



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья
УДК 517.925 + 517.93

DOI: 10.18500/0869-6632-003137
EDN: ONIPZY

Пространственная динамика в семействе дифференциальных уравнений шестого порядка из теории структурообразования

Н. Е. Кулагин¹, Л. М. Лерман^{2,3}

¹Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН, Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

³Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Россия
E-mail: klgn@yandex.ru, lermanl@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 22.08.2024, принята к публикации 21.10.2024,
опубликована онлайн 8.11.2024

Тема работы. Изучаются ограниченные стационарные (то есть не зависящие от времени) пространственно-одномерные решения квазилинейного параболического уравнения с частными производными, рассматриваемого на всей числовой прямой. Его стационарные решения описываются нелинейным дифференциальным уравнением 6-го порядка, имеющим тип уравнения Эйлера–Лагранжа–Пуассона, и поэтому приводимого к гамильтоновой системе с тремя степенями свободы, которая также обратима относительно двух линейных инволюций. Система имеет три симметричных состояния равновесия, два из которых являются гиперболическими в некоторой области значений параметров. *Цель работы.* В работе, комбинируя методы теории динамических систем и численные методы, исследуется поведение траекторий в окрестности симметричного гетероклинического контура, основанного на этих состояниях равновесия, показано существование как простых траекторий (периодических), так и траекторий со сложным поведением. Для этого, в частности, используется теорема о глобальном инвариантном многообразии для гетероклинического контура. Для симметричного состояния равновесия в начале координат найдена область параметров, где оно является седло-фокус-центром, показано существование гомоклинических траекторий этого состояния равновесия, долго-периодических траекторий в их окрестности, а также траекторий со сложным поведением.

Ключевые слова: стационарные решения, уравнение Эйлера–Лагранжа–Пуассона, гамильтонова система, состояние равновесия, седло, седло-фокус-центр, гетероклинический контур, гомоклиническая траектория, глобальное центральное многообразие, сложная динамика.

Благодарности. Работа Н. Е. Кулагина была поддержана грантом РНФ 22-11-00027 (численные эксперименты). Л. М. Лерман благодарит РНФ за частичную поддержку по гранту 24-11-00339 (теоретические исследования около петли седло-фокус-центра). Авторы благодарят Д. В. Тураева за полезные обсуждения.

Для цитирования: Кулагин Н. Е., Лерман Л. М. Пространственная динамика в семействе дифференциальных уравнений шестого порядка из теории структурообразования // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003137. EDN: ONIPZY

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Spatial dynamics in the family of sixth-order differential equations from the theory of partial formation

N. E. Kulagin^{✉1}, *L. M. Lerman*^{2,3}

¹A. N. Frumkin Institute of Physical Chemistry and Electrochemistry RAS, Moscow, Russia

²National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

³National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: klg@yandex.ru, lermanl@mm.unn.ru

Received 22.08.2024, accepted 21.10.2024, available online 8.11.2024

Topic of the paper. Bounded stationary (i.e. independent in time) spatially one-dimensional solutions of a quasilinear parabolic PDE are studied on the whole real line. Its stationary solutions are described by a nonlinear ODE of the sixth order of the Euler–Lagrange–Poisson type and therefore can be transformed to the Hamiltonian system with three degrees of freedom being in addition reversible with respect two linear involutions. The system has three symmetric equilibria, two of them are hyperbolic in some region of the parameter plane. *Goal of the paper.* In this paper we, combining methods of dynamical systems theory and numerical simulations, investigate the orbit behavior near the symmetric heteroclinic connection based on these equilibria. It was found both simple (periodic) and complicated orbit behavior. To this end we use the theorem on a global center manifold near the heteroclinic connection. For the third symmetric equilibrium at the origin we found the region in the parameter plane where this equilibrium is of the saddle-focus-center type and found the existence of its homoclinic orbits, long-periodic orbits near homoclinic orbits and orbits with complicated structure.

Keywords: stationary solutions, Euler–Lagrange–Poisson equation, Hamiltonian system, equilibrium state, saddle, saddle-focus-center, heteroclinic connection, homoclinic orbit, global center invariant manifold, complicated dynamics.

Acknowledgements. The work by N. E. Kulagin was supported by the RSF grant 22-11-00027 (simulations). L. M. Lerman acknowledges RSF for a partial support under the grant 24-11-00339 (theoretical studies near the loop of a saddle-focus-center). The authors are thankful to D. V. Turaev for the useful discussions.

For citation: Kulagin NE, Lerman LM. Spatial dynamics in the family of sixth-order differential equations from the theory of partial formation. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(6):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003137

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

1. Уравнение

В работе изучаются ограниченные стационарные (то есть не зависящие от времени) пространственно-одномерные решения квазилинейного уравнения с частными производными параболического типа, рассматриваемого на всей прямой \mathbb{R} :

$$u_t = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + A \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u - u^3. \quad (1)$$

Это уравнение было предложено в качестве модели движения фазового фронта в материалах, где возможен переход от жидкой к твердой фазе, см. например, [1,2]. Его стационарные решения представляют несомненный интерес в связи с возможностью получения пространственных структур различного типа. Периодические стационарные решения этого уравнения в определенной области значений волновых чисел были получены с помощью вариационных методов [3] (см. также [4]). В данной работе, комбинируя методы теории динамических систем и численные методы, исследуются стационарные локализованные, периодические решения уравнения (1), а также решения этого уравнения со сложной пространственной структурой. При этом наш основной интерес направлен не на прикладную сторону полученных результатов, хотя она несомненно имеются, а на математические аспекты задачи, поскольку изучение поведения траекторий многомерных гамильтоновых систем (а наша система шестимерна) — задача недостаточно исследованная,

особенно в том, что касается поведения траекторий в окрестностях гомоклинических траекторий и гетероклинических контуров.

Уравнение для стационарных решений

$$\frac{d^6 u}{dx^6} + A \frac{d^4 u}{dx^4} + B \frac{d^2 u}{dx^2} + u - u^3 = 0 \quad (2)$$

имеет тип уравнения Эйлера–Лагранжа–Пуассона [5] и поэтому приводится к гамильтоновой системе с тремя степенями свободы заменой переменных

$$q_1 = u, \quad q_2 = u', \quad q_3 = u'', \quad p_1 = Bu' + Au''' + u^{(V)}, \quad p_2 = -Au'' - u^{(IV)}, \quad p_3 = u''''.$$

Симплектическая 2-форма в фазовом пространстве \mathbb{R}^6 в этих переменных имеет стандартный вид $\Omega = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge dq_i$, а гамильтонова система принимает вид

$$\begin{aligned} q_1' &= q_2, & p_1' &= -q_1 + q_1^3, \\ q_2' &= q_3, & p_2' &= -p_1 + Bq_2, \\ q_3' &= p_3, & p_3' &= -p_2 - Aq_3, \end{aligned} \quad (3)$$

гамильтонианом которой является многочлен четвертой степени

$$H = p_1 q_2 + p_2 q_3 + \frac{1}{2} q_1^2 - \frac{1}{2} B q_2^2 + \frac{1}{2} p_3^2 + \frac{1}{2} A q_3^2 - \frac{1}{4} q_1^4.$$

Полученное гамильтоново векторное поле v_H в \mathbb{R}^6 инвариантно относительно центральной симметрии $C : (q, p) \mapsto -(q, p)$ и также является обратимым относительно двух линейных инволюций

$$\begin{aligned} L_1 &: (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \rightarrow (q_1, -q_2, q_3, -p_1, p_2, -p_3), \\ L_2 &: (q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) \rightarrow (-q_1, q_2, -q_3, p_1, -p_2, p_3), \end{aligned}$$

то есть $L_i v_H = -v \circ L_i$, где L_i , $i = 1, 2$, матрицы, задающие координатное представление инволюций. Эти инволюции являются антисимплектическими, то есть $L_i^* \Omega = -\Omega$, $L_i^* \Omega(\xi, \eta) = \Omega(L_i(\xi), L_i(\eta))$ для любых касательных векторов $\xi, \eta \in T_x \mathbb{R}^6$.

Состояние равновесия O системы в начале координат является симметричным относительно обеих инволюций, то есть принадлежит множеству неподвижных точек $Fix(L_i)$ обеих инволюций, являющихся трехмерными плоскостями $q_2 = p_1 = p_3 = 0$ (для L_1) и $q_1 = q_3 = p_2 = 0$ (для L_2). Характеристическое уравнение для этого состояния равновесия имеет вид

$$\lambda^6 + A\lambda^4 + B\lambda^2 + 1 = 0. \quad (4)$$

Соответствующее ему кубическое уравнение $s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0$, $s = \lambda^2$ всегда имеет вещественный отрицательный корень, остальные два корня в общем случае могут быть либо действительной, либо комплексно-сопряженной парой. В случае действительной пары возможны два случая: оба корня положительны или оба корня отрицательны. В случае пары положительных корней характеристическое уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней и две пары действительных корней разных знаков. В этом случае состояние равновесия O называется седло-центром [6]. В случае пары отрицательных действительных корней кубического уравнения характеристическое уравнение имеет три пары чисто мнимых корней, то есть состояние равновесия O будет эллиптическим.

Ниже нас будет интересовать в основном случай, когда характеристическое уравнение (4) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega$ и комплексную четверку $\pm \alpha \pm i\beta$, $\omega\alpha\beta \neq 0$. В этом случае состояние равновесия O называется седло-фокус-центром [6]. Для кубического уравнения

это означает наличие, кроме одного отрицательного корня, еще пары комплексно-сопряженных корней. Структура траекторий в окрестности такого состояния равновесия будет описана ниже.

Система уравнений (3) имеет еще два состояния равновесия P_{\pm} с координатами $q_1 = \pm 1$, а остальные координаты нулевые, образующие симметричную относительно инволюции L_2 пару. Каждое из этих состояний равновесия симметрично относительно инволюции L_1 , и оба лежат в уровне гамильтониана $H = 1/4$. Они переставляются инволюцией L_2 , в них матрица линеаризации имеет характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + A\lambda^4 + B\lambda^2 - 2 = 0.$$

Здесь интересным для нас является случай, когда эти состояния равновесия являются седлами (три пары действительных ненулевых собственных значений $\pm\lambda_k$, $k = 1 - 3$) или седло-фокус-седлами (комплексная четверка и пара ненулевых действительных). Такие состояния равновесия имеют трехмерные устойчивые и неустойчивые многообразия, которые при продолжении могут пересекаться в пятимерном уровне гамильтониана $H = 1/4$ трансверсально, образуя трансверсальные гомо- и гетероклинические траектории, связывающие состояния равновесия P_{\pm} . В частности, гетероклинические траектории соответствуют стационарным решениям типа фронта (раздела фаз) для исходного уравнения с частными производными.

В случае существования гетероклинической траектории, ввиду действия инволюции L_1 , вместе с гетероклинической траекторией, идущей от P_- к P_+ , имеется симметричная ей гетероклиническая траектория, идущая от P_+ к P_- , то есть образуется симметричный гетероклинический контур, составленный из этих состояний равновесия и симметричной пары гетероклинических траекторий. Сами гетероклинические траектории при этом могут быть как симметричными относительно инволюции L_2 , так и несимметричными. В первом случае контур является инвариантным относительно обеих инволюций и структурно-устойчивым относительно возмущений в классе систем, сохраняющих обе инволюции, а во втором случае его существование означает структурную неустойчивость коразмерности один в классе систем, обратимых относительно инволюции L_1 . Наличие контура в случае, когда ведущее неустойчивое многообразие (см. ниже) двумерно и соответствует паре комплексно-сопряженных корней (седло-фокус в терминологии Шильникова [7]), дает богатую динамику в окрестности такого контура, которая частично была исследована для случая обратимой четырехмерной системы в [8]. Случай одномерного ведущего многообразия соответствует седлу, и здесь в окрестности контура ожидается наличие однопараметрического семейства симметричных относительно L_1, L_2 периодических траекторий, накапливающихся к контуру [9].

Отметим, что для состояния равновесия типа седло-фокус-седло $\pm\lambda_1, \pm\alpha \pm i\beta, \lambda_1\alpha\beta \neq 0$ имеет место разное локальное поведение траекторий в зависимости от того, какое из направлений является неустойчивым ведущим: двумерное, соответствующее паре комплексно-сопряженных корней с положительными реальными частями, или одномерное, соответствующее действительному положительному корню. При этом, не ограничивая общности, мы считаем, что $\lambda_1 > 0, \alpha > 0$. От этого зависит поведение траекторий на локальном неустойчивом $W^u(P_-)$ (и устойчивом $W^s(P_-)$) многообразии: если $\lambda_1 < \alpha$ (ведущее многообразие одномерно), то почти все траектории на $W^u(P_-)$ при $x \rightarrow -\infty$ стремятся к P_- , касаясь одномерного ведущего направления, собственного для λ_1 , в этом случае неведущее неустойчивое многообразие $W^{uu}(P_-)$ двумерно, а если $\lambda_1 > \alpha$, то неведущее неустойчивое многообразие одномерно, а остальные полутраектории стремятся к состоянию равновесия при $x \rightarrow -\infty$, касаясь двумерного ведущего направления, соответствующего паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$. Это поведение сильно влияет на поведение траекторий в окрестности гомоклинических траекторий к этому состоянию равновесия или контуру, составленному из таких состояний равновесия и гетероклинических траекторий.

Состояние равновесия типа седло-фокус-центр имеет гладкие двумерные локальные устойчивое и неустойчивое многообразия W^s, W^u , гладкое двумерное симплектическое центральное

многообразие W^c , заполненное ляпуновскими периодическими траекториями, а также центрально-устойчивое и центрально-неустойчивое локальные четырехмерные многообразия W^{cs}, W^{cu} , состоящие из полутраекторий, которые асимптотически стремятся к одной из ляпуновских периодических траекторий при $x \mapsto \infty$ или $x \mapsto -\infty$ соответственно. Неустойчивое многообразие $W^u(O)$ принадлежит пятимерному уровню гамильтониана $H = H(O) = 0$ и при продолжении вдоль потока системы может пересекать устойчивое многообразие $W^s(O)$, образуя тем самым гомоклиническую траекторию Γ седло-фокус-центра O . Предположим, что такая траектория существует и является симметричной (численные исследования подтверждают этот факт, см. ниже рис. 7). Тогда она пересекает множество $Fix(L_1)$ в точке m , отличной от начала координат и ее траектория инвариантна относительно действия инволюции L_1 . Существование гомоклинической траектории Γ_1 , инвариантной относительно инволюции L_1 , приводит к существованию еще одной гомоклинической траектории $\Gamma_2 = L_2(\Gamma_1)$. Таким образом, в этой задаче гомоклинические траектории к O всегда образуют «восьмерки» и даже могут образовывать так называемые сети (*networks*) [10], а значит, возможны гомоклинические и периодические траектории, обходящие одну или обе петли «восьмерки» много раз.

Наличие гомоклинической траектории седло-фокус-центра является явлением коразмерности два в классе гладких гамильтонианов. Действительно, рассмотрим пятимерную секущую N к гомоклинической траектории в некоторой ее точке m . Пятимерный уровень гамильтониана $H = H(O)$ пересекает N трансверсально по четырехмерному гладкому подмногообразию V_0 , а два двумерных подмногообразия W^s, W^u пересекают V_0 по двум гладким кривым. Если система общим образом зависит от двух параметров, то в шестимерном пространстве $V_0 \times \mathbb{R}^2$ получим два трехмерных подмногообразия, полученных продолжением следов W^s, W^u по параметрам, которые могут пересекаться трансверсально в точке $m \times \mathbb{R}^2$.

Гомоклинические траектории к седло-фокус-центру изучались как один из случаев в работе [6], где было доказано, что при некотором условии общего положения в окрестности гомоклинической траектории все ляпуновские периодические траектории (они седловые в соответствующем уровне гамильтониана) имеют каждая по 4 трансверсальных гомоклинических траектории, то есть система имеет сложную динамику на соответствующем уровне гамильтониана. Тем не менее мы хотим показать, что при переходе на близкие некритические уровни гамильтониана система имеет 2-эллиптические периодические траектории, то есть регулярная динамика частично восстанавливается.

2. О границе допустимой области

Рассмотрим систему (3) при значениях параметров (A, B) из области G плоскости, в которой многочлен

$$f(s) = s^3 + As^2 + Bs + 1,$$

полученный из характеристического многочлена для состояния равновесия O , имеет один действительный отрицательный корень и пару комплексно-сопряженных корней. Уравнение всегда имеет отрицательный корень, поскольку $f(0) = 1$ и f отрицательно при больших по модулю отрицательных s .

Обозначим через $g(s)$ производную $g(s) = f'(s) = 3s^2 + 2As + B$. Условие монотонности $g'(s) > 0$ выделяет часть области G , расположенную выше параболы $A^2 - 3B = 0$, включая ее. В дополнительной части, где $A^2 - 3B > 0$, уравнение $g(s) = 0$ имеет два различных действительных корня s_1, s_2 , $s_1 < s_2$, в которых достигаются локальный максимум s_1 и локальный минимум s_2 функции f . Теперь оставшаяся часть области G определяется тем условием, что на отрезке $[s_1, s_2]$ функция $f(s) \neq 0$, то есть $f(s_1)f(s_2) > 0$. Следовательно, граница области, дополняющей G , определяется условием $f(s_1)f(s_2) = 0$, означающим, что функция f и ее производная g имеют общий корень. Это есть условие существования кратного корня многочлена $f(s)$,

то есть частью границы области G является связная компонента кривой, соответствующая кратным корням уравнения. Найдем ее. Система уравнений

$$s^3 + As^2 + Bs + 1 = 0, \quad 3s^2 + 2As + B = 0$$

после исключения s определяет кривую. Поэтому, вычисляя результат этих многочленов, получаем уравнение границы области G : $A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0$. Полученная кривая симметрична относительно диагонали $A = B$. Четыре точки на этой кривой легко находятся: $(-1, -1)$, $(0, b_0) = (0, -3/\sqrt[3]{4}) \approx (0, -1.88988)$, $(b_0, 0)$ и $(3, 3)$. В последней точке кривая имеет острие и соответствует трехкратному корню $\lambda = -1$.

На границе области G (красная кривая на рис. 1) уравнение $f(s) = 0$ имеет три действительных корня: двукратный $s_{1,2} = \tau$ и, по формуле Виета, отрицательный $s_3 = -1/\tau^2$. Следовательно,

$$f(s) = (s - \tau)^2 \left(s + \frac{1}{\tau^2} \right) = s^3 + \left(\frac{1}{\tau^2} - 2\tau \right) s^2 + \left(\tau^2 - \frac{2}{\tau} \right) s + 1,$$

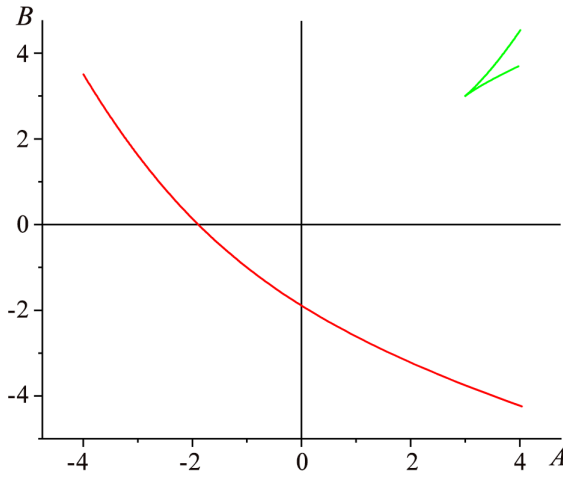


Рис. 1. Область G на плоскости (A, B) (цвет онлайн)

Fig. 1. Region G on the plane (A, B) (color online)

откуда $A = 1/\tau^2 - 2\tau$, $B = \tau^2 - 2/\tau$, то есть получаем параметрическое задание кривой. На рис. 1 видно, что вне G лежит область, ограниченная кривой типа полукубической параболы с острием в точке $A = 3, B = 3$, для значений (A, B) внутри которой кубическое уравнение имеет три отрицательных корня и ее нужно исключить из области G .

При значении параметров $(A, B) = (3, 3)$ состояние равновесия O имеет пару трехкратных собственных значений $\pm i$ с трехмерной клеткой жордановой нормальной формы. К этой точке примыкает клинообразная область, ограниченная кривой, на которой кубический полином $f(s)$ имеет простой и двукратный отрицательные корни.

При $(A, B) = (3, 3)$ в окрестности состояния равновесия O гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, имеющего пару трехкратных ненулевых собственных значений $\pm i\omega$ с жордановым (3×3) -блоком, квадратичную часть его гамильтониана, зависящего общим образом от двух параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, можно привести к следующему виду [11]:

$$H_2 = -(p_1q_2 + p_2q_3) \pm \omega(p_1p_3 + q_1q_3) \mp \frac{\omega}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \frac{\varepsilon_1}{2}q_1^2 + \varepsilon_2p_2q_1.$$

Характеристическое уравнение соответствующей линейной системы имеет вид (при выборе верхних знаков; при выборе нижних знаков нужно поменять $\omega \rightarrow -\omega$)

$$P(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \lambda^6 + (3\omega^2 + \varepsilon_2)\lambda^4 + (3\omega^4 + 3\varepsilon_1\omega + \varepsilon_2^2)\lambda^2 + (\omega^6 - 2\varepsilon_2\omega^4 - \varepsilon_1\omega^3) = 0.$$

Двупараметрическая бифуркация гамильтоновой системы с тремя степенями свободы в окрестности такого состояния равновесия пока не изучена, случай двух степеней свободы и состояния равновесия, имеющего при критическом значении параметров состояние равновесия с парой двукратных ненулевых чисто мнимых собственных значений, достаточно хорошо изучен, и эта бифуркация называется гамильтоновой бифуркацией Хопфа [12–14], а в случае обратимой системы — обратимой бифуркацией Хопфа [15].

Для состояний равновесия P_{\pm} соответствующее кубическое уравнение имеет вид $Q(s) = s^3 + As^2 + Bs - 2 = 0$. Случаи, когда боковые состояния равновесия гиперболические, то есть имеют собственные значения с ненулевыми реальными частями, соответствуют тем A, B , при которых кубическое уравнение имеет либо все корни положительные, либо один положительный и пару комплексно-сопряженных корней. Рассматриваемое кубическое уравнение всегда имеет по крайней мере один положительный корень, так как $Q(0) = -2 < 0$, но $Q(s) > 0$ при достаточно больших $s > 0$. Рассмотрим бифуркационную кривую кратных корней $Q(s) = 0, Q'(s) = 0$. Вычисляя результат многочленов Q, Q' , получаем кривую $A^2B^2 + 8A^3 - 4B^3 - 36AB - 108 = 0$. Эта кривая состоит из двух компонент, имеет острие в точке $A = -3\sqrt[3]{2}, B = 3\sqrt[3]{4}$, соответствующий тройной корень кубического уравнения равен $\sqrt[3]{2}$. В области между двумя компонентами полученной кривой все корни кубического уравнения имеют ненулевые действительные части, то есть оба состояния равновесия P_{\pm} гиперболически. Кроме того, важно построить кривую $\lambda_1 = \alpha$, при переходе через которую ведущие многообразия меняют размерность (зеленая кривая на рис. 2). Ниже этой кривой ведущее многообразие двумерно, а выше – одномерно.

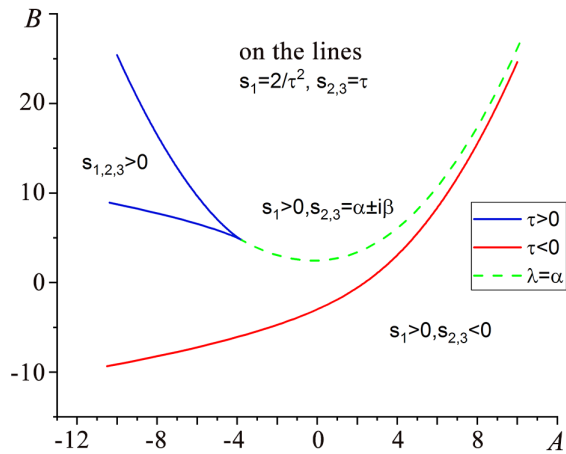


Рис. 2. Бифуркационные кривые для полинома Q (цвет онлайн)

Fig. 2. Bifurcation curves for polynomial Q (color online)

Эта кривая состоит из двух компонент, имеет острие в точке $A = -3\sqrt[3]{2}, B = 3\sqrt[3]{4}$, соответствующий тройной корень кубического уравнения равен $\sqrt[3]{2}$. В области между двумя компонентами полученной кривой все корни кубического уравнения имеют ненулевые действительные части, то есть оба состояния равновесия P_{\pm} гиперболически. Кроме того, важно построить кривую $\lambda_1 = \alpha$, при переходе через которую ведущие многообразия меняют размерность (зеленая кривая на рис. 2). Ниже этой кривой ведущее многообразие двумерно, а выше – одномерно.

3. Гетероклинические контуры и периодические траектории

В этом разделе мы изучим существование у системы (3) симметричных гетероклинических контуров. Существование таких контуров подтверждается численно (см. рис. 3–4). Именно, удается найти их как в случае седла, так и в случае седло-фокус-седла.

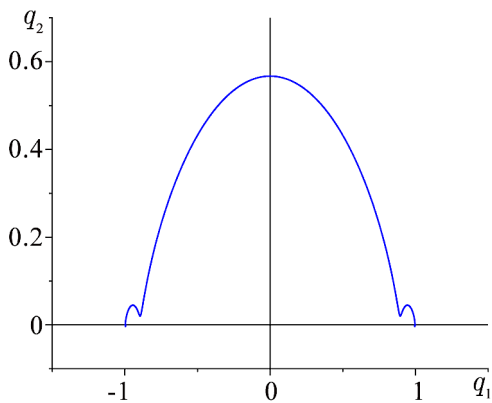


Рис. 3. Проекция на плоскость q_1-q_2 симметричной гетероклинической траектории седло-фокус-седла при двумерном ведущем направлении

Fig. 3. Projection on the plane q_1-q_2 of symmetric heteroclinic orbit of the saddle-focus-saddle when leading direction is two-dimensional

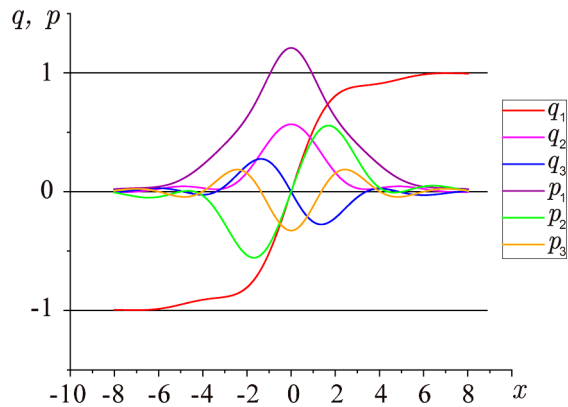


Рис. 4. Развертки симметричной гетероклинической траектории седло-фокус-седла (цвет онлайн)

Fig. 4. Unfoldings of a symmetric heteroclinic orbit of the saddle-focus-center (color online)

Для этого в силу L_1 -симметрии достаточно найти одну гетероклиническую траекторию, вторая будет существовать в силу L_1 -обратимости системы и симметричности состояний равновесия. При рассмотрении этих случаев следует учесть наличие, при некоторых условиях общего положения, инвариантного глобального центрального многообразия в окрестности контура, что сводит рассмотрение динамики системы в окрестности контура к изучению системы либо с одной, либо с двумя степенями свободы в окрестности трансверсального контура, составленного из двух седел или, соответственно, двух седло-фокусов и двух симметрично связанных гетероклинических траекторий к этим состояниям равновесия. Для понимания ситуации напомним соответствующую теорему о существовании глобального центрального многообразия в окрестности гомоклинической траектории к седловому состоянию равновесия [16–19]. Для этого нужно напомнить понятия расширенного неустойчивого многообразия и сильно устойчивого слоения для седлового состояния равновесия векторного поля [19].

Пусть v — гладкое векторное поле на гладком многообразии M и p — его седловое состояние равновесия, то есть $v(p) = 0$, и матрица A линеаризации векторного поля в точке p имеет спектр собственных значений, состоящий из двух непустых множеств $Spec(A) = \sigma_s \cup \sigma_u$, где собственные значения из σ_s имеют отрицательные реальные части, а собственные значения из σ_u имеют положительные реальные части. Тогда в некоторой окрестности U этого состояния равновесия имеются два гладких инвариантных подмногообразия $W^s(p)$, $W^u(p)$, содержащие те и только те полутраектории, которые стремятся к p при $t \rightarrow \infty$ (для $W^s(p)$) и $t \rightarrow -\infty$ (для $W^u(p)$). Все остальные траектории покидают U в обе стороны по времени. Во множествах σ_s , σ_u выделяются так называемые ведущие собственные значения, лежащие ближе остальных к мнимой оси. В общем случае ведущими собственными значениями являются либо простое действительное число, либо пара комплексно-сопряженных собственных значений. Мы предполагаем это выполненным. Тогда оставшая часть множества σ_s (или σ_u) называется неведущими собственными значениями и обозначается σ_{ss} или соответственно σ_{uu} . В случае гамильтонова векторного поля или обратимого векторного поля и его симметричного состояния равновесия, ввиду симметрии их собственных значений $\lambda \rightarrow -\lambda$, разбиения спектра на ведущие и неведущие части для σ_s и σ_u одинаковы.

Неведущие и ведущие части спектра порождают дополнительные инвариантные многообразия в окрестности точки p . Именно, существует гладкое (той же гладкости, что и правые части системы) инвариантное сильно устойчивое многообразие W^{ss} , положительные полутраектории на котором стремятся к p как $\exp[-\gamma t]$, где $\gamma = \min\{Re\lambda_i, \lambda_i \in \sigma_{ss}\}$. Более того, на устойчивом многообразии существует гладкое слоение, являющееся инвариантным в следующем смысле: сдвиг слоя вдоль потока системы на одно и то же время дает слой того же слоения. Одним из слоев (неподвижным) этого слоения является сильно устойчивое многообразие.

Ведущая часть спектра σ_s задает ведущее C^1 -гладкое многообразие W^l -размерности либо единица, либо два, причем все положительные полутраектории из W^s стремятся к p таким образом, что направления их касательных векторов стремятся к ведущему направлению (одномерному или двумерному). В окрестности U также определяется так называемое расширенное неустойчивое инвариантное многообразие W^{ue} гладкости $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, которое содержит W^u , ведущее многообразие и в точке p касательное к W^{ue} пространство является прямой суммой $T_p W^u \oplus T_p W^l$. Многообразие W^{ue} , вообще говоря, неединственно, но все такие многообразия в точках многообразия W^u имеют одинаковые касательные пространства.

Предположим теперь, что система имеет гомоклиническую траекторию Γ седлового состояния равновесия p , которая при стремлении к p не лежит в сильно устойчивом и сильно неустойчивом многообразиях. Кроме того, предположим выполнение следующего условия трансверсальности: *продолженное потоком многообразие W^{ue} пересекает слои сильно устойчивого слоения трансверсально*. Отметим, что размерности соответствующих подмногообразий дополнены, так что такое предположение есть условие общего типа в классе систем с гомоклинической

траекторией. В этом случае справедлива следующая теорема о глобальном центральном многообразии в окрестности гомоклинической траектории [16–19].

Теорема 1. Пусть оба ведущих многообразия (устойчивое и неустойчивое) одномерны и выполнены условия трансверсальности для W^{se} , W^{ue} . Тогда существует такая окрестность \mathcal{V} гомоклинической петли $\bar{\Gamma}$, в которой имеется $C^{1+\varepsilon}$ -гладкое инвариантное глобальное центральное двумерное подмногообразие \mathcal{W}^c , содержащее петлю. Все траектории из окрестности \mathcal{V} , которые не принадлежат \mathcal{V} , выходят из окрестности в обе стороны по времени. Многообразие \mathcal{W}^c в точке p касается двумерного подпространства, натянутого на устойчивое и неустойчивое ведущие подпространства. Если оба ведущих многообразия двумерны и выполнены оба условия трансверсальности, то глобальное центральное многообразие \mathcal{W}^c четырехмерно, в точке p оно касается четырехмерного подпространства, являющегося прямой суммой двумерных устойчивых и неустойчивых ведущих подпространств. Все траектории окрестности \mathcal{V} , не лежащие на \mathcal{W}^c , покидают окрестность в обе стороны по времени.

Теорема о глобальном центральном многообразии справедлива и в окрестности гетероклинического контура, если соответствующие условия выполнены для каждой гетероклинической траектории, соединяющей смежные пары седел [19].

Теперь вернемся к системе (3) и рассмотрим контур из пары симметричных седел P_-, P_+ и пары связывающих их гетероклинических траекторий $\Gamma_1, \Gamma_2 = L_1(\Gamma_1)$. Предположим, что Γ_1 симметрична относительно инволюции L_2 и вдоль нее $W^u(P_-), W^s(P_+)$ пересекаются трансверсально в уровне гамильтониана $H = 1/4$.

Предположим, что Γ_1 выходит из P_- , касаясь ведущего неустойчивого многообразия, которое, в зависимости от параметров A, B , может быть либо одномерным (ведущее собственное значение действительно), либо двумерным (ведущими являются пара комплексно-сопряженных собственных значений с положительными реальными частями). Ввиду симметричности седел относительно инволюции L_1 их перестановочности инволюцией L_2 , оба седла имеют одновременно либо одномерные, либо двумерные ведущие устойчивые и неустойчивые направления, а гетероклиническая траектория Γ_1 входит в P_+ , также касаясь ведущего направления, то есть она не лежит на сильно устойчивом слое.

Продолжим потоком инвариантное расширенное локальное неустойчивое многообразие $W^{ue}(P_-)$ седла P_- , которое имеет размерность либо четыре, если ведущее направление одномерно, либо пять, если ведущее направление двумерно, а размерность слоев сильно устойчивых слоений будет равна двум в первом случае и единице во втором. Будем считать выполненным условие трансверсальности пересечений $W^{ue}(P_-)$ со слоями сильно устойчивого слоения и $W^{se}(P_+)$ со слоями сильно неустойчивого слоения точки P_- . Тогда эти же условия трансверсальности будут выполняться и для Γ_2 . В этом случае в окрестности контура справедлива

Теорема 2. Если ведущие направления седла в точке P_- одномерны, то глобальное центральное двумерное многообразие \mathcal{W}^c , существующее в окрестности контура, является двумерным симплектическим подмногообразием класса $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, и содержит контур из двух седел и однопараметрическое семейство периодических траекторий, накапливающихся к контуру.

Если ведущие направления седла в точке P_- двумерны, то глобальное центральное инвариантное многообразие, существующее в окрестности контура, является четырехмерным симплектическим подмногообразием класса $C^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, и содержит контур из двух седло-фокусов и двух трансверсальных гетероклинических траекторий $\Gamma_1, \Gamma_2 = L_1(\Gamma_1)$ и однопараметрическое семейство периодических траекторий, накапливающихся к контуру. Окрестность контура содержит также гиперболическое инвариантное множество. Простым критерием для обнаружения такой динамики является наличие k -обходных гомоклинических траекторий седло-фокус-седла при $k \geq 1$.

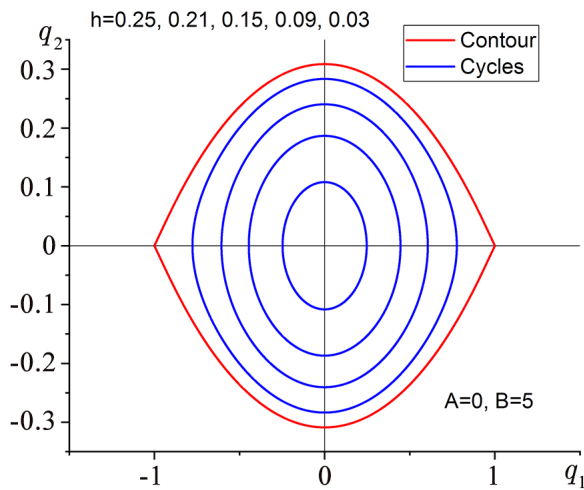


Рис. 5. Гетероклинический контур и примыкающее к нему однопараметрическое семейство периодических траекторий, $A = 0$, $B = 5$, ведущее направление одномерно (цвет онлайн)

Fig. 5. Heteroclinic connection and adjoining one-parametric family of periodic orbits: $A = 0$, $B = 5$, leading direction is one-dimensional (color online)

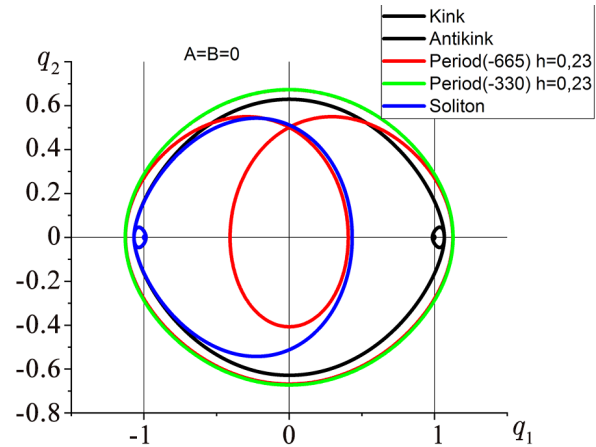


Рис. 6. Гетероклинический контур, гомоклинические и периодические траектории, $A = 0$, $B = 0$, ведущее направление двумерно (цвет онлайн)

Fig. 6. Heteroclinic connection, homoclinic and periodic orbits: $A = 0$, $B = 0$, leading direction is two-dimensional (color online)

Поведение в случае одномерного ведущего неустойчивого направления иллюстрируется рис. 5, где ясно видно однопараметрическое семейство периодических траекторий, параметром является значение гамильтониана $H = h$. Интересно отметить и это подтверждается численным счетом, что в рассматриваемой задаче уменьшение значения гамильтониана от $h = 1/4$ (уровень контура) до нуля — уровня, на котором лежит O , семейство периодических траекторий около контура сливается с ляпуновским семейством коротко-периодических траекторий около седло-фокус-центра O .

Численно сложная динамика в случае двумерного ведущего направления подтверждается обнаружением гомоклинических траекторий к каждому из P_{\pm} , а также наличием достаточно сложных (многообходных) периодических траекторий в окрестности такого контура (см. рис. 6). Частично эти результаты могут быть получены из работы [20], но далеко не все. Дело в том, что недостаточная гладкость многообразия \mathcal{W}^c не позволяет использовать бифуркационные результаты работы, так как они требуют достаточно большой гладкости. Тем не менее можно гарантировать, что все траектории, целиком лежащие в окрестности \mathcal{V} , принадлежат многообразию \mathcal{W}^c .

4. Нормальная форма в окрестности седло-фокус-центра

Для понимания динамики, связанной с окрестностью гомоклинической траектории седло-фокус-центра, рассмотрим гладкую гамильтонову систему $\dot{X} = I\nabla H$ с тремя степенями свободы, имеющую состояние равновесия p типа седло-фокус-центр. Это означает, что собственными значениями матрицы линеаризованной системы в состоянии равновесия $ID^2H(p)$ являются четверка комплексных чисел $\pm\alpha \pm i\beta$ и пара чисто мнимых $\pm i\omega$. Для определенности будем считать, что $\alpha > 0$ и $H(p) = 0$. Такое состояние равновесия является грубым в пространстве гладких гамильтонианов (сохраняется при малых гладких возмущениях гамильтониана).

Локальная структура такого состояния равновесия понятна и вытекает из структуры линеаризованной системы и теоремы о центральном многообразии. Во-первых, имеется гладкое

инвариантное двумерное центральное многообразие W^c , отвечающее чисто мнимым собственным значениям. Оно является симплектическим и заполнено периодическими траекториями (ляпуновское семейство), каждая из которых лежит на своем уровне гамильтониана $H = c$, причем при значениях c одного знака. Имеются также два гладких локальных подмногообразия размерности четыре: центрально-устойчивое W^{cs} и центрально-неустойчивое W^{cu} . Эти многообразия трансверсально пересекаются по центральному многообразию $W^{cs} \cap W^{cu} = W^c$. Само W^{cs} расслоено уровнями $H = c$ на трехмерные цилиндры, топологически эквивалентные $S^1 \times D^2$ (D^2 — двумерный диск), являющиеся устойчивыми многообразиями ляпуновских седловых периодических траекторий на W^c . Соответственно, W^{cu} расслоено уровнями $H = c$ на трехмерные цилиндры, топологически эквивалентные $S^1 \times D^2$, являющиеся неустойчивыми многообразиями ляпуновских седловых периодических траекторий на W^c . В пределе $c \rightarrow 0$ устойчивое многообразие седловой периодической траектории стягивается к $W^s(p)$ — двумерному устойчивому многообразию состояния равновесия, гладкому диску. Аналогично получаем $W^u(p)$. Траектории, не лежащие на $W^{cs} \cup W^{cu}$, выходят из окрестности точки p в обе стороны по времени (напомним, что в нашем случае «время» — это пространственная координата x).

Теперь продолжим двумерное многообразие $W^u(p)$ по траекториям потока. В пятимерном уровне $H = H(p)$ возможна ситуация, когда $W^u(p)$ и $W^s(p)$ пересекаются по некоторой траектории — гомоклинической траектории Γ точки p . В общем случае это случай коразмерности два: в уровне $H = H(p)$ на четырехмерной секущей к траектории Γ две гладкие кривые — следы $W^u(p)$ и $W^s(p)$ — пересекаются без касания. Поведение траекторий системы в окрестности гомоклинической траектории Γ — интересная, трудная и малоизученная задача. Некоторые результаты здесь были получены в [6], где было доказано следующая теорема.

Теорема 3. *При выполнении некоторого условия общего положения на линеаризованную на траектории Γ систему, каждая ляпуновская периодическая траектория γ_c , лежащая в уровне $H = c$, имеет 4 трансверсальные гомоклинические траектории Пуанкаре.*

Понятно, что наличие трансверсальных гомоклинических траекторий в уровне $H = c$ приводит к сложной динамике поведения траекторий в окрестности Γ . Отметим, что эта теорема ничего не говорит о поведении траекторий системы в особом уровне гамильтониана $H = H(p)$.

С другой стороны, некоторым аналогом данной задачи является задача об изучении поведения траекторий в окрестности гомоклинической траектории седло-фокуса в системе с двумя степенями свободы, изучавшаяся в работах [21–24]. В частности, в [23, 24] было доказано существование интервалов значений гамильтониана, накапливающихся к значению, соответствующему петле, у которых на соответствующем уровне гамильтониана имеются эллиптические периодические траектории. Возникает аналогичный вопрос о существовании 2-эллиптических периодических траекторий в рассматриваемом случае петли седло-фокус-центра. 2-эллиптичность периодической траектории, лежащей в соответствующем уровне гамильтониана, означает, что ее 4 мультипликатора лежат на единичной окружности. Отметим, что имеющаяся на этот счет теорема Тураева [25] о размерности инвариантных множеств в окрестности сепаратрисных связей не запрещает такое существование, так как в отличие от случая седло-центра здесь нет глобального центрального многообразия размерности четыре в окрестности петли. Наличие такого многообразия не позволяло бы существование 2-эллиптических периодических траекторий в окрестности Γ .

Для изучения поведения траекторий системы в окрестности гомоклинической траектории Γ нужно построить и изучить отображение Пуанкаре на секущих к Γ в окрестности точки p (локальное, глобальное и их суперпозицию), которое зависит от параметра c и показать, в частности, справедливость следующей гипотезы: *при выполнении некоторого условия общего положения на систему с гомоклинической траекторией существуют интервалы значений c , накапливающиеся к нулю, которым соответствуют уровни гамильтониана, содержащие 2-эллиптические периодические траектории системы.*

Если эта гипотеза справедлива, то это бы означало, что, несмотря на сложное поведение системы, в некоторых частях фазового пространства существует регулярная динамика, связанная с существованием КАМ-торов около 2-эллиптических траекторий.

Для начала исследования предположим сначала, что в окрестности точки p система линейна, то есть определяется квадратичным гамильтонианом

$$H = \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) + \beta(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{\omega}{2}(x_3^2 + y_3^2).$$

Отметим, что в отличие от случая седло-центра и седло-фокуса для аналитических систем с двумя степенями свободы, здесь нет аналога теоремы Мозера об интегрируемой нормальной форме, так как здесь могут быть резонансы вида $n\beta + m\omega = 0$ (кроме неустранимых). В дальнейшем будем предполагать, что отсутствуют так называемые сильные резонансы, то есть нет соотношений $n\beta + m\omega = 0$ с $|m| + |n| \leq 4$. Тогда нормальная форма гамильтониана до членов четвертого порядка включительно выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} H_4 &= \alpha X + \beta Y + \omega R + F(X, Y, R), \\ X &= x_1y_1 + x_2y_2, \quad Y = x_1y_2 - x_2y_1, \quad R = \frac{1}{2}(x_3^2 + y_3^2), \end{aligned} \tag{5}$$

где F — однородный многочлен второй степени по переменным X, Y, R , и H_4 является интегрируемым гамильтонианом с дополнительными интегралами Y, R . Мы будем использовать этот локальный вид гамильтониана в дальнейшем.

Поиск 2-эллиптических периодических траекторий в этой задаче не является единственной целью. Изучение других особенностей ее динамики — еще более интересная задача.

В дальнейшем дополнительно предполагается, как это имеет место в случае системы (3), что рассматриваемая гамильтонова система обратима относительно антисимплектической инволюции $L : M \rightarrow M$, $L^*\omega = -\omega$. Множество ее неподвижных точек $Fix(L)$ будем предполагать гладким трехмерным подмногообразием, в случае системы (3) — это трехмерная плоскость. Инволюция переставляет устойчивое и неустойчивое многообразия седло-фокус-центра, а ляпуновские периодические траектории являются симметричными. В такой системе могут существовать симметричные гомоклинические траектории седло-фокус-центра, такая траектория пересекает множество $Fix(L)$ в одной точке, которая разбивает ее на две симметричные части. Около симметричных гомоклинических траекторий седло-фокус-центра могут существовать симметричные периодические траектории. Такая траектория пересекает множество $Fix(L)$ ровно в двух точках через полпериода этой траектории. На этом геометрическом свойстве основан поиск таких траекторий.

Предположим, что симметричная гомоклиническая траектория Γ седло-фокус-центра существует. В системе (3) она находится численно (см. рис. 7, 8). Более того, поскольку система обратима относительно двух инволюций, то могут существовать гомоклинические траектории, симметричные относительно одной инволюции, и гомоклинические траектории, инвариантные относительно другой инволюции. В данной системе оба типа таких траекторий были найдены численно (см. рис. 7, 8).

Рассмотрим взаимное расположение множества $Fix(L)$ и секущей N в окрестности точки $m = Fix(L) \cap \Gamma$. Вектор $v(m)$ трансверсален N и, в силу обратимости, является собственным вектором, соответствующим собственному значению -1 , оператора DL в пространстве T_mM : $DLv(m) = -v(L(m)) = -v(m)$. Вектор $v(m)$ лежит в касательном пространстве T_mV_p , $V_p = \{H = H(p)\}$. Секущую N в окрестности точки m всегда можно выбрать так, чтобы она была инвариантна относительно действия инволюции L и содержала достаточно малый диск из $Fix(L)$, являющийся окрестностью точки m . Секущая N гладко расслоена уровнями $H = c$

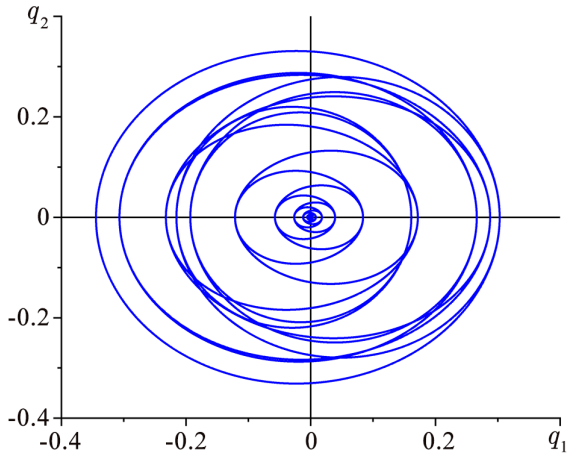


Рис. 7. Проекция L_1 -симметричной гомоклинической траектории седло-фокус-центра на плоскость q_1 - q_2 при $A = 3.088784862$, $B = 3.046013567$

Fig. 7. Projection of a L_1 -symmetric homoclinic orbit of the saddle-focus-center onto the plane q_1 - q_2 at $A = 3.088784862$, $B = 3.046013567$

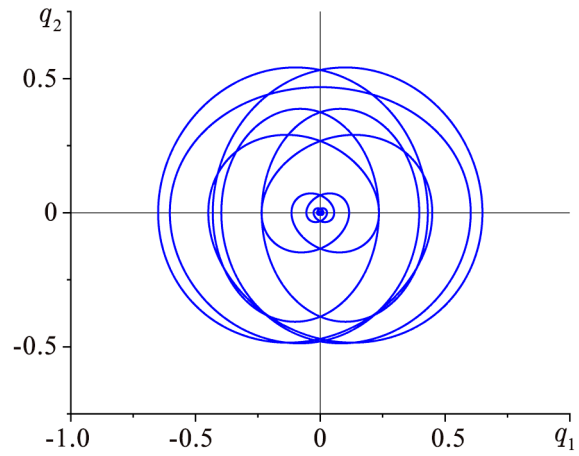


Рис. 8. Проекция L_2 -симметричной гомоклинической траектории седло-фокус-центра на плоскость q_1 - q_2 при $A = 3.2$, $B = 3$

Fig. 8. Projection of a L_2 -symmetric homoclinic orbit of the saddle-focus-center onto the plane q_1 - q_2 at $A = 3.2$, $B = 3$

на четырехмерные диски N_c , одним из которых является диск N_0 , соответствующий уровню V_p . Будем также предполагать трансверсальность пересечения подмногообразий $Fix(L)$ и $H = c$ в точке m , а поэтому и при малых $|c - H(p)|$. Тогда такое пересечение является двумерным диском и 3-диск $Fix(L)$ расслоен этими двумерными дисками.

В 4-диске N_0 лежит гладкая кривая l_u — след неустойчивого многообразия $W^u(p)$. Будем предполагать, что пересечение в точке m этой кривой и 3-мерного диска $Fix(L)$ происходит без касания, то есть касательный вектор к кривой l_u не лежит в касательном пространстве к $Fix(L)$. По симметрии мы имеем аналогичную гладкую кривую $l_s = L(l_u)$ — след устойчивого многообразия $W^s(p)$, касательный вектор к которой в точке m также не лежит в касательном пространстве к $Fix(L)$. Более того, мы предположим, что пересечение многообразий $W^u(p)$, $W^s(p)$ вдоль Γ невырожденное, то есть два касательных вектора к l_s, l_u в точке m неколлинеарны. Теперь в касательном пространстве $T_m N$ мы можем натянуть на эту пару векторов двумерную плоскость, которая вместе с касательным пространством к $Fix(L)$ в точке m порождает все $T_m N$.

5. Выбор секущих, локальное и глобальное отображения

Для построения отображения Пуанкаре вблизи гомоклинической траектории выберем две секущие к траектории Γ . В координатах (x, y) многообразии W^s есть 2-плоскость $x_3 = y_3 = x_1 = x_2 = 0$, а W^u есть 2-плоскость $x_3 = y_3 = y_1 = y_2 = 0$. Подмногообразие $y_1^2 + y_2^2 = \rho_s^2$, $x_3^2 + y_3^2 \leq \delta_s$, $x_1^2 + x_2^2 \leq \sigma_s^2$ является секущей N^s к входящему куску Γ . Подмногообразие $x_1^2 + x_2^2 = \rho_u^2$, $x_3^2 + y_3^2 \leq \delta_s$, $y_1^2 + y_2^2 \leq \sigma_s^2$ является секущей N^u к выходящему куску Γ . Обе эти секущие гомеоморфны $S^1 \times D^4$. Каждая из них гладко расслоена уровнями $H = c$.

Для получения локального отображения $T : N^s \mapsto N^u$ нужно проинтегрировать гамильтонову систему с гамильтонианом (5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (\alpha + F_X)x_1 - (\beta + F_Y)x_2, & \dot{y}_1 &= -(\alpha + F_X)y_1 - (\beta + F_Y)y_2, \\ \dot{x}_2 &= (\beta + F_Y)x_2 + (\alpha + F_X)x_1, & \dot{y}_2 &= (\beta + F_Y)y_2 - (\alpha + F_X)y_1, \\ \dot{x}_3 &= (\omega + F_R)y_3, & \dot{y}_3 &= -(\omega + F_R)x_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку X, Y, R являются локальными интегралами, то есть они постоянны вдоль траекторий потока, то, задавая начальную точку (x_0, y_0) , можем считать X_0, Y_0, R_0 постоянными и интегрировать систему (6) как линейную с постоянными коэффициентами. Тогда получаем

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \exp[t(\alpha + F_X^0)][x_1^0 \cos((\beta + F_Y^0)t) - x_2^0 \sin((\beta + F_Y^0)t)], \\
x_2(t) &= \exp[t(\alpha + F_X^0)][x_1^0 \sin((\beta + F_Y^0)t) + x_2^0 \cos((\beta + F_Y^0)t)], \\
y_1(t) &= \exp[-t(\alpha + F_X^0)][y_1^0 \cos((\beta + F_Y^0)t) - y_2^0 \sin((\beta + F_Y^0)t)], \\
y_2(t) &= \exp[-t(\alpha + F_X^0)][y_1^0 \sin((\beta + F_Y^0)t) + y_2^0 \cos((\beta + F_Y^0)t)], \\
x_3(t) &= x_3^0 \cos((\omega + F_R^0)t) + y_3^0 \sin((\omega + F_R^0)t), \\
y_3(t) &= -x_3^0 \sin((\omega + F_R^0)t) + y_3^0 \cos((\omega + F_R^0)t).
\end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим точку $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \rho_s \cos \theta, \rho_s \sin \theta, y_3^0)$ на секущей N^s . Если эта точка не лежит на W^{cs} , то есть $(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 \neq 0$, то эта точка достигает секущей N^u через время

$$t_p = \frac{1}{\alpha + F_X^0} \ln \frac{\rho_u}{\sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}}.$$

Подставляя это значение вместо t в оставшиеся четыре соотношения в (7), получаем координаты образа точки при локальном отображении T .

Теперь будем предполагать, как в нашем случае, что состояние равновесия p симметрично относительно инволюции L и гомоклиническая траектория Γ также симметрична. Тогда естественно выбрать секущие N^s, N^u к Γ симметрично расположенными, то есть $N^u = L(N^s)$. В выбранных координатах около точки p локальное действие инволюции L можно считать линейным и действующим следующим образом:

$$L(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (-y_2, -y_1, y_3, -x_2, -x_1, x_3).$$

Тогда множество $Fix(L)$ локально задается как $x_1 + y_2 = 0, x_2 + y_1 = 0, x_3 = y_3$, то есть является 3-диском. Для выполнения условия симметрии $N^u = L(N^s)$ выберем $\rho_u = \rho_s = \rho, \delta_u = \delta_s = \delta, \sigma_u = \sigma_s = \sigma$.

Ввиду симметрии гомоклинической траектории Γ , она пересекает множество $Fix(L)$ в некоторой точке m . Пусть N — секущая к Γ . Ее, как сказано выше, можно выбрать таким образом, что она будет инвариантна относительно действия инволюции L и содержит трехмерный диск $D_m \subset Fix(L)$. Секущая N расслоена уровнями $H = c$ на гладкие четырехмерные диски N_c , являющиеся секущими к потоку гамильтоновой системы, ограниченному на этот уровень, один из таких дисков N_0 проходит через точку m . 3-диск D_m расслоен уровнями $H = c$ на двумерные диски Δ_c . Диск Δ_0 содержит точку m .

Рассмотрим на N след многообразия $W^u(p)$, это гладкая кривая l_u (отрезок), проходящая через точку m и лежащая в 4-диске N_0 . Мы предположим, что l_u не касается диска D_m в точке m . В N также лежит гладкий отрезок $l_s = L(l_u)$, проходящий через точку m , не касающийся D_m в точке m . Мы предположим выполнение условия невырожденности Γ , то есть что кривые l_u, l_s не касаются друг друга в точке m , то есть касательные векторы к этим кривым в этой точке неколлинеарны. Тогда в четырехмерном касательном пространстве $T_m N_0$ лежат две двумерные плоскости: одна натянута на пару касательных векторов к l_u, l_s в точке m , а вторая плоскость — касательная к 2-диску Δ_0 . Мы предполагаем, что эти две 2-плоскости трансверсальны, то есть взаимно дополнительные в $T_m N_0$. В частности, отсюда следует, что в касательном пространстве $T_m N$ первая плоскость дополняет касательную 3-плоскость к D_m в точке m .

Для поиска симметричных периодических траекторий в окрестности гомоклинической траектории Γ сначала находится прообраз 3-диска $D_m \subset Fix(L)$ при отображении последования

из окрестности точки $q = \Gamma \cap N^u$ в окрестность точки $m \in N$. Обозначим его D_q . В касательном пространстве к секущей N^u в точке q касательная плоскость к D_q будет 3-плоскостью, трансверсальная двумерной плоскости, натянутой на пару неколлинеарных векторов, касательных соответственно к следу W^u и следу W^s в точке q . Координатами в N^u являются угловая координата φ , где $x_1 = \rho \cos \varphi$, $x_2 = \rho \sin \varphi$, и координаты X, Y, x_3, y_3 . Секущая N^u гладко расслоена уровнями $H = c$, которые в выбранных координатах на N^u являются графиками функций

$$X = \alpha^{-1}[c - \beta Y - \omega R + O_2(Y, R, c)].$$

Рассмотрим теперь во множестве $Fix(L)$ трехмерный диск D_p , являющийся окрестностью точки p . В координатах (x, y) он задается уравнениями $x_1 = -y_2$, $x_2 = -y_1$, $x_3 = y_3$, то есть координатами на D_p являются (y_1, y_2, y_3) . Функции X, Y, R , инвариантные относительно потока в U , в этих координатах имеют вид $X = -2y_1y_2$, $Y = y_1^2 - y_2^2$, $R = y_3^2$. Введем на D_p цилиндрические координаты $y_1 = \tau \sin \chi$, $y_2 = -\tau \cos \chi$, $y_3 = y_3^0$. Тогда образом в N^u при отображении вдоль потока (7) окружности $\tau = \tau_0 > 0$, $y_3 = y_3^0$ будет параметрически заданная замкнутая кривая

$$\varphi = \frac{\beta + F_Y^0}{\alpha + F_X^0} \ln \left(\frac{\rho}{\tau_0} \right) - \chi \pmod{2\pi}, \quad X = \tau_0^2 \sin(2\chi), \quad Y = -\tau_0^2 \cos(2\chi),$$

$$x_3 = \sqrt{2}y_3^0 \cos \left(\frac{\omega + F_R^0}{\alpha + F_X^0} \ln \left(\frac{\rho}{\tau_0} \right) + \pi/4 \right), \quad y_3 = \sqrt{2}y_3^0 \sin \left(\frac{\omega + F_R^0}{\alpha + F_X^0} \ln \left(\frac{\rho}{\tau_0} \right) + \pi/4 \right),$$

параметром на которой является $\chi \in [0, 2\pi]$. Меняя $\tau_0 \in [0, \tau_*]$, $y_3^0 \in [-y_3^*, y_3^*]$, получаем трехмерное подмногообразие $S \subset N^u$, в замыкании которого содержится замкнутая кривая — след $W^u(p)$. Через точки пересечения S с диском D_q проходят симметричные относительно инволюции L периодические траектории. Поскольку секущая N^u пятимерна, а оба множества S, D_q трехмерны, то пересечение происходит в общем случае вдоль кривых — однопараметрических семейств симметричных периодических траекторий.

Отметим важное свойство полученного трехмерного многообразия в N^u : при обходе окружности $\tau = \tau_0, y_3 = y_3^0$ в диске D_p ее образ в N^u делает полный оборот по угловой переменной φ . Детальное изучение пересечения в четырехмерной секущей N_0^u образа множества $D_q \cap \{H = H(p)\}$ и $S \cap \{H = H(p)\}$ геометрически весьма сложно и приводит к следующему утверждению.

Теорема 4. *При выполнении указанных предположений в окрестности симметричной гомоклинической траектории Γ симметричного седло-фокус-центра p гладкой обратимой гамильтоновой системы с тремя степенями свободы уровень гамильтониана $H = H(p)$ содержит счетное множество однообходных симметричных периодических траекторий. Тип этих траекторий зависит от выполнения некоторого неравенства, коэффициентами которого являются реальные части собственных значений состояния равновесия p и коэффициенты матрицы линеаризации глобального отображения.*

Технические детали доказательства этой теоремы будут изложены в другой работе. Здесь мы только иллюстрируем ее численными результатами.

6. Выводы

В работе изучается дифференциальное уравнение шестого порядка типа Эйлера–Лагранжа–Пуассона, описывающее стационарные решения уравнения с частными производными параболического типа из теории фазовых переходов. Это уравнение зависит от двух параметров,

имеющих физический смысл. Фактически исследование ведется для гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, которая получается из уравнения после введения новых переменных. Важно также, что полученная система является еще и обратимой относительно двух различных инволюций, что позволяет находить решения с различными типами симметрии.

Для этой системы исследуются два круга вопросов. Первый касается существования гетероклинических траекторий, связывающих два различных состояния равновесия гиперболического типа, соответствующих двум различным пространственно однородным решениям исходного уравнения. Такие решения как раз описывают переходы из одного состояния в другое, симметричное ему. Вопрос о типах таких решений, их сложности, поведения решений вблизи них является одним из основных для рассматриваемой задачи. Эта задача решается в основном численно, но с привлечением для их поиска методов теории динамических систем. Такие решения находятся и указаны области значений параметров, которым соответствуют решения с простой и сложной структурой, что зависит от типа полученных гетероклинических контуров.

Второй круг вопросов связан с существованием гомоклинических решений к центральному состоянию равновесия, имеющим для некоторой области параметров тип седло-фокус-центр (см. текст выше). Такие решения представляют интерес в связи с тем, что они соответствуют так называемым локализованным решениям исходного уравнения с частными производными и на таких решениях конечным является функционал, вариационная производная которого задает правую часть исходного уравнения с частными производными (уравнение потенциального типа). Кроме того, очень интересна структура решений около гомоклинических решений, поскольку это позволяет получать решения с весьма сложной структурой, используя результаты [6]. В работе различные нетривиальные решения получены с использованием численных методов. Более того, в окрестности гомоклинических траекторий седло-фокус-центра могут существовать так называемые 2-эллиптические траектории, около которых имеются квазипериодические решения, то есть регулярная динамика. Это будет предметом исследования в следующих работах.

Список литературы

1. *Bates P. W., Fife P. C., Gardner R. A., Jones C. K. R. T.* The existence of traveling wave solutions of a generalized phase-field model // *SIAM J. Math. Anal.* 1997. Vol. 28, no. 1. P. 60–93. DOI: 10.18500/0869-6632-00313710.1137/S0036141095283820.
2. *Caginalp G., Fife P.* Higher-order phase field models and detailed anisotropy // *Phys. Rev. B.* 1986. Vol. 34, iss. 7. P. 4940–4943. DOI: 10.1103/PhysRevB.34.4940.
3. *Tersian S., Shaparova Yu.* Periodic and homoclinic solutions of some semilinear sixth-order differential equations // *J. Math. Analysis Appl.* 2002. Vol. 272, iss. 1. P. 223–239. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00153-1.
4. *Peletier L. A., Troy W. C., Van der Vorst R. C. A. M.* Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation // *Differential Equations.* 1995. Vol. 31, no. 2. P. 301–314.
5. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Неишатадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // В кн.: *Динамические системы. Т. 3. Итоги науки и техники, сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления».* М.: ВИНТИ АН СССР, 1985. С. 5–290.
6. *Koltsova O. Yu., Lerman L. M.* Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in $2N$ -dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center // *Intern. J. Bifurcation & Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 6. P. 991–1006. DOI: 10.1142/S0218127496000540.
7. *Шильников Л. П.* К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус // *Матем. сб.* 1970. Т. 81, № 1. С. 92–103.
8. *Kulagin N. E., Lerman L. M., Trifonov K. N.* Twin heteroclinic connections of reversible systems // *Regular and Chaotic Dynamics.* 2024. Vol. 29, no. 1, 40–64. DOI: 10.1134/S1560354724010040.

9. *Vanderbauwhede A., Fiedler B.* Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems // *Z. Angew. Math. Phys.* 1992. Vol. 43. P. 292–318. DOI: 10.1007/BF00946632.
10. *Ibañez S., Rodrigues A.* On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: Switching and horseshoes // *Int. J. of Bifurc. and Chaos.* 2015. Vol. 25, no. 11. P. 1530030. DOI: 10.1142/S021812741530030X.
11. *Галин Д. М.* Версальные деформации линейных гамильтоновых систем // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1975. Т. 1. С. 63–74.
12. *Gaivão J. P., Gelfreich V.* Splitting of separatrices for the Hamiltonian-Hopf bifurcation with the Swift–Hohenberg equation as an example // *Nonlinearity.* 2011. Vol. 24, no. 3. P. 677–698. DOI: 10.1088/0951-7715/24/3/002.
13. *Glebsky L. Yu., Lerman L. M.* On small stationary localized solutions for the generalized 1-D Swift-Hohenberg equation // *Chaos: Interdisc. J Nonlin. Sci.* 1995. Vol. 5, no. 2. P. 424–431. DOI: 10.1063/1.166142.
14. *van der Meer J.-C.* The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Vol. 1160 of Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 115 p. DOI: 10.1007/BFb0080357.
15. *Iooss G., Pérouéme M. C.* Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields // *J. Diff. Equat.* 1993. Vol. 102. P. 62–88.
16. *Homburg A. J.* Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields // *Memoirs of AMS.* 1996. Vol. 121. P. 578. DOI: 10.1090/memo/0578.
17. *Sandstede B.* Center manifolds for homoclinic solutions // *J. Dyn. Differ. Equ.* 2000. Vol. 12, no. 3. P. 449–510. DOI: 10.1023/A:1026412926537.
18. Тураев Д. В., Об одном случае бифуркаций контура, образованного гомоклиническими кривыми седла // В кн.: «Методы качественной теории дифференциальных уравнений» / Под ред. Е. А. Леонтович-Андронов. Горький: Горьковский госуниверситет, 1984. С. 162–175.
19. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Т. 1. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.
20. Lerman L. Homo- and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a Hamiltonian system with heteroclinic contour with two saddle-foci // *Regul. & Chaotic Dynamics.* 1997. Vol. 2, no. 3-4. P. 139–155.
21. *Беляков Л. А., Шильников Л. П.* Гомоклинические кривые и сложные уединенные волны // В кн.: «Методы качественной теории дифференциальных уравнений» / Под ред. Е. А. Леонтович-Андронов. Горький: Горьковский госуниверситет, 1985. С. 22–35.
22. *Devaney R.* Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // *J. Diff. Equat.* 1976. Vol. 21. P. 431–439. DOI: 10.1016/0022-0396(76)90130-3.
23. *Lerman L. M.* Complex dynamics and bifurcations in Hamiltonian systems having the transversal homoclinic orbit to a saddle-focus // *Chaos: Interdisc. J. Nonlin. Sci.* 1991. Vol. 1, no. 2. P. 174–180. DOI: 10.1063/1.165859.
24. *Lerman L.* Dynamical phenomena near a saddle-focus homoclinic connection in a Hamiltonian system // *J. Stat. Physics.* 2000. Vol. 101, no. 1–2. P. 357–372. DOI: 10.1023/A:1026411506781.
25. *Turaev D. V.* On dimension of non-local bifurcation problems // *Int. J. Bif. & Chaos.* 1996. Vol. 6, no. 5. P. 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.

References

1. Bates PW, Fife PC, Gardner RA, Jones CKRT. The existence of traveling wave solutions of a generalized phase-field model. *SIAM J. Math. Anal.* 1997;28(1):60–93. DOI: 10.18500/0869-6632-00313710.1137/S0036141095283820.
2. Caginalp G, Fife P. Higher-order phase field models and detailed anisotropy. *Phys. Rev. B.* 1986;34(7):4940–4943. DOI: 10.1103/PhysRevB.34.4940.

3. Tersian S, Shaparova Yu. Periodic and homoclinic solutions of some semilinear sixth-order differential equations. *J. Math. Analysis Appl.* 2002;272(1):223–239. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00153-1.
4. Peletier LA, Troy WC, Van der Vorst RCAM. Stationary solutions of a fourth-order nonlinear diffusion equation. *Differential Equations.* 1995;31(2):301–314.
5. Arnol'd VI, Kozlov VV, Neishtadt AI. Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. In: *Dynamical systems*, vol. 3, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. “Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.”. Moscow: VINITI; 1985. P. 5–290.
6. Koltsova OYu, Lerman LM. Families of transverse Poincaré homoclinic orbits in $2N$ -dimensional Hamiltonian systems close to the system with a loop to a saddle-center. *Intern. J. Bifurcation & Chaos.* 1996;6(6):991–1006. DOI: 10.1142/S0218127496000540.
7. Shilnikov LP. The structure of extended neighborhood of a rough equilibrium of the saddle-focus. *Math. Sb.* 1970;81(1):92–103.
8. Kulagin NE, Lerman LM, Trifonov KN. Twin heteroclinic connections of reversible systems. *Regular and Chaotic Dynamics.* 2024;29(1):40–64. DOI: 10.1134/S1560354724010040.
9. Vanderbauwhede A, Fiedler B. Homoclinic period blow-up in reversible and conservative systems. *Z. Angew. Math. Phys.* 1992;43:292–318. DOI: 10.1007/BF00946632.
10. Ibañez S, Rodrigues A. On the dynamics near a homoclinic network to a bifocus: Switching and horseshoes. *Int. J. of Bifurc. and Chaos.* 2015;25(11):1530030. DOI: 10.1142/S021812741530030X.
11. Galin D. M. Versal deformations of linear Hamiltonian systems // *Proc. of Petrovsky seminar.* 1975. Vol. 1. P. 63–74.
12. Gaivão JP, Gelfreich V. Splitting of separatrices for the Hamiltonian-Hopf bifurcation with the Swift–Hohenberg equation as an example. *Nonlinearity.* 2011;24(3):677–698. DOI: 10.1088/0951-7715/24/3/002.
13. Glebsky LYu, Lerman LM. On small stationary localized solutions for the generalized 1-D Swift–Hohenberg equation. *Chaos: Interdisc. J Nonlin. Sci.* 1995;5(2):424–431. DOI: 10.1063/1.166142.
14. van der Meer J-C. The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Vol. 1160 of *Lecture Notes in Mathematics.* Berlin: Springer-Verlag; 1985. 115 p. DOI: 10.1007/BFb0080357.
15. Iooss G, Pérouème MC. Perturbed homoclinic solutions in reversible 1:1 resonance vector fields. *J. Diff. Equat.* 1993;102:62–88.
16. Homburg AJ. Global aspects of homoclinic bifurcations of vector fields. *Memoirs of AMS.* 1996;121:578. DOI: 10.1090/memo/0578.
17. Sandstede B. Center manifolds for homoclinic solutions. *J. Dyn. Differ. Equ.* 2000;12(3):449–510. DOI: 10.1023/A:1026412926537.
18. Turaev DV. On bifurcation of a contour formed by homoclinic orbits of a saddle. In: Leontovich-Andronov E. A. (ed) “Methods of qualitative theory of differential equation”. Gorky: Gorky State University; 1984. P. 162–175.
19. Shilnikov LP, Shilnikov AL, Turaev DV, Chua L. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics.* Vol. 1. Singapoure: World Scientific; 1998.
20. Lerman L. Homo- and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a Hamiltonian system with heteroclinic contour with two saddle-foci. *Regul. & Chaotic Dynamics.* 1997;2(3-4):139–155.
21. Belyakov LA, Shilnikov LP. Homoclinic curves and complex solitary waves. In: Leontovich-Andronov EA, editor. *Methods of qualitative theory of differential equation.* Gorky: Gorky State University; 1985. P. 22–35.
22. Devaney R. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems. *J. Diff. Equat.* 1976;21:431–439. DOI: 10.1016/0022-0396(76)90130-3.

23. Lerman LM. Complex dynamics and bifurcations in Hamiltonian systems having the transversal homoclinic orbit to a saddle-focus. *Chaos: Interdisc. J. Nonlin. Sci.* 1991;1(2):174–180. DOI: 10.1063/1.165859.
24. Lerman L. Dynamical phenomena near a saddle-focus homoclinic connection in a Hamiltonian system. *J. Stat. Physics.* 2000;101(1–2):357–372. DOI: 10.1023/A:1026411506781.
25. Turaev DV. On dimension of non-local bifurcation problems. *Int. J. Bif. & Chaos.* 1996;6(5): 919–948. DOI: 10.1142/S0218127496000515.



Кулагин Николай Евгеньевич — родился в Кисловодске (1946). Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета. Доктор физико-математических наук (1989). Известный специалист в теории структур в уравнениях магнетизма (уравнения Ландау–Лифшица), теории нелинейных эллиптических уравнений и численных методов исследования таких структур. В настоящее время — ведущий научный сотрудник Института физхимии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН.

Россия, 119071 Москва, Ленинский проспект, 31, корп. 4
 Институт физической химии и электрохимии им. А. Н. Фрумкина РАН
 E-mail: klg@yandex.ru
 ORCID: 0000-0002-1511-2772
 AuthorID (eLibrary.Ru): 6954



Лерман Лев Михайлович — родился в 1944 году. Окончил факультет ВМК Горьковского государственного университета (1968). Доктор физико-математических наук (2000), профессор (2005). Известный специалист по теории динамических систем, теории бифуркаций, теории гамильтоновых систем, теории структур в уравнениях с частными производными эллиптического типа. В настоящее время — главный научный сотрудник Международной лаборатории динамических систем и приложений ВШЭ, профессор кафедры фундаментальной математики ВШЭ (Нижний Новгород).

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
 Россия, 603022 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: lermanl@mm.unn.ru
 ORCID: 0000-0002-8913-1888
 AuthorID (eLibrary.Ru): 106647