



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья
УДК 517.9:534.1

DOI: 10.18500/0869-6632-003136
EDN: NYSYYX

О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем

К. Е. Морозов

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Россия
E-mail: ✉ kirill.morozov@itmm.unn.ru

*Поступила в редакцию 23.05.2024, принята к публикации 7.07.2024,
опубликована онлайн 31.10.2024, опубликована 29.11.2024*

Аннотация. В настоящее время достаточно полно изучены неконсервативные возмущения двумерных нелинейных гамильтоновых систем. *Цель* исследования — обобщение этой теории на трёхмерный случай, когда невозмущенная система является нелинейной, интегрируемой и имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми траекториями. В данной работе рассматриваются автономные возмущения и основное внимание уделяется задаче о предельных циклах. *Методы.* Исследование основано на построении специальных координат, в которых переменные разделены на две медленные и одну быструю, и в первом приближении по малому параметру уравнения для медленных переменных отделяются. *Результаты.* Показано, что гиперболические состояния равновесия укороченной системы определяют замкнутые фазовые траектории, в окрестности которых под действием возмущения появляются циклы. *Заключение.* Таким образом, задача сводится к исследованию «порождающей» системы двух алгебраических или трансцендентных уравнений аналогично порождающему уравнению Пуанкаре–Понтрягина для двумерных систем. В качестве примеров рассматриваются трёхмерная система типа ван дер Поля и система Лоренца в случае больших чисел Рэлея.

Ключевые слова: усреднение, предельные циклы, трёхмерные системы, порождающая функция.

Благодарности. Теоретическая часть работы выполнена при поддержке гранта FSWR–2020–0036 (Раздел 1). Практическая часть выполнена при поддержке гранта РФФ № 24–11–00339 (Раздел 2). Автор также выражает признательность Морозову А. Д. за конструктивные обсуждения.

Для цитирования: Морозов К. Е. О неконсервативных возмущениях трёхмерных интегрируемых систем // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 766–780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136. EDN: NYSYYX

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems

K. E. Morozov

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: ✉kirill.morozov@itmm.unn.ru

Received 23.05.2024, accepted 7.07.2024, available online 31.10.2024, published 29.11.2024

Abstract. At present, non-conservative perturbations of two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems have been studied quite fully. The *purpose* of the study is to generalize this theory to the three-dimensional case, when the unperturbed system is nonlinear, integrable and has a region filled with closed phase trajectories. In this paper, autonomous perturbations are considered and the main attention is paid to the problem of limit cycles. *Methods.* The study is based on the construction of special coordinates in which the variables are divided into two slow and one fast, and in the first approximation with respect to a small parameter the equations for the slow variables are separated. *Results.* It is shown that hyperbolic equilibrium states of a truncated system determine closed phase trajectories, in the vicinity of which cycles appear under the perturbation. *Conclusion.* Thus, the problem is reduced to the study of solutions of the “generating” system of two algebraic or transcendental equations, similar to the generating Poincaré–Pontryagin equation for two-dimensional systems. As examples, we consider a three-dimensional van der Pol type system and the Lorentz system in the case of large Rayleigh numbers.

Keywords: averaging, limit cycles, three-dimensional systems, the generating function.

Acknowledgements. The theoretical part of the work was supported by the grant FSWR-2020-0036 (Section 1). The practical part of the work was supported by the grant of the RSF № 24-11-00339 (Section 2). As well, the author is grateful to Morozov A. D. for the fruitful discussions.

For citation: Morozov KE. On non-conservative perturbations of three-dimensional integrable systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(6):766–780. DOI: 10.18500/0869-6632-003136

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Теория нелинейного резонанса в гамильтоновых и близких к ним системах составляет важный раздел теории колебаний. В настоящее время наиболее полно изучены неконсервативные возмущения двумерных гамильтоновых систем. Для систем с $3/2$ степенями свободы основы этой теории заложены А. Д. Морозовым и Л. П. Шильниковым в работе [1]. Дальнейшее развитие продолжено в работах А. Д. Морозова и его учеников: изучены резонансы различных типов (в том числе вырожденные), вопросы, связанные с синхронизацией колебаний в резонансной зоне, а также основные примеры (см. монографию [2] и ссылки в ней). В работах [3–7] результаты о системах с $3/2$ степенями свободы обобщены на случай квазипериодических возмущений. Как показывают исследования [1–7], при изучении резонансов в системах, близких к гамильтоновым, важную роль играет задача о предельных циклах в автономных системах такого вида. Эта задача решена Л. С. Понтрягиным в заметке [8], где даны достаточные условия рождения предельного цикла из замкнутой фазовой траектории невозмущённой системы.

Представляет интерес обобщение теории неконсервативных возмущений на трёхмерный случай, когда невозмущённая система является нелинейной, интегрируемой и имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми траекториями. В данной работе мы обратимся к автономным системам и обсудим применение принципа усреднения к решению задачи о предельных циклах. Обобщая методику, связанную с построением порождающего уравнения Пуанкаре–Понтрягина (см. [8], также [9]), мы получаем «порождающую» систему двух алгебраических или трансцендентных уравнений, простые решения которой определяют предельные циклы исходной системы¹.

¹О непосредственном применении метода малого параметра Пуанкаре для анализа предельных циклов в некоторых трёхмерных системах, близких к интегрируемым, см. [10].

Как и в двумерном случае, задача о предельных циклах играет важную роль при исследовании неавтономных (периодических или квазипериодических) возмущений трёхмерных интегрируемых систем.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y} + \varepsilon f_1(x, y, z), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y, z)}{\partial x} + \varepsilon f_2(x, y, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon f_3(x, y, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — параметр, H, f_i ($i = \overline{1, 3}$) — достаточно гладкие (например, аналитические) функции в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что возмущение неконсервативное:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \neq 0, \quad (x, y, z) \in G.$$

При $\varepsilon = 0$ система (1) интегрируема. Первые интегралы $z = c$, $H(x, y, z) = h$ определяют два однопараметрических семейства поверхностей в \mathbb{R}^3 . Предположим, что при каждом $c \in (c^-, c^+)$ и каждом $h \in (h^-, h^+)$ поверхности из этих семейств пересекаются по замкнутым фазовым траекториям², и обозначим через D область (полноторий), состоящую из этих траекторий. Пусть $D \subset G$ и, кроме того, D отделена от сепаратрисных поверхностей и состояний равновесия. Основной целью работы является анализ поведения решений системы (1) в области D .

Трёхмерные интегрируемые системы общего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x, y, z), \\ \dot{y} &= Q(x, y, z), \\ \dot{z} &= R(x, y, z), \end{aligned}$$

при некоторых условиях могут быть приведены к виду системы (1) при $\varepsilon = 0$. Так, если $H_1(x, y, z) = c_1$ — первый интеграл и $\frac{\partial H_1}{\partial z} \neq 0$ в окрестности замкнутой траектории, то, делая замену $\tilde{z} = H_1(x, y, z)$, придём в этой окрестности к системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{P}(x, y, \tilde{z}), \\ \dot{y} &= \tilde{Q}(x, y, \tilde{z}), \\ \dot{\tilde{z}} &= 0. \end{aligned}$$

При соответствующем $\tilde{z} = \text{const}$ система первых двух уравнений имеет область, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми. В этой области она консервативна в смысле существования интегрального инварианта, но необязательно имеет гамильтонову форму [9]. Тем не менее с помощью гладкой взаимно-однозначной замены переменных эта система приводится к такой форме (см. [11], стр. 35, Теорема 6)³.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 выводится усреднённая система первого приближения и обосновывается связь между её состояниями равновесия и предельными циклами системы (1). В разделе 2 приведённый метод применяется для анализа предельных циклов в двух примерах — трёхмерной системе типа ван дер Поля и системе Лоренца. Обсуждение и выводы приводятся в Заключение.

²Из теоремы о неявной функции следует, что если в системе (1) при $\varepsilon = 0$ существует хотя бы одна замкнутая фазовая траектория, то существует и некоторое двухпараметрическое семейство таких траекторий.

³См. также пример в разделе 2.2.

1. Усреднение. Предельные циклы

Обратимся к системе (1) при $\varepsilon = 0$. Подставляя $z = c \in (c^-, c^+)$ в первые два уравнения, приходим к гамильтоновой системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x, y, c)}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y, c)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

По предположению, система (2) имеет кольцевую область G_c , заполненную замкнутыми кривыми $H(x, y, c) = h \in (h^-, h^+)$ и отделённую от сепаратрис и состояний равновесия. В этой области перейдём от переменных (x, y) к переменным «действие–угол» (I, θ) с помощью канонического преобразования:

$$x = X(\theta, I, c), \quad y = Y(\theta, I, c). \quad (3)$$

В переменных (I, θ) гамильтониан $\tilde{H} = \tilde{H}(I, c)$ не зависит от θ , и уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= 0, \\ \dot{\theta} &= \omega(I, c). \end{aligned}$$

Здесь $\omega(I, c) = \partial \tilde{H}(I, c) / \partial I$ — частота колебаний на замкнутых кривых. Например, если $H(x, y, c) = y^2/2 + U(x, c)$, то $\omega(I, c) = 2\pi/T(I, c)$, где

$$T(I, c) = \sqrt{2} \int_{x_1(I, c)}^{x_2(I, c)} \frac{dx}{\sqrt{h(I) - U(x, c)}},$$

а $x_1 < x_2$ — вещественные корни уравнения $h - U(x, c) = 0$.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Сделаем в (1) замену

$$x = X(\theta, I, z), \quad y = Y(\theta, I, z),$$

где X, Y — те же функции, что и в (3). Система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon B_1(\theta, I, z), \\ \dot{z} &= \varepsilon B_2(\theta, I, z), \\ \dot{\theta} &= \omega(I, z) + \varepsilon B_3(\theta, I, z), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(\theta, I, z) &= X'_\theta \tilde{f}_2 - Y'_\theta \tilde{f}_1 + \tilde{f}_3(X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z), \quad B_2(\theta, I, z) = \tilde{f}_3, \\ B_3(\theta, I, z) &= -X'_I \tilde{f}_2 + Y'_I \tilde{f}_1 + \tilde{f}_3(X'_I Y'_z - X'_z Y'_I), \\ \tilde{f}_i(\theta, I, z) &= \tilde{f}_i(X(\theta, I, z), Y(\theta, I, z), z), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

B_s ($s = 1, 2, 3$) суть достаточно гладкие функции своих аргументов, 2π -периодические по θ . Фазовым пространством системы (4) является полноторий $(I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+) \times S^1$. Предположим, что в рассматриваемой области функции B_s и ω ограничены вместе с производными до второго порядка включительно. При каждом $(I, z) \in (I(h^-), I(h^+)) \times (c^-, c^+)$ разложим функции B_s в равномерно сходящиеся по $\theta \in [0, 2\pi]$ ряды Фурье:

$$B_s(\theta, I, z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{sk}(I, z) \exp(ik\theta), \quad s = 1, 2, 3.$$

Введём в системе (4) новые переменные (w_1, w_2, v) по формулам

$$\begin{aligned} I &= w_1 + \frac{\varepsilon}{i\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_{1k} \exp(ikv), \\ z &= w_2 + \frac{\varepsilon}{i\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_{2k} \exp(ikv), \\ \theta &= v + \frac{\varepsilon}{i\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_{3k} \exp(ikv) - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} (\omega'_I B_{1k} + \omega'_z B_{2k}) \exp(ikv), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\omega, \omega'_I, \omega'_z, B_{sk}$ вычислены при (w_1, w_2) . Заметим, что в области D выполнено неравенство $\omega \geq \omega_* > 0$, поэтому в замене (5) нет «малого знаменателя» и входящие в замену ряды сходятся равномерно по v . Кроме того, несложно показать, что при достаточно малом ε данная замена обратима. В результате придём к системе

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \varepsilon B_{10}(w_1, w_2) + \varepsilon^2 S_1(v, w_1, w_2), \\ \dot{w}_2 &= \varepsilon B_{20}(w_1, w_2) + \varepsilon^2 S_2(v, w_1, w_2), \\ \dot{v} &= \omega(w_1, w_2) + \varepsilon B_{30}(w_1, w_2) + \varepsilon^2 S_3(v, w_1, w_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где функции S_i достаточно гладкие и 2π -периодические по v , а B_{s0} определяются по формулам

$$B_{s0}(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_s(\theta, w_1, w_2) d\theta, \quad s = 1, 2, 3.$$

Таким образом, замена (5) позволяет в первом приближении по ε исключить циклическую переменную из уравнений движения (4). Если теперь в системе (6) пренебречь членами порядка $\sim \varepsilon^2$, то получим систему, в которой первые два уравнения отделяются:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon B_{10}(u_1, u_2), \\ \dot{u}_2 &= \varepsilon B_{20}(u_1, u_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) получается из системы (4) усреднением двух первых уравнений по быстрой переменной θ , поэтому будем её называть *усреднённой системой* (первого приближения). Известно (см., например, [12]), что при $0 < t < 1/\varepsilon$ разность между усреднёнными переменными (u_1, u_2) и исходными переменными (I, z) , совпадающими при $t = 0$, имеет порядок $\sim \varepsilon$: $|I - u_1| < M\varepsilon, |z - u_2| < M\varepsilon, M > 0$. Действительно, правые части системы (7) и первых двух уравнений системы (6) различаются на величину порядка $\sim \varepsilon^2$. За время $t \sim 1/\varepsilon$ разница между соответствующими решениями станет порядка $\sim \varepsilon$. Кроме того, как следует из замены (5), разница между (I, z) и (w_1, w_2) также имеет порядок $\sim \varepsilon$, поэтому и разница между (I, z) и (u_1, u_2) будет иметь тот же порядок (строгие оценки могут быть получены с использованием леммы Гронуолла, см. [12, 13]). Пусть теперь система (7) имеет гиперболическое равновесие (u_{10}, u_{20}) . Тогда система (6), если в ней отбросить слагаемые порядка $\sim \varepsilon^2$, имеет гиперболическое периодическое решение с частотой $\omega(u_{10}, u_{20}) + \varepsilon B_{30}(u_{10}, u_{20})$, которое является грубым (см., например, [14]). Однако добавки порядка $\sim \varepsilon^2$ не являются сколь угодно малыми по отношению к системе, где они отброшены, а при $\varepsilon = 0$ система не имеет грубых решений, поэтому нельзя формально использовать свойство грубости для обоснования сохранения периодического решения⁴. Тем не менее это решение сохраняется. Действительно, выбирая в (6) переменную v

⁴Для иллюстрации можно привести простой одномерный пример: $\dot{x} = x^2 + \varepsilon x + \varepsilon^2$. Если отбросить слагаемое порядка $\sim \varepsilon^2$, есть два гиперболических состояния равновесия — устойчивое и неустойчивое (система грубая), но при учете этого слагаемого состояний равновесия нет.

в качестве нового времени, придём к системе в стандартной форме метода усреднения. Тогда, применяя первую теорему Боголюбова [13], получаем, что существует гиперболическое периодическое решение с периодом 2π по v , по t период равен $2\pi/\omega_0$, где $\omega_0 = \omega(u_{10}, u_{20}) + O(\varepsilon)$. В фазовом пространстве системы (1) образом указанного решения является предельный цикл L_ε , причем $L_\varepsilon \rightarrow L_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где L_0 — фазовая кривая невозмущённой системы (системы (1) при $\varepsilon = 0$), определяемая значениями первых интегралов $I = u_{10}, z = u_{20}$. Устойчивость цикла определяется устойчивостью состояния равновесия. По аналогии с порождающим уравнением Пуанкаре–Понтрягина в двумерном случае, будем называть систему уравнений

$$B_{s0}(u_1, u_2) = 0, \quad s = 1, 2,$$

которая определяет предельные циклы системы (1) в области D , порождающей.

Таким образом, приходим к теореме.

Теорема 1. Пусть выполнены условия

$$B_{s0}(u_{10}, u_{20}) = 0, \quad s = 1, 2, \quad (8)$$

$$\Delta \neq 0, \quad \sigma \neq 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial(B_{01}, B_{02})}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \sigma = \frac{\partial B_{10}}{\partial u_1} + \frac{\partial B_{20}}{\partial u_2} \text{ при } u_1 = u_{10}, u_2 = u_{20}.$$

Тогда существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$: 1) система (1) имеет в $O(\varepsilon)$ -окрестности невозмущённой фазовой кривой L_0 , определяемой значениями первых интегралов $I = u_{10}, z = u_{20}$, единственный предельный цикл L_ε ; 2) $L_\varepsilon \rightarrow L_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$; 3) цикл L_ε асимптотически (орбитально) устойчив, если $\sigma < 0, \Delta > 0$, и неустойчив в противном случае.

Действительно, условия (8) означают, что (u_{10}, u_{20}) является состоянием равновесия системы (7). Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

Условия (9) означают, что корни этого уравнения имеют отличные от нуля вещественные части и равновесие (u_{10}, u_{20}) является гиперболическим. Отсюда получаем утверждения 1 и 2. Применяя критерий Раусса–Гурвица, убеждаемся в 3.

В условиях теоремы первым приближением предельного цикла является невозмущённая фазовая кривая $x = X(\omega(u_{10}, u_{20})t, u_{10}, u_{20}), y = Y(\omega(u_{10}, u_{20})t, u_{10}, u_{20}), z = u_{20}$. Если подставить $w_1 = u_{10}, w_2 = u_{20}, v = (\omega(u_{10}, u_{20}) + \varepsilon B_{30}(u_{10}, u_{20}))t$ в формулы (5), то мы получим так называемое «улучшенное» первое приближение, удовлетворяющее системе (4) с точностью до членов порядка $\sim \varepsilon^2$. С помощью подходящей замены координат можно исключить из уравнений движения циклическую переменную до любого фиксированного порядка по ε и получить «усреднённую» систему высшего приближения, но эти замены громоздки, поэтому на практике обычно ограничиваются усреднённой системой первого или второго⁵ приближения.

Прежде чем переходить к примерам, отметим, что сама усреднённая система (7) может иметь предельный цикл. Можно показать, что если данный цикл является гиперболическим, то в системе (1) ему соответствует двумерный инвариантный тор, устойчивость которого совпадает с устойчивостью цикла (см. вторую теорему Боголюбова [13], см. также [15]). Достаточным условием отсутствия инвариантного тора в системе (1) является знакопостоянство её дивергенции.

⁵Если состояние равновесия (u_{10}, u_{20}) усреднённой системы первого приближения имеет комплексно-сопряжённые собственные числа, то система второго приближения может быть полезна для определения устойчивости предельного цикла.

2. Примеры

2.1. Система типа ван дер Поля. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 + z^2)x &= \varepsilon(\alpha - x^2)\dot{x}, \\ \dot{z} &= \varepsilon f(x, \dot{x}, z), \end{aligned} \quad (10)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, α — параметры. Эта система является примером системы с автоматическим регулированием, z — управляющий параметр, функция f описывает обратную связь. Например, положим $f = x^2 - \beta \dot{x}^2$, где β — параметр. Перепишем (10) в виде системы трёх уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -(1 + z^2)x + \varepsilon(\alpha - x^2)y, \\ \dot{z} &= \varepsilon(x^2 - \beta y^2). \end{aligned} \quad (11)$$

При $\varepsilon = 0$ система (11) имеет два первых интеграла: $z = c$, $H(x, y, z) = y^2/2 + (1 + z^2)x^2/2 = h$. Поверхности $z = c$ и $H(x, y, z) = h$, $h > 0$ пересекаются по замкнутым траекториям в виде эллипса $y^2/(2h(1+c^2)) + x^2/(2h) = 1$, ось z заполнена неизолрованными равновесиями. Отметим, что при $\varepsilon = 0$ и фиксированном $z = c$ первые два уравнения системы (11) образуют линейный осциллятор с собственной частотой $\omega(c) = \sqrt{c^2 + 1}$, но трёхмерная система (11) нелинейная даже при $\varepsilon = 0$.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Сделаем замену:

$$\begin{aligned} x &= X(\theta, I, z) \equiv \sqrt{2I}/(1 + z^2)^{1/4} \sin \theta, \\ y &= Y(\theta, I, z) \equiv \sqrt{2I}(1 + z^2)^{1/4} \cos \theta. \end{aligned}$$

Получим систему вида (4), в которой

$$\begin{aligned} B_1 &= 2I \cos^2 \theta \left(\alpha - \frac{2I}{\sqrt{1 + z^2}} \sin^2 \theta \right) - \frac{2I^2 z \cos 2\theta (\sin^2 \theta - \beta(1 + z^2) \cos^2 \theta)}{(1 + z^2)^{3/2}}, \\ B_2 &= \frac{2I}{\sqrt{1 + z^2}} (\sin^2 \theta - \beta(1 + z^2) \cos^2 \theta). \end{aligned}$$

Усреднённая система первого приближения принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \varepsilon u_1 \left(\alpha - \frac{u_1}{2(1 + u_2^2)^{3/2}} (1 - (1 + \beta)u_2 + u_2^2 - \beta u_2^3) \right), \\ \dot{u}_2 &= \varepsilon \frac{u_1}{\sqrt{1 + u_2^2}} (1 - \beta - \beta u_2^2). \end{aligned} \quad (12)$$

При выполнении одного из неравенств $\alpha \leq 0$, $\beta < 0$ или $\beta > 1$ система (12) не имеет состояний равновесия в области $u_1 > 0$. При $\alpha \leq 0$ имеем $\dot{u}_1 < 0$ и траектории исходной системы (11) стремятся к неизолрованным равновесиям, расположенным на оси z . Кроме того, $\dot{u}_2 > 0$ при $\beta < 0$, $\alpha > 0$ и $\dot{u}_2 < 0$ при $\beta > 1$, $\alpha > 0$, поэтому при этих значениях в системе (11) наблюдается «дрейф» траекторий вдоль оси z . При $\beta = 1$, $\alpha > 0$ в усреднённой системе (12) образуется сложное состояние равновесия (седло–узел), которое при $\beta < 1$ распадается на узел $O_1 \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\beta(\sqrt{\beta} - \sqrt{1-\beta})^2}}, \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \right)$ и седло $O_2 \left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\beta(\sqrt{\beta} + \sqrt{1-\beta})^2}}, -\sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \right)$. Эти равновесия существуют при $\beta \in (0, 1)$, $\beta \neq 0.5$. При $\beta = 0.5$ существует единственная седловая точка O_2 , а при $\beta = 0$

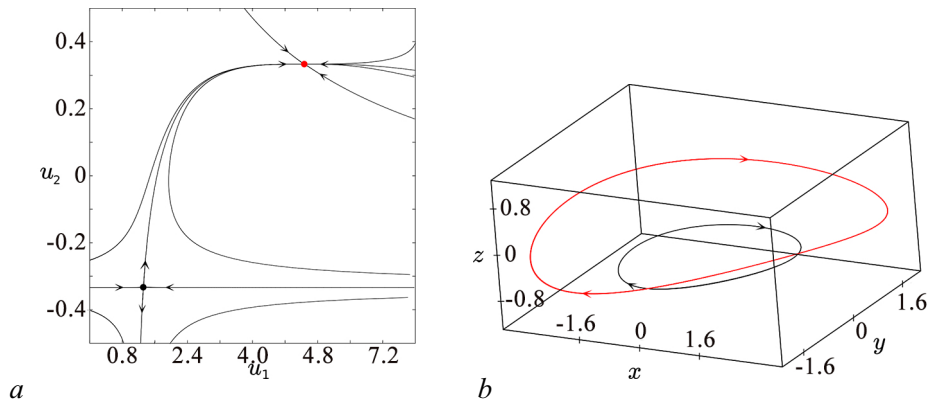


Рис. 1. *a* – Фазовый портрет системы (12) при $\alpha = 1, \beta = 0.9$; *b* – предельные циклы системы (11) при $\varepsilon = 0.05, \alpha = 1, \beta = 0.9$ (цвет онлайн)

Fig. 1. *a* – The phase portrait of system (12) at $\alpha = 1, \beta = 0.9$; *b* – limit cycles of system (11) at $\varepsilon = 0.05, \alpha = 1, \beta = 0.9$ (color online)

оба равновесия «уходят на бесконечность». В системе (11) точке O_1 отвечает асимптотически устойчивый предельный цикл, а O_2 – седловой. При $0 < \varepsilon \ll 1$ предельные циклы близки к эллипсам $\beta y^2/(2h) + x^2/(2h) = 1, h = \frac{2\alpha}{\beta(\sqrt{\beta} \pm \sqrt{1-\beta})^2}$, расположенным в плоскостях $z = \pm \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}$, а число $\omega_0 = 1/\sqrt{\beta}$ является асимптотическим приближением частоты колебаний на циклах. На рис. 1, *a* показан фазовый портрет усреднённой системы (12) с двумя состояниями равновесия, а на рис. 1, *b* изображены предельные циклы в системе (11) (устойчивый предельный цикл выделен красным).

2.2. Система Лоренца. Рассмотрим систему Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = -zx + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz, \quad (13)$$

где $\sigma > 0$ – число Прандтля, $r > 0$ – относительное число Рэлея, $0 \leq b < 4$ – параметр. Как указал В. И. Юдович [16] (см. также [17, 18]), с помощью замены переменных и времени

$$x \rightarrow \sqrt{2\sigma(r-1)}x, \quad z \rightarrow (r-1)(z+x^2), \quad t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{\sigma(r-1)}}$$

система приводится к виду

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (z-1)x + x^3 &= -\varepsilon\gamma\dot{x}, \\ \dot{z} &= \varepsilon(-az + \beta x^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\varepsilon = 1/\sqrt{r-1}$, $a = b/\sqrt{\sigma}$, $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$, $\gamma = (\sigma + 1)/\sqrt{\sigma}$ – параметры. Очевидно, что

$$a > 0, \quad \gamma = \frac{\beta + a}{2} + \frac{2}{\beta + a} \geq 2, \quad a + \beta = 2\sqrt{\sigma} > 0.$$

Рассмотрим случай, когда $r \gg 1$. Тогда $0 < \varepsilon \ll 1$ и система (14) близка к интегрируемой:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (z-1)x + x^3 &= 0, \\ \dot{z} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Из последнего уравнения системы (15) получаем $z = q = \text{const}$. Тем самым приходим к уравнению Дуффинга

$$\ddot{x} + (q-1)x + x^3 = 0. \quad (16)$$

Фазовый портрет этого уравнения качественно различается при $q < 1$ и при $q > 1$. При $q > 1$ уравнение (16) имеет в начале координат единственное состояние равновесия типа центр, окруженное замкнутыми фазовыми кривыми

$$\dot{x}^2/2 + (q - 1)x^2/2 + x^4/4 = h, \quad h > 0. \quad (17)$$

При $q < 1$ состояние равновесия $(0, 0)$ становится седловым и появляется ещё два центра $(0, \pm\sqrt{1 - q})$. Сепаратрисы седла $(0, 0)$ образуют две симметричные гомоклинические траектории (гомоклиническую «восьмёрку»). Замкнутым фазовым кривым, лежащим внутри «восьмёрки», отвечают значения h , удовлетворяющие неравенству $-(1 - q)^2/4 < h < 0$, а вне «восьмёрки» — неравенству $h > 0$. Гомоклинические траектории отвечают уровню гамильтониана $h = 0$. Решение на замкнутых фазовых кривых определяется через эллиптические функции Якоби по известным формулам:

$$X(\theta, k, q) = \pm \sqrt{\frac{2(1 - q)}{2 - k^2}} \operatorname{dn}(\mathbf{K}\theta/\pi), \quad k^2 = \frac{2\sqrt{4h + (1 - q)^2}}{1 - q + \sqrt{4h + (1 - q)^2}}, \quad (18)$$

при $q < 1, -(1 - q)^2/4 < h < 0$ (Случай А);

$$X(\theta, k, q) = \sqrt{\frac{2(q - 1)k^2}{1 - 2k^2}} \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\theta/\pi), \quad k^2 = \frac{1 - q + \sqrt{4h + (1 - q)^2}}{2\sqrt{4h + (1 - q)^2}}, \quad (19)$$

при $q < 1, h > 0$ и $q > 1, h > 0$ (Случай Б).

Здесь $\mathbf{K}(k), \mathbf{E}(k)$ — полные эллиптические интегралы I и II рода, k — их модуль, $\theta = \omega t$ — угловая координата, $\omega = \omega(k, q)$ — собственная частота. В Случае А значения k^2 принадлежат интервалу $(0, 1)$, а в Случае Б — интервалу $(0.5, 1)$ при $q < 1$ и интервалу $(0, 0.5)$ при $q > 1$. Собственная частота $\omega(k, q)$ находится следующим образом:

$$\omega = \frac{\pi}{\mathbf{K}(k)} \sqrt{\frac{1 - q}{2 - k^2}}$$

— в Случае А,

$$\omega = \frac{\pi}{2\mathbf{K}(k)} \sqrt{\frac{1 - q}{2k^2 - 1}}$$

— в Случае Б.

Пусть теперь $\varepsilon \neq 0$. Для рассматриваемых значений параметров система (14) имеет три состояния равновесия: $O(0, 0, 0)$ с собственными числами $\lambda_{1,2} = -\varepsilon\gamma/2 \pm \sqrt{1 + (\varepsilon\gamma/2)^2}$, $\lambda_3 = -\varepsilon a$ и $O^\pm(\pm\sqrt{a/(a + \beta)}, 0, \beta/(a + \beta))$ с собственными числами $\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon(\beta - \gamma)}{2} \pm i\sqrt{\frac{2a}{a + \beta}} + o(\varepsilon)$, $\lambda_3 = -\varepsilon(\beta + a) + o(\varepsilon)$. Точка O является седло-узлом с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразием, а O^\pm являются фокусами, асимптотически устойчивыми при $\beta > \gamma$.

Перейдём от переменных x, \dot{x}, z к переменным θ, I, z . Получим систему вида (4), в которой

$$B_1 = (-az + \beta X^2)(X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z) - \gamma Y X'_\theta, \\ B_2 = -az + \beta X^2,$$

а функция $X(\theta, k(I), z)$ определяется формулой (18) для Случая А и формулой (19) для Случая Б, $Y = \omega X'_\theta$. Из первого интеграла (17) находим $X'_\theta = \pm 1/\omega \sqrt{2h + (1 - z)X^2 - X^4/2}$, а из уравнения (16) $X''_{\theta^2} = 1/\omega^2((1 - z)X - X^3)$. Используя эти выражения, получаем $X'_z Y'_\theta - X'_\theta Y'_z = X^2/(2\omega)$. Поскольку правые части полученной системы зависят от I неявно, то удобнее перейти от переменной I к переменной k . Для этого необходима производная $\frac{\partial I}{\partial k}$. Очевидно,

$\frac{\partial I}{\partial k} = \frac{\partial I}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial k} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial h}{\partial k}$, где функция $h = h(k, z)$ находится путём обращения в (18) и (19) формулы для k^2 , в которой вместо q следует подставить z . Усредняя полученную систему по θ и сохраняя для наглядности прежние обозначения для усреднённых переменных, придём к системе первого приближения

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varepsilon \left(-az \int_0^{2\pi} X^2 d\theta + \beta \int_0^{2\pi} X^4 d\theta - 2\gamma \int_0^{2\pi} Y^2 d\theta \right) / (4\pi h'_k), \\ \dot{z} &= \varepsilon \left(-az + \frac{\beta}{2\pi} \int_0^{2\pi} X^2 d\theta \right). \end{aligned}$$

Используя (17) и (16), находим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} X^4 d\theta &= \frac{8}{3} \pi h(k, z) + \frac{4}{3} (1-z) \int_0^{2\pi} X^2 d\theta, \\ \int_0^{2\pi} Y^2 d\theta &= \frac{8}{3} \pi h(k, z) + \frac{1}{3} (1-z) \int_0^{2\pi} X^2 d\theta. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление правых частей усреднённой системы сводится к нахождению интеграла $\int_0^{2\pi} X^2 d\theta$. Вычисляя этот интеграл, приходим к усреднённой системе

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varepsilon \frac{(2-k^2)^2}{3k^3} \left(\left(\frac{-3az}{2(1-z)} + 2\beta - \gamma \right) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + (\beta - 2\gamma) \frac{k^2 - 1}{2 - k^2} \right), \\ \dot{z} &= \varepsilon \left(-az + \frac{2\beta(1-z)}{2 - k^2} \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \right), \end{aligned} \tag{20}$$

– в Случае А,

$$\begin{aligned} \dot{k} &= \varepsilon \frac{(2k^2 - 1)^2}{3k} \left(\left(\frac{3az}{2(1-z)} + \gamma - 2\beta \right) \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + \frac{k^2 - 1}{2k^2 - 1} \left(\frac{3az(2k^2 - 1)}{2(1-z)} - \beta(3k^2 - 2) - \gamma \right) \right), \\ \dot{z} &= \varepsilon \left(-az + \frac{2\beta(1-z)}{2k^2 - 1} \left(k^2 - 1 + \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} \right) \right), \end{aligned} \tag{21}$$

– в Случае Б.

Из того факта, что система Лоренца (13) диссипативна (дивергенция системы (13) равна $-\sigma - b - 1 < 0$), следует, что она не может иметь двумерных инвариантных торов. Усреднённые системы (20) и (21) не имеют предельных циклов, и задача сводится к исследованию их состояний равновесия. Приравнивая к нулю правые части системы (20), получаем порождающее уравнение для циклов в области $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$:

$$\left(-3\beta \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + (2\beta - \gamma)(2 - k^2) \right) \mathbf{E} + (\beta - 2\gamma)(k^2 - 1)\mathbf{K} = 0, \quad k^2 \in (0, 1).$$

Для каждого корня k соответствующее значение z находится по формуле $z = (2\beta\mathbf{E}) / (a(2 - k^2)\mathbf{K} + 2\beta\mathbf{E})$. Для циклов в областях $z < 1, h > 0$ и $z > 1, h > 0$ получаем уравнение

$$\begin{aligned} &\left(3\beta \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + k^2 - 1 \right) + (\gamma - 2\beta)(2k^2 - 1) \right) \mathbf{E} + \\ &+ \left(3\beta \left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{K}} + k^2 - 1 \right) - \beta(3k^2 - 2) - \gamma \right) (k^2 - 1)\mathbf{K} = 0, \end{aligned}$$

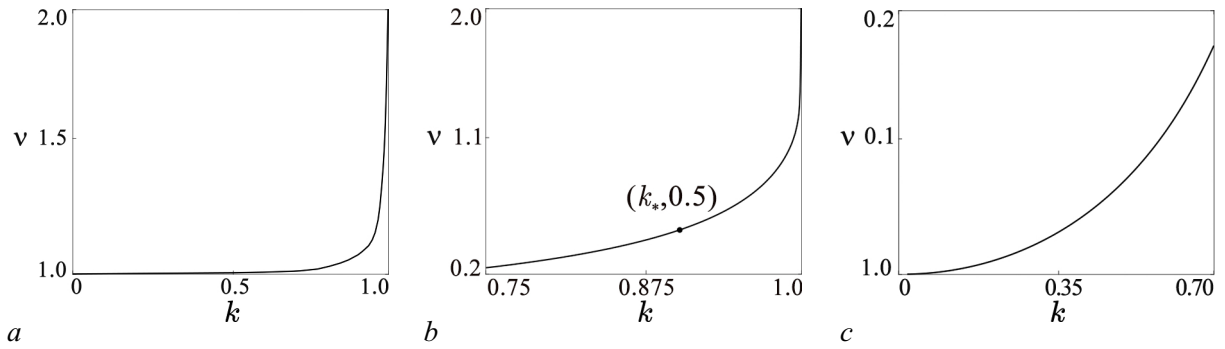


Рис. 2. Графики $v = v(k)$ для областей: $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$ (a); $z < 1, h > 0$ (b); $z > 1, h > 0$ (c)

Fig. 2. The graphs of $v = v(k)$ for the regions: $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$ (a); $z < 1, h > 0$ (b); $z > 1, h > 0$ (c)

где $k^2 \in (0.5, 1)$ для области $z < 1, h > 0$ и $k^2 \in (0, 0.5)$ для области $z > 1$. Для z имеем формулу $z = 2\beta((k^2 - 1)\mathbf{K} + \mathbf{E}) / ((a(2k^2 - 1) + 2\beta(k^2 - 1))\mathbf{K} + 2\beta\mathbf{E})$.

Выражая из полученных уравнений отношение $v = \gamma/\beta$ как однозначную функцию k и изменяя k в соответствующих пределах, находим значения параметра v , при которых в системе (14) появляются предельные циклы. Для Случая А имеем

$$v(k) = \frac{2(2 - k^2)\mathbf{E} + (k^2 - 1)\mathbf{K} - 3\mathbf{E}^2/\mathbf{K}}{(2 - k^2)\mathbf{E} + 2(k^2 - 1)\mathbf{K}};$$

для Случая Б

$$v(k) = \frac{(3\mathbf{E}/\mathbf{K} + k^2 + 1)\mathbf{E} + (-3\mathbf{E}/\mathbf{K} + 1)(k^2 - 1)\mathbf{K}}{(2k^2 - 1)\mathbf{E} - (k^2 - 1)\mathbf{K}}.$$

На рис. 2 приведены графики функций $v = v(k)$ для каждой из рассматриваемых областей. Из анализа этих функций следуют следующие выводы о предельных циклах системы (14).

1. В области $z < 1, -(1-z)^2/4 < h < 0$ при $1 < v < 2$ (в исходных параметрах $(2b + 1)/3 < \sigma < b + 1$) существует пара симметричных предельных циклов, каждый из которых охватывает один из устойчивых фокусов O^\pm . Соответствующее состояние равновесия усреднённой системы является седлом, поэтому эти циклы неустойчивы (седловые), см. рис. 3, a.

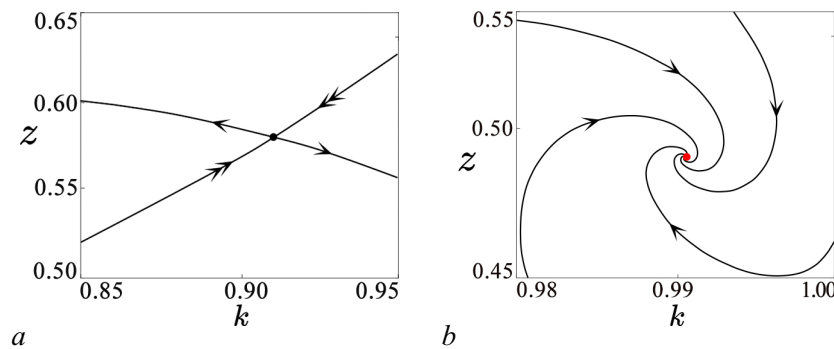


Рис. 3. Состояние равновесия усреднённой системы (20) при $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$ (a); состояние равновесия усреднённой системы (21) при $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$ (b)

Fig. 3. The equilibrium state of averaged system (20) at $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$ (a); the equilibrium state of averaged system (21) at $r = 1000, b = 2.6, \sigma = 3.4$ (b)

При $\nu \rightarrow 1$ ($\sigma \rightarrow b + 1$) циклы влипают в фокусы O^\pm (жёсткая бифуркация Андронова–Хопфа). В другом предельном случае при $\nu \rightarrow 2$ ($\sigma \rightarrow (2b + 1)/3$) циклы влипают в симметричные гомоклинические петли $h = 0, z = 0$ и затем исчезают.

2. В области $z < 1, h > 0$ при $0.5 < \nu < 2$ ($\sigma > (2b + 1)/3$) существует единственный асимптотически устойчивый предельный цикл, охватывающий оба фокуса. Фазовый портрет усреднённой системы (21) в окрестности устойчивого состояния равновесия показан на рис. 3, *b*. Неравенство $\nu > 0.5$ следует из условий на параметры $\nu = \frac{\sigma+1}{2(\sigma-b/2)} > 0.5$, причём $\nu \rightarrow 0.5$ при $\sigma \rightarrow +\infty$. Отметим, что при $\sigma \rightarrow +\infty$ соответствующее циклу значение k стремится к $k_* \approx 0.91$. При $\nu \rightarrow 2$ ($\sigma \rightarrow (2b + 1)/3$) цикл влипает в сепаратрисные петли $h = 0, z = 0$.

3. В области $z > 1$ (при этом $h > 0$) выполнено неравенство $0 < \nu(k) < 0.5$, поэтому для рассматриваемых значений параметров циклов в этой области нет.

Предельные циклы системы Лоренца при $b = 2.6, \sigma = 3.3, r = 500$ изображены на рис. 4, где красным цветом выделен устойчивый цикл, а чёрным – седловые.

Значение $\sigma = (2b + 1)/3$ – асимптотическое при $r \rightarrow +\infty$ значение, соответствующее образованию двух симметричных гомоклинических петель в системе (13). Если r фиксировано, то при их разрушении, кроме двух седловых предельных циклов внутри «восьмёрки», появляется инвариантное множество со сложной динамикой, содержащее счётное множество седловых циклов, не обнаруживаемых методом усреднения⁶. Эта бифуркация играет важную роль в появлении аттрактора Лоренца [19]. Значение $\sigma = b + 1$ – асимптотическое при $r \rightarrow +\infty$ значение, соответствующее стягиванию седловых предельных циклов в устойчивые фокусы (обратная бифуркация Андронова–Хопфа). При фиксированном r эта бифуркация может приводить к жесткому режиму возбуждения стохастичности [19]. Отметим также, что при фиксированных значениях σ, b и увеличении r аттрактор Лоренца вырождается в квазиаттрактор, а затем – в устойчивый предельный цикл, который и обнаруживается методом усреднения. Как показывают компьютерные вычисления, при обратном изменении r с данным циклом происходит каскад бифуркаций удвоения (см. рис. 5).

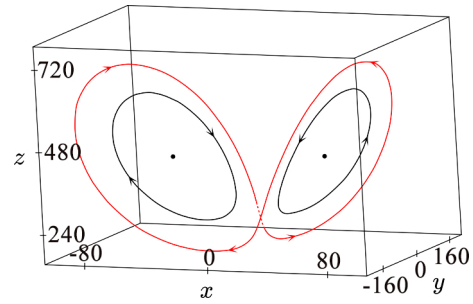


Рис. 4. Предельные циклы системы (13) при $b = 2.6, \sigma = 3.3, r = 500$. Красным цветом выделен орбитально устойчивый цикл, чёрным – седловые (цвет онлайн)

Fig. 4. The limit cycles of system (13) at $b = 2.6, \sigma = 3.3, r = 500$. The stable cycle is highlighted in red, the saddle ones are highlighted in black (color online)

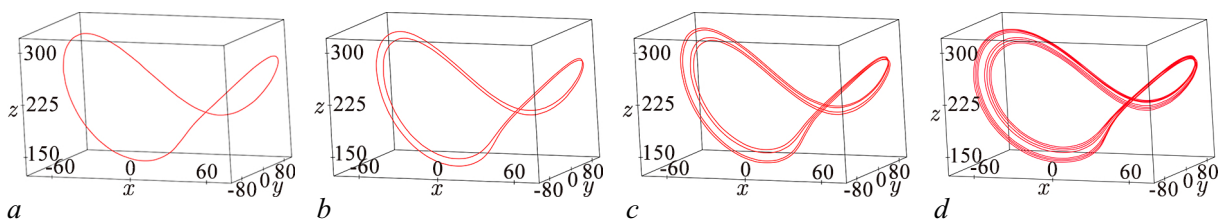


Рис. 5. Устойчивый предельный цикл системы (13) при $b = 2.6, \sigma = 10$ и $r = 250$ (a), $r = 230$ (b), $r = 222$ (c), $r = 220.4$ (d)

Fig. 5 The stable limit cycle of system (13) at $b = 2.6, \sigma = 10$ and $r = 250$ (a), $r = 230$ (b), $r = 222$ (c), $r = 220.4$ (d)

⁶Это подчеркивает неприменимость метода усреднения в окрестности сепаратрисной поверхности.

Заключение

В работе рассматриваются неконсервативные автономные возмущения трёхмерных интегрируемых систем. Основное внимание уделяется применению метода усреднения для анализа предельных циклов. Показано, что гиперболические состояния равновесия усреднённой системы первого приближения определяют замкнутые фазовые траектории невозмущённой системы, в окрестности которых под действием возмущения появляются циклы. Таким образом, рассматриваемая задача приводит к исследованию порождающей системы двух алгебраических или трансцендентных уравнений по аналогии с порождающим уравнением Пуанкаре–Понтрягина для двумерных систем, близких к гамильтоновым. В статье рассматриваются два примера — трёхмерная система типа ван дер Поля и система Лоренца. Для примеров проведён анализ предельных циклов описанным в работе методом: вычислены усреднённые системы и исследованы их состояния равновесия. Построены соответствующие фазовые портреты.

Список литературы

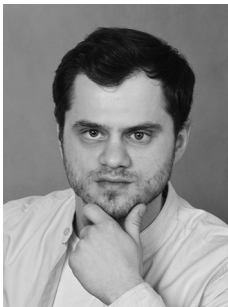
1. Морозов А. Д., Шильников Л. П. О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // ПММ. 1983. Т. 47, № 3. С. 385–395. DOI: 10.1016/0021-8928(83)90058-8.
2. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 420 с.
3. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems // Differential Equations. 2017. Vol. 53, no. 12. P. 1607–1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047.
4. Morozov A. D., Morozov K. E. Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, no. 2. P. 187–198. DOI: 10.20537/nd190208.
5. Morozov A. D., Morozov K. E. Quasi-periodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems with nonmonotone rotation // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 6, no. 255. P. 741–752. DOI: 10.1007/s10958-021-05411-5.
6. Morozov A. D., Morozov K. E. Synchronization of quasi-periodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case // Chaos. 2021. Vol. 31, no. 8. P. 083109. DOI: 10.1063/5.0055262.
7. Morozov A. D., Morozov K. E. Degenerate resonances and synchronization in nearly Hamiltonian systems under quasi-periodic perturbations // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, no. 5. P. 572–585. DOI: 10.1134/S1560354722050057.
8. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1934. Т. 4, № 9. С. 883–885.
9. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М: Наука, 1967. 488 с.
10. Жевакин С. А. Об отыскании предельных циклов в системах, близких к некоторым нелинейным // ПММ. 1951. Т. 15, № 2. С. 237–244.
11. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. общ. 1963. Т. 12. С. 3–52.
12. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с. DOI: 10.1007/978-1-4757-2063-1.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.
14. Аносов Д. В. Грубые системы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.

15. Hale J. K. Ordinary differential equations. N.Y.: R. E. Krieger Pub. Co., 1980. 361 p.
16. Юдович В. И. Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея // Деп. в ВИНТИ. 1978. № 2611-78. С. 2–8.
17. Robbins K. A. Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1979. Vol. 36, no. 3. P. 457–472. DOI: 10.1137/0136035.
18. Покровский Л. А. Решение системы уравнений Лоренца в асимптотическом пределе большого числа Рэлея. I. Система Лоренца в простейшей квантовой модели лазера и приложение к ней метода усреднения // Теоретическая и математическая физика. 1985. Т. 62, № 2, С. 272–290. DOI: 10.1007/BF01033529.
19. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца // Тр. ММО. 1982. Т. 44, С. 150–212.

References

1. Morozov AD, Shilnikov LP. On nonconservative periodic systems similar to two-dimensional Hamiltonian ones. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984; 47(3):327–334. DOI: 10.1016/0021-8928(83)90058-8.
2. Morozov AD. Resonances, Cycles and Chaos in Quasi-Conservative Systems. Moscow-Izhevsk: Regular and Chaotic Dynamics; 2005. 420 p. (in Russian).
3. Morozov AD, Morozov KE. Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems. Differential Equations. 2017; 53(12):1607–1615. DOI: 10.1134/S0012266117120047.
4. Morozov AD, Morozov KE. Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019; 15(2):87–198. DOI: 10.20537/nd190208.
5. Morozov AD, Morozov KE. Quasi-periodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems with nonmonotone rotation. Journal of Mathematical Sciences. 2021; 6(255):741–752. DOI: 10.1007/s10958-021-05411-5.
6. Morozov AD, Morozov KE. Synchronization of quasi-periodic oscillations in nearly Hamiltonian systems: The degenerate case. Chaos. 2021; 31(8): 083109. DOI: 10.1063/5.0055262.
7. Morozov AD, Morozov KE. Degenerate resonances and synchronization in nearly Hamiltonian systems under quasi-periodic perturbations. Regular and Chaotic Dynamics. 2022;27(5):572–585. DOI: 10.1134/S1560354722050057.
8. Pontryagin LS. On dynamical systems close to Hamiltonian. Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1934; 4(9):883–885. (in Russian).
9. Andronov AA, Leontovoch EA, Gordon II, Maier AG. Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane. M: Nauka, 1967. 482 p.
10. Zhevakin SA. On finding limit cycles in systems close to particular nonlinear ones. Journal of Applied Mathematics and Mechanic. 1951; 15(2):237–244. (in Russian).
11. Melnikov VK. On the stability of a center for time-periodic perturbations. Tr. Mosk. Mat. Obs. 1963;12:3–52. (in Russian).
12. Arnold VI. Mathematical Methods of Classical Mechanics. NY: Springer New York; 1989. 520 p. DOI: 10.1007/978-1-4757-2063-1.
13. Bogolubov NN, Mitropolskiy YA. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. Delhi: Hindustan Publishing Corp.; New York: Gordon and Breach Science Publishers; 1961, 537 p.
14. Anosov DV. Structurally stable systems. Tr. MIAN USSR. 1985;169:59–93. (in Russian).
15. Hale JK. Ordinary differential equations. N.Y.: R. E. Krieger Pub. Co.; 1980. 361 p.

16. Udovich VI. Asymptotics of limit cycles of the Lorenz system at large Rayleigh numbers. VINTI. 1978;2611-78:2–8. (in Russian).
17. Robbins KA. Periodic solutions and bifurcation structure at high R in the Lorenz model. SIAM Journal on Applied Mathematics. 1979;36(3):457–472. DOI: 10.1137/0136035.
18. Покровский Л. А. Solution of the system of Lorenz equations in the asymptotic limit of large Rayleigh numbers. I. The Lorenz system in the simplest quantum laser model and application to it of the method of averaging. Theoretical and mathematical physics. 1985;62(2):272–290. DOI: 10.1007/BF01033529.
19. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type Tr. Mosk. Math. Soc. 1983;2:153–216.



Морозов Кирилл Евгеньевич — родился в Нижнем Новгороде (1994). Окончил с отличием Институт информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского по направлению подготовки «Математика и компьютерные науки» (2018). Кандидат физико-математических наук (2020, ННГУ). С 2020 года работает на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, с 2023 года — в должности доцента. Научные интересы — динамические системы, близкие к интегрируемым; теория бифуркаций; теория динамического хаоса. Опубликовал свыше 20 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603000 Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
 Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: kirill.morozov@itmm.unn.ru
 ORCID: 0000-0001-9089-6813
 AuthorID (eLibrary.Ru): 1066884