(\varepsilon), \quad \xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \tag{13}$$

Равенство $\Omega_0 = \pi$ в случае $\omega_0 = 0$ получаем при условии

$$R_0(0) = -\rho_0(0) = \rho_0(0)\exp(i\Omega_0(0)). \tag{14}$$

В этой ситуации выражение (11) можно представить в виде

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp[i\pi(2n+1)x + (\lambda_{2n} + O(\varepsilon))\tau]g_n(\varepsilon) = \xi(\tau, x)g_0 + O(\varepsilon), \tag{15}$$

а функция $\xi(\tau, x)$ содержит только нечетно кратные π гармоники $\exp(i\pi(2n+1)x)$. Поэтому и здесь $E(t,\varepsilon) \equiv 1$, а функция $\xi(\tau, x)$ — вещественная и

$$\xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x).$$

На представлениях (11), (13), (15) будет базироваться нелинейный анализ системы (4).

2. Построение квазинормальных форм

Сразу отметим, что обоснование приводимых ниже утверждений следует непосредственно из алгоритма построения асимптотики решений исходной краевой задачи. Будем предполагать, что выполнены равенства (10). Отдельно рассмотрим случаи $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 \neq 0$.

2.1. Случай $\omega_0 = 0$ и $\Omega_0 = 0$. Этот случай самый простой. Основываясь на соотношении (15), решения нелинейной системы (4) ищем в виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\xi(\tau, x)g_0 + \varepsilon^4 u_2(\tau, x) + \ldots,$$

где $\xi(\tau, x)$ и $u_2(\tau, x)$ — неизвестные 1-периодические по x функции. Подставим это выражение в (4) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При степени ε^2 получаем верное равенство, а приравнивая коэффициенты при ε^4, приходим к системе уравнений относительно u_2:

$$(A + b_0 B)u_2 + F_0 = 0,$$

в которой

$$F_0 = b_0 B g_0\left[-\frac{\partial\xi}{\partial\tau} + \frac{1}{2}\rho_0''(0)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - a \cdot a_1^{-1}\frac{\partial\xi}{\partial x}\right] + b_1^0 B g_0 \xi - F_2(g_0, g_0)\xi^2.$$

Поскольку $(A + b_0 B)g_0 = 0$, то условие разрешимости этой системы состоит в выполнении равенства (условие ортогональности вектору q_0)

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\rho_0''(0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - a \cdot a_1^{-1}\frac{\partial \xi}{\partial x} + b_1^0 b_0^{-1}\xi + \alpha\xi^2 = 0, \tag{16}$$

$$\alpha = [b_0(Bg_0, q_0)]^{-1}(F_2(g_0, g_0), q_0)$$

для периодической по x функции $\xi(\tau, x)$:

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x). \tag{17}$$

Сформулируем итоговый результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (8), (9), (10), (12) *и пусть краевая задача* (16), (17) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x \in [0,1]$ *решение* $\xi(\tau, x)$. *Тогда функция* $u(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\xi(\tau,x)g_0 + \varepsilon^4 u_2(\tau,x)$ *удовлетворяет системе уравнений* (4) *с точностью до* $O(\varepsilon^4)$.

Отметим, что динамические свойства краевой задачи (16), (17) простые. Её аттрактором при условии невырожденности $\alpha \neq 0$ может быть только однородное устойчивое состояние равновесия.

2.2. Случай $\omega_0 = 0$ и $\Omega_0 = \pi$. Этот случай интереснее предыдущего. Решения нелинейной системы (4) ищем в виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\xi(\tau,x)g_0 + \varepsilon^2 u_2(\tau,x) + \varepsilon^3 u_3(\tau,x) + \ldots, \tag{18}$$

где $\xi(\tau, x)$ содержит только нечетные гармоники по переменной x.

Подставим (18) в (4) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε. При первой степени ε получаем верное равенство. На следующем шаге получаем систему для определения u_2:

$$Au_2 + b_0 B u_2(\tau, x-1) + \xi^2(\tau,x)F_2(g_0,g_0) = 0.$$

Отметим, что матрица $A + b_0 B$ обратима, а матрица $A - b_0 B$ имеет нулевое собственное значение.

Поскольку $\xi^2(\tau, x)$ является 1-периодической функцией, то и решение $u_2(\tau, x)$ ищем в виде 1-периодической функции. Поэтому

$$u_2(\tau,x) = u_{20}\xi^2(\tau,x),$$

$$u_{20} = -(A + b_0 B)^{-1}F_2(g_0,g_0).$$

На следующем шаге, собирая коэффициенты при ε^3, приходим к системе для определения u_3:

$$Au_3 + b_0 B u_3(\tau, x-1) - 2\xi\xi'\left[b_0\Omega_0'(0)\rho_0(0)Bu_{20} - u_{20}\right] + \\ + b_0 B\left[-\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\rho_0''(0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a \cdot a_1^{-1}\frac{\partial \xi}{\partial x} + b^0 b_0^{-1}\xi\right] + f^0\xi^3, \tag{19}$$

где $f^0 = -F_2(g_0, u_{20}) - F_2(u_{20}, g_0) - F_3(g_0, g_0, g_0)$. Функцию u_3 ищем в виде суммы двух функций $u_3 = u_{31} + u_{32}$, первая из которых 1-периодична по x, а вторая — 1-антипериодична. Поэтому система (19) эквивалентна системе уравнений

$$(A + b_0 B)u_{31} = 2\left[u_{20} + b_0\Omega_0'(0)\rho_0(0)Bu_{20}\right]\xi\xi', \tag{20}$$

$$(A - b_0 B)u_{31} = b_0 B g_0\left[\frac{\partial \xi}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\rho_0''(0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - b^0 b_0^{-1}\xi\right] - f^0\xi^3. \tag{21}$$

Из (20) сразу находим, что

$$u_{31} = 2(A + b_0 B)^{-1}\big[u_{20} + b_0\Omega_0'(0)\rho_0(0)Bu_{20}\big]\xi\xi'.$$

Условие разрешимости системы (21) состоит в выполнении условия ортогональности ее правой части вектору q_0, то есть

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\rho_0''(0)\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a\cdot a_1^{-1}\frac{\partial\xi}{\partial x} + b^0 b_0^{-1}\xi - \big[b(Bg_0, q_0)\big]^{-1}(f^0, q_0)\xi^3. \tag{22}$$

Напомним, что функция $\xi(\tau, x)$ — 1-антипериодическая:

$$\xi(\tau, x+1) \equiv -\xi(\tau, x). \tag{23}$$

Подведем итог.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (8)*,* (9)*,* (10)*,* (14) *и пусть краевая задача* (22)*,* (23) *имеет ограниченное при* $\tau \to \infty$, $x \in [0, 1]$ *решение* $\xi(\tau, x)$. *Тогда функция* $u(t, \varepsilon) = \varepsilon\xi(\tau, x)g_0 + \varepsilon^2 u_2(\tau, x) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x) + u_{32}(\tau, x))$ *удовлетворяет системе уравнений* (4) *с точностью до* $O(\varepsilon^4)$.

Таким образом, краевые задачи (16), (17) и (22), (23) являются квазинормальными формами для системы уравнений (4) в критических случаях при $\omega_0 = 0$. Отметим, что динамические свойства последней из них богаче. В (22), (23) могут быть, например, устойчивые неоднородные состояния равновесия.

2.3. Квазинормальные формы при $\omega_0 \neq 0$. Основываясь на асимптотическом представлении (11), решения нелинейной системы уравнений (4) ищем в виде

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon\big(\xi(\tau,x)E(t,\varepsilon)g_0 + \overline{cc}\big) + \varepsilon^2\big(u_{20}(\tau,x) + u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon) + \overline{cc}\big) + \\ + \varepsilon^3\big(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon) + \overline{cc} + u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon) + \overline{cc}\big) + \ldots. \tag{24}$$

Все фигурирующие в (24) функции 1-периодичны по x. Здесь и ниже через $\overline{cc}$ обозначаем слагаемое, сопряженное к предыдущему.

Подставляя (24) в (4) и совершая стандартные действия, будем последовательно определять коэффициенты в (24). При ε в первой степени получаем верное равенство. Собирая коэффициенты при ε^2, приходим к системе уравнений для $u_{20}(\tau, x)$ и $u_{21}(\tau, x)$:

$$(A + b_0 B)u_{20}(\tau,x) + |\xi(\tau,x)|^2\big(F_2(g_0,\bar{g_0}) + F_2(\bar{g_0}, g_0)\big) = 0,$$

$$(A - b_0 B - 2i\omega_0 I)u_{21}(\tau,x) + \xi^2(\tau,x)F_2(g_0,g_0).$$

Отсюда имеем равенства

$$u_{20}(\tau,x) = u_{20}^0|\xi(\tau,x)|^2, \quad u_{21}(\tau,x) = u_{21}^0\xi^2(\tau,x),$$
$$u_{20}^0 = -(A + b_0 B)^{-1}\big[F_2(g_0,\bar{g_0}) + F_2(\bar{g_0},g_0)\big],$$
$$u_{21}^0 = -(A + b_0 B - 2i\omega_0 I)^{-1}F_2(g_0,g_0).$$

На следующем шаге соберем коэффициенты при ε^3. В результате получаем систему уравнений для определения $u_{31}(\tau,x)$ и $u_{32}(\tau,x)$:

$$(A+b_0B-i\omega_0I)u_{31}(\tau,x)=-b_0Bg_0\Big[-\frac{\partial\xi}{\partial\tau}+A_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+A_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+A_3\xi\Big]-d\xi|\xi|^2, \quad (25)$$

$$(A+b_0B-3i\omega_0I)u_{32}(\tau,x)+\xi^3(\tau,x)\big(F_2(u^0_{21},g_0)+F_2(g_0,u^0_{21})+ +F_3(g_0,g_0,g_0)\big)=0. \quad (26)$$

В (25) приняты обозначения

$$d=F_2(u^0_{20},g_0)+F_2(g_0,u^0_{20})+F_2(u^0_{21},\bar g_0)+F_2(\bar g_0,u^0_{21})+F_3(g_0,g_0,\bar g_0)+ +F_3(g_0,\bar g_0,g_0)+F_3(\bar g_0,g_0,g_0),$$

$$A_1=\frac{1}{2}\big(\rho_0''(\omega_0)-i\Omega_0''(\omega_0)\rho_0(\omega_0)\big),$$

$$A_2=-\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0)-2iA_1(\theta-\Omega_0(\omega_0)),$$

$$A_3=b^0b_0^{-1}-i\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0)(\theta-\Omega_0(\omega_0)).$$

Из (26) сразу находим $u_{32}(\tau,x)$:

$$u_{32}(\tau,x)=-\xi^3\big(A+b_0B-3i\omega_0I\big)^{-1}\big(F_2(u^0_{21},g_0)+F_2(g_0,u^0_{21})+F_3(g_0,g_0,g_0)\big).$$

Рассмотрим систему (25). Матрица $A+b_0B-i\omega_0I$ имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственный вектор g_0. Поэтому критерий разрешимости (25) состоит в выполнении условия ортогональности правой части (25) вектору q_0:

$$b_0(Bg_0,q_0)\Big[-\frac{\partial\xi}{\partial\tau}+A_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+A_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+A_3\xi\Big]+(d,q_0)\xi|\xi|^2=0.$$

Отсюда окончательно получаем, что выполнено равенство

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=A_1\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+A_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+A_3\xi+(d,q_0)[b_0(Bg_0,q_0)]^{-1}\xi|\xi|^2, \quad (27)$$

а для $\xi(\tau,x)$ выполнены периодические краевые условия

$$\xi(\tau,x+1)\equiv\xi(\tau,x). \quad (28)$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем обозначение. Фиксируем произвольно $\theta_0\in[0,2\pi)$. Через $\varepsilon_r=\varepsilon_r(\theta_0)$ будем обозначать такую последовательность, что $\varepsilon_r(\theta_0)\to 0$ при $r\to\infty$ и $\theta(\varepsilon_r(\theta_0))=\theta_0$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (7), (8), (10) и $\omega_0\neq 0$. Фиксируем произвольно $\theta_0\in[0,2\pi)$. Пусть $\xi(\tau,x)$ — ограниченное при $\tau\to\infty$, $x\in[0,1]$ решение краевой задачи (27), (28) при $\theta=\theta_0$. Тогда функция*

$$u(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(\xi(\tau,x)E(t,\varepsilon)g_0+\overline{cc}\big)+\varepsilon^2\big(u_{20}(\tau,x)+u_{21}(\tau,x)E^2(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+ +\varepsilon^3\big(u_{31}(\tau,x)E(t,\varepsilon)+\overline{cc}+u_{32}(\tau,x)E^3(t,\varepsilon)+\overline{cc}\big)+\ldots$$

при $\tau=\varepsilon^2t$, $x=\big(1-\varepsilon\Omega_0'(\omega_0)\rho_0(\omega_0)\big)t$, $\varepsilon=\varepsilon_r(\theta_0)$ удовлетворяет системе уравнений (4) с точностью до $O(\varepsilon^4)$.

Это утверждение говорит о том, что при сформулированных условиях краевая задача (27), (28) является квазинормальной формой для системы уравнений (4).

3. Примеры

В первых двух примерах сделано упрощающее предположение о том, что

$$b_1 = \det B = 0. \tag{29}$$

В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$b(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)\exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \tag{30}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $b_2 = 0$ и когда $b_2 \neq 0$.

3.1. Случай $b_1 = 0$ и $b_2 = 0$. Отметим, что при условиях (29) и

$$b_2 = b_{11} + b_{22} = 0$$

оба собственных значения матрицы B нулевые. Будем предполагать, что выполнено условие невырожденности

$$b_3 = a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} \neq 0.$$

Равенство (30) тогда принимает вид

$$-b \cdot b_3 \exp(-\lambda) = \varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1. \tag{31}$$

Положим здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ $(\omega \geqslant 0)$ и рассмотрим выражение

$$p(\omega) = b \cdot b_3 \exp(-i\omega\varepsilon^{-1}),$$

где $p(\omega) = a_1 - \omega^2 - ia\omega = |p(\omega)|\exp(i\Omega(\omega))$. Из (31) получаем, что $|p(\omega)| = b \cdot |b_3|$.

Пусть

$$\min_{\omega} |p(\omega)| = |p(\omega_0)|.$$

Тогда находим, что

$$\begin{gathered}\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 \geqslant 2a_1, \\ (2a_1 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2a_1. \end{cases} \\ p_0 = |p(\omega_0)| \begin{cases} a_1, & \text{если } a^2 > 2a_1, \\ \dfrac{a}{2}(4a_1 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2a_1. \end{cases}\end{gathered} \tag{32}$$

При $b < p_0|b_3|^{-1}$ все корни (31) имеют отрицательные и отделенные от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественные части, а при $b > p_0|b_3|^{-1}$ в (31) есть корень с положительной и отделенной от нуля при $\varepsilon \to 0$ вещественной частью. Отметим, что при сформулированных условиях линейная система (5) сводится к уравнению второго порядка с запаздыванием

$$\varepsilon^2\ddot{x} - \varepsilon a\dot{x} + (\det A)x = b\beta x(t-1).$$

Здесь предполагаем, что реализуется критический случай, когда

$$b = b_0 + \varepsilon^2 b^0 \quad \text{и} \quad b_0 = p_0|b_3|^{-1}.$$

Приведем итоговые квазинормальные формы. При условии $a^2 \geqslant 2a_1$ имеем $\rho_0''(0) = 2$. При $b_3 < 0$ и $\alpha \neq 0$ квазинормальной формой является краевая задача (16), (17); решения (4) и решения (16), (17) связаны формулой $u = \varepsilon^2\xi^2(\tau, x) + O(\varepsilon^4)$. При $b_3 > 0$ квазинормальной формой является краевая задача (22), (23) и её решения и решения (4) связаны формулой (18).

Если $a^2 < 2a_1$ и $(d, q_0) \neq 0$, то квазинормальной формой является краевая задача (27), (28), в которой $\rho_0(\omega_0) = p_0|b_3|^{-1}$, а p_0 и ω_0 определяются в (32). В этом случае решения (27), (28) и (4) связаны асимптотическим равенством (24).

3.2. Случай $b_1 = 0$ и $b_2 \neq 0$. При этих условиях только одно собственное значение матрицы B нулевое. Из уравнения (30) тогда получаем, что

$$b\exp(-\lambda) = (\varepsilon^2\lambda^2 - \varepsilon a\lambda + a_1)(\varepsilon\lambda b_2 - b_3)^{-1}.$$

Положим здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ $(\omega \geqslant 0)$. Тогда

$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = p(\omega)(ib_2\omega - b_3)^{-1}.$$

Критические величины p_0 и ω_0 определяются из равенства

$$\min_{\omega}\left(|p(\omega)| \cdot |ib_2\omega - b_3|^{-1}\right) = p_0 = |p_0(\omega_0)| \cdot |ib_2\omega_0 - b_3|^{-1}.$$

После того как значения p_0 и ω_0 определены, повторяем изложенный выше алгоритм нахождения коэффициентов квазинормальной формы (27), (28).

В следующих двух примерах выполнено неравенство

$$b_1 = \det B \neq 0.$$

3.3. Случай $B = I$. Пусть матрица A имеет пару комплексных собственных значений $\alpha \pm i\beta$, где $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Тогда корни характеристического уравнения для системы

$$\varepsilon\dot{u} = Au + bu(t-1)$$

удовлетворяют равенствам

$$\varepsilon\lambda = \alpha + i\beta + b\exp(-\lambda),$$
$$\varepsilon\lambda = \alpha - i\beta + b\exp(-\lambda).$$

Положим здесь

$$\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}\ (\omega \geqslant 0) \ \text{ и } \ b = b_0 + \varepsilon^2 b^0.$$

Критические значения для параметров ω_0 и b_0 определяются из соотношений

$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = i(\omega - \beta) - \alpha,$$
$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = i(\omega + \beta) - \alpha.$$

Отсюда, учитывая, что $\omega > 0, \beta > 0$, получаем

$$b_0 = \min_{\omega}[(\omega-\beta)^2 + \alpha^2]^{1/2} = |\alpha|, \quad \omega_0 = \beta.$$

Квазинормальная форма в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = (2b_0^2)^{-1}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - (i\theta(2b_0^2)^{-1} + b_0^{-1})\frac{\partial\xi}{\partial x} + (i\theta b_0^{-1} - \theta^2(2b_0^2)^{-1} + b^0 b_0^{-1})\xi + \\ + (d, q_0)[b_0(Bg_0, q_0)]^{-1}\xi|\xi|^2,$$

$$\xi(\tau, x+1) \equiv \xi(\tau, x).$$

Связь между решениями этой квазинормальной формы и системы (4) определяется в теореме 3.

3.4. Случай $A = B$. Пусть матрица A имеет собственные значения $\alpha \pm i\beta$, где $\alpha < 0$, $\beta > 0$. Тогда имеем уравнения

$$\varepsilon\lambda = (\alpha + i\beta)(1 + b\exp(-\lambda)),$$
$$\varepsilon\lambda = (\alpha - i\beta)(1 + b\exp(-\lambda)).$$

Полагая здесь $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$, приходим к соотношениям

$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = (-\alpha + i(\omega - \beta))(\alpha + i\beta)^{-1},$$
$$b\exp(-i\omega\varepsilon^{-1}) = (-\alpha + i(\omega + \beta))(\alpha + i\beta)^{-1}.$$

Для критических значений параметров b, ω и Ω получаем равенства

$$b_0 = \min_{\omega}[(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}]^{1/2} = |\alpha| \cdot (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2},$$
$$\omega_0 = \beta, \quad \exp(i\Omega_0) = -(\alpha + i\beta)(\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}.$$

Итоговая квазинормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - (b_0^{-1}\exp(i\Omega_0))\frac{\partial\xi}{\partial x} + [b^0 b_0^{-1} - i(\theta - \Omega_0)b_0^{-1}]\xi + (d, q_0)[b_0(Bg_0, q_0)]^{-1}\xi|\xi|^2,$$
$$\xi(\tau, x + 1) \equiv \xi(\tau, x).$$

Выводы

Для системы из двух уравнений с запаздыванием выделены критические случаи в задаче об устойчивости состояния равновесия. Показано, что эти критические случаи имеют бесконечную размерность. В каждом из них построены квазинормальные формы, нелокальная динамика которых определяет асимптотическое поведение решений исходной системы в окрестности состояния равновесия. Квазинормальными формами являются краевые задачи типа Гинзбурга — Ландау, исследованию которых посвящены работы многих авторов. Отсюда можно сделать вывод о том, что структура решений в полученных квазинормальных формах, а значит, и в исходной системе, может быть достаточно сложной. Во многих случаях квазинормальные формы содержат «внутренний» параметр θ, который бесконечно много раз пробегает значения от 0 до 1 при стремлении к нулю малого параметра. Это говорит о высокой чувствительности динамических свойств исходной системы к изменению ее параметров. В методическом и чисто техническом плане приведенные построения сложнее, чем в случае одного уравнения второго порядка с большим запаздыванием.

Полученные здесь результаты являются основой для рассмотрения уравнений вида (1) произвольной размерности.

Список литературы

1. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
2. *Kashchenko S. A.* The dynamics of second-order equations with delayed feedback and a large coefficient of delayed control // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, no. 7/8. P. 811–820. DOI: 10.1134/S1560354716070042.
3. *Giacomelli G., Politi A.* Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems // Physical review letters. 1996. Vol. 76, no. 15. P. 2686. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.2686.

4. *Wolfrum M., Yanchuk S.* Eckhaus instability in systems with large delay // Physical review letters. 2006. Vol. 96, no. 22. P. 220201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.220201.
5. *Bestehorn M., Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A.* Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000. Vol. 145, no. 1–2. P. 110–129. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00106-8.
6. *Giacomelli G., Politi A.* Multiple scale analysis of delayed dynamical systems // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998. Vol. 117, no. 1–4. P. 26–42. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00318-7.
7. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity // Physical Review Letters. 1980. Vol. 45, no. 9. P. 709. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.709.
8. *Hale J. K.* Theory of Functional Differential Equations. 2nd ed. New York: Springer, 1977. 626 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
9. *D'Huys O., Vicente R., Erneux T., Danckaert J., Fischer I.* Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008/12/03. AIP, 2008. Vol. 18, no. 3. P. 037116. DOI: 10.1063/1.2953582.
10. *Van der Sande G., Soriano M. C., Fischer I., Mirasso C.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // Physical Review E. 2008. Vol. 77, no. 5. P. 55202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
11. *Klinshov V. V., Nekorkin V. I.* Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2011. Vol. 44, no. 1–3. P. 98–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2010.12.007.
12. *Клиньшов В. В., Некоркин В. И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // Успехи Физических Наук. 2013. Т. 183, № 12. С. 1323–1336. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
13. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Nekorkin V.* Jittering waves in rings of pulse oscillators // Physical Review E. 2016. Vol. 94, no. 1. P. 012206. DOI: 10.1103/PhysRevE.94.012206.
14. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S., Wolfrum M., D'Huys O., Nekorkin V.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // Physical Review E. 2017. Vol. 96, no. 4. P. 042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
15. *Yanchuk S., Perlikowski P.* Delay and periodicity // Physical Review E. APS. 2009. Vol. 79, no. 4. P. 1–9. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.046221.
16. *Кащенко С. А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 8. С. 1448–1451.
17. *Kashchenko S. A.* Van der Pol equation with a large feedback delay // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 6. P. 1301. DOI: 10.3390/math11061301.
18. *Kaschenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 1996. Vol. 6, no. 6. P. 1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
19. *Kashchenko S. A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. Vol. 38, no. 3. P. 443–451.
20. *Vasil'eva A. B., Butuzov V. F.* Asymptotic expansions of the solutions of singularly perturbed equations. Moscow: Nauka, 1973. 272 p.
21. *Butuzov V. F., Nefedov N. N., Omel'chenko O., and Recke L.* Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B. 2022. Vol. 27, no. 8. P.4255–4283. DOI: 10.3934/dcdsb.2021226.
22. *Nefedov N. N.* Development of methods of asymptotic analysis of transitionlayers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61, no. 12. P. 2068–2087. DOI: 10.1134/S0965542521120095.

23. *Nefedov N. N., Nikulin E. I.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction-diffusion equations in the case of a rapid reaction // Russian Journal of Mathematical Physics. 2018. Vol. 25, no. 1. P. 88–101. DOI: 10.1134/S1061920818010089.
24. *Bruno A. D.* Local Methods in Nonlinear Differential Equations / Translated from the Russian by W. Hovingh, C. S. Coleman, Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 348 p.
25. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2002. 642 p. DOI: 10.1137/1.9780898719222.

References

1. Sharkovsky AN, Maistrenko YL, Romanenko EY. Difference Equations and their Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group; 1993. 358 p.
2. Kashchenko SA. The dynamics of second-order equations with delayed feedback and a large coefficient of delayed control. Regular and Chaotic Dynamics. 2016;21(7/8):811–820. DOI: 10.1134/S1560354716070042.
3. Giacomelli G, Politi A. Relationship between delayed and spatially extended dynamical systems. Physical review letters. 1996;76(15):2686. DOI: 10.1103/PhysRevLett.76.2686
4. Wolfrum M, Yanchuk S. Eckhaus instability in systems with large delay. Physical review letters. 2006;96(22):220201. DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.220201.
5. Bestehorn M, Grigorieva EV, Haken H, Kashchenko SA. Order parameters for class-B lasers with a long time delayed feedback. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000;145(1–2):110–129. DOI: 10.1016/S0167-2789(00)00106-8.
6. Giacomelli G, Politi A. Multiple scale analysis of delayed dynamical systems. Physica D: Nonlinear Phenomena. 1998;117(1–4):26–42. DOI: 10.1016/S0167-2789(97)00318-7.
7. Ikeda K, Daido H, Akimoto O. Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. Physical Review Letters. 1980;45(9):709. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.709.
8. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. 2nd ed. New York: Springer; 1977. 626 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-9892-2.
9. D'Huys O, Vicente R, Erneux T, Danckaert J, Fischer I. Synchronization properties of network motifs: Influence of coupling delay and symmetry. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2008;18(3):37116. DOI: 10.1063/1.2953582.
10. Van der Sande G, Soriano MC, Fischer I, Mirasso C. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators. Physical Review E. 2008;77(5): 55202. DOI: 10.1103/PhysRevE.77.055202.
11. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of time-delay coupled pulse oscillators. Chaos, Solitons and Fractals. 2011;44(1–3):98–107. DOI: 10.1016/j.chaos.2010.12.007.
12. Klinshov VV, Nekorkin VI. Synchronization of delay-coupled oscillator networks. Physics-Uspekhi. 2013;56(12):1217–1229. DOI: 10.3367/UFNr.0183.201312c.1323.
13. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Nekorkin V. Jittering waves in rings of pulse oscillators. Physical Review E. 2016;94(1):012206. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
14. Klinshov V, Shchapin D, Yanchuk S, Wolfrum M, D'Huys O, Nekorkin V. Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring. Physical Review E. 2017;96:042217. DOI: 10.1103/PhysRevE.96.042217.
15. Yanchuk S, Perlikowski P. Delay and periodicity. Physical Review E. APS. 2009;79(4):1–9. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.046221.
16. Kashchenko SA. Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative. Differentsialnye Uravneniya. 1989;25(8):1448–1451 (in Russian).

17. Kashchenko SA. Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay. Mathematics. 2023;11(6):1301. DOI: 10.3390/math11061301.
18. Kaschenko SA. Normalization in the systems with small diffusion. Int. J. Bifurc. Chaos Appl. Sci. Eng. 1996;6:1093–1109. DOI: 10.1142/S021812749600059X.
19. Kashchenko SA. The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998;38(3):443–451.
20. Vasil'eva AB, Butuzov VF. Asymptotic Expansions of the Solutions of Singularly Perturbed Equations. Moscow: Nauka; 1973. 272 p.
21. Butuzov VF, Nefedov NN, Omel'chenko O, Recke L. Boundary layer solutions to singularly perturbed quasilinear systems. Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B. 2022;27(8): 4255–4283. DOI: 10.3934/dcdsb.2021226.
22. Nefedov NN. Development of methods of asymptotic analysis of transition layers in reaction–diffusion–advection equations: theory and applications. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021;61(12):2068–2087. DOI: 10.1134/S0965542521120095.
23. Nefedov NN, Nikulin EI. Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction-diffusion equations in the case of a rapid reaction. Russian Journal of Mathematical Physics. 2018;25(1):88–101. DOI: 10.1134/S1061920818010089.
24. Bruno AD. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Springer Series in Soviet Mathematics. Berlin: Springer-Verlag; 1989. 358 p.
25. Hartman P. Ordinary Differential Equations. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM); 2002. 642 p. DOI: 10.1137/1.9780898719222.

Кащенко Сергей Александрович — родился в Ярославле (1953). Окончил Ярославский государственный университет (1975). Доктор физико-математических наук (1989, МГУ). Профессор, директор Объединенного института математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова. Автор монографий «Модели волновой памяти» (совместно с В. В. Майоровым) и «Релаксационные колебания в лазерах» (совместно с Е. В. Григорьевой). Опубликовал более 500 научных работ и 10 монографий. Награжден почетным званием «Заслуженный деятель науки Российской Федерации» (2020) и медалью «За вклад в реализацию государственной политики в области образования и научно-технологического развития» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (2023).

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0002-8777-4302
AuthorID (eLibrary.Ru): 8238

Толбей Анна Олеговна — родилась в Ярославле (1981). Окончила Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова (2003). Кандидат физико-математических наук (2008, ЯрГУ). Работает на кафедре компьютерных сетей Ярославского государственного университета в должности доцента (факультет информатики и вычислительной техники).

Россия, 150003 Ярославль, ул. Советская, 14
Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова
E-mail: a.tolbey@uniyar.ac.ru
ORCID: 0000-0001-5668-3929
AuthorID (eLibrary.Ru): 982562