

Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.958:57, 517.956.4

DOI: 10.18500/0869-6632-003141  
EDN: VMCMSE

## Асимптотическое решение для SIS-модели с учётом миграции и диффузии

*А. Э. Рассадин*

Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия  
E-mail: ✉ brat\_ras@list.ru

*Поступила в редакцию 25.06.2024, принята к публикации 4.11.2024,  
опубликована онлайн 20.11.2024*

**Аннотация.** Цель настоящей работы — предложить и исследовать простую и эффективную модель эпидемии в популяции животных, учитывающую миграцию по плоскости как заболевших, так и оставшихся здоровыми особей. В рамках данной модели пространственная миграция популяции описывается введением в её уравнения и диффузионных, и адвективных членов. **Методы.** В данной работе для нахождения асимптотического решения системы уравнений эпидемии применялся метод многих масштабов. Решения вспомогательных линейных уравнений параболического типа, возникающих при проведении этой процедуры, находились с помощью интеграла Пуассона. Упрощение исходной системы уравнений модели производится на основе предположения о постоянстве в начальный момент времени суммы плотностей здоровых и больных особей на односвязной области большого диаметра на плоскости. **Результаты.** Показано, что в этом случае сконструированное для медленно меняющейся начальной плотности больных особей, сосредоточенной внутри этой области на значительном удалении от её границ, асимптотическое решение модели описывает эффект слияния нескольких пространственно-разнесённых небольших вспышек заболевания в одну большую вспышку при миграции всей популяции как целого. В частности, для такой начальной плотности, получающейся функциональным преобразованием гауссоиды, на больших временах формируется круговое «плато» с линейно растущим со временем эффективным радиусом. **Заключение.** Построенное асимптотическое решение предложенной в данной работе модели эпидемии несложно по форме и описывает перенос заболевания на локально плоском участке земной поверхности без применения численных методов. Такое решение удобно при описании миграции больной популяции под воздействием наводнения, лесного пожара, техногенной катастрофы с заражением местности и т. д.

**Ключевые слова:** движущаяся система координат, малый параметр, медленные переменные, логистическая кривая, метод вариации постоянной, задача Коши, уравнение Кардара–Паризи–Жанга, равномерность асимптотического разложения, образование структур.

**Для цитирования:** Рассадин А. Э. Асимптотическое решение для SIS-модели с учётом миграции и диффузии // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003141. EDN: VMCMSE

*Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

## An asymptotic solution for the SIS epidemic model, taking into account migration and diffusion

A. E. Rassadin

National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia  
E-mail: [brat\\_ras@list.ru](mailto:brat_ras@list.ru)

*Received 25.06.2024, accepted 4.11.2024, available online 20.11.2024*

**Abstract.** The purpose of this work is to propose and investigate a simple and effective model of an epidemic in an animal population that takes into account migration along the plane of both diseased and healthy individuals. Within the framework of this model, the spatial migration of a population is described by introducing both diffusion and advective terms into its equations. *Methods.* In this paper, a method of many scales was used to find an asymptotic solution to the system of equations of the epidemic. Solutions of auxiliary linear equations of the parabolic type arising during this procedure were found using the Poisson integral. The simplification of the initial system of equations of the model is based on the assumption that the sum of densities of healthy and sick individuals on a single-connected region of large diameter on the plane is constant at the initial moment of time. *Results.* It is shown that in this case, designed for a slowly changing initial density of sick individuals concentrated inside this area at a considerable distance from its boundaries, the asymptotic solution of the model describes the effect of merging several spatially spaced small outbreaks of the disease into one large outbreak during migration of the entire population as a whole. In particular, for such an initial density obtained by the functional transformation of a Gaussian, a circular plateau is formed over long periods with an effective radius that grows linearly over time. *Conclusion.* The constructed asymptotic solution of the epidemic model proposed in this paper is simple in form and describes the transfer of the disease on a locally flat area of the earth’s surface without the use of numerical methods. This solution is convenient when describing the migration of a sick population under the influence of flooding, forest fire, man-made disaster with contamination of the area, etc.

**Keywords:** moving coordinate system, small parameter, slow variables, the logistic curve, the method of variation of the constant, the Cauchy problem, the Kardar-Parisi-Zhang equation, the uniformity of the asymptotic expansion, formation of structures.

**For citation:** Rassadin AE. An asymptotic solution for the SIS epidemic model, taking into account migration and diffusion. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2024;32(6):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003141

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Уже почти сто лет, начиная с классических работ А. Лотки [1] и В. Вольтерра [2], популяционная динамика служит «полигоном» для приложения идей и методов нелинейной динамики [3, 4].

Важным разделом популяционной динамики является совокупность методов описания мигрирующих популяций (см. [5–7] и ссылки там). Другой, не менее значимый раздел популяционной динамики — математическая эпидемиология [8], описывающая динамику заболевших популяций.

На стыке этих двух разделов популяционной динамики возникает серия задач эпидемиологического характера, посвященных изучению пространственно-временной динамики популяции, в которых рассматриваются заражение особей популяции и распространение болезни как в результате взаимодействия между особями, так и в ходе их миграции [9–11].

Рассмотрим следующую математическую модель для задачи такого рода:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x I = D \nabla_x^2 I + \beta S I - \gamma I, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x S = D \nabla_x^2 S - \beta S I + \gamma I. \quad (1)$$

В этих уравнениях  $S(\vec{x}, t)$  — плотность здоровых особей (susceptible) в популяции в точке  $\vec{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  в момент времени  $t$ ;  $I(\vec{x}, t)$  — плотность заболевших особей (infected);

$\nabla_x = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$  – двумерный градиент;  $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$  – вектор скорости миграции, который может зависеть от времени;  $D$  – коэффициент диффузии популяции;  $\beta$  – скорость распространения заболевания;  $\gamma$  – темп выздоровления.

Кинетическая часть в системе уравнений (1) соответствует кинетической части, предложенной в статье [12] и позднее получившей название SIS-модели [8].

Учёт пространственной миграции заболевшей популяции здесь производится двумя способами: введением в уравнения (1) адвективных членов (как это было сделано в работах [13, 14]) и дополнением уравнений модели диффузионными членами (как в работах [15, 16]). Поскольку в рассматриваемой модели выздоровевшие особи мгновенно становятся здоровыми, минуя попадание в группу иммунных особей, то есть рассматриваемое заболевание предполагается протекающим довольно легко, поэтому коэффициенты диффузии здоровых и заболевших особей можно считать одинаковыми.

Эту нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных необходимо дополнить начальными условиями – начальными плотностями больных  $I_0(\vec{x})$  и здоровых  $S_0(\vec{x})$ :

$$I(\vec{x}, 0) = I_0(\vec{x}), \quad S(\vec{x}, 0) = S_0(\vec{x}), \quad (2)$$

причём обе функции в (2) должны быть неотрицательными при всех  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Далее статья организована следующим образом: в разделе 1 изложена теория нахождения общего асимптотического решения задачи Коши (1)–(2) для случая медленно меняющейся начальной плотности больных в ситуации, когда сумма плотностей здоровых и больных постоянна в достаточно большой области. В разделе 2 приведены примеры асимптотических решений, соответствующие эпидемиологически реалистичным начальным условиям. В Заключение суммированы полученные результаты и намечены перспективы дальнейших исследований.

## 1. Построение асимптотического решения

Исследование задачи Коши (1)–(2) начнём с анализа поведения полной плотности особей в популяции  $N(\vec{x}, t)$ :

$$N(\vec{x}, t) = I(\vec{x}, t) + S(\vec{x}, t). \quad (3)$$

Сложив друг с другом оба уравнения системы (1), получим, что функция (3) удовлетворяет линейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x N = D \nabla_x^2 N. \quad (4)$$

Начальное условие к уравнению (4) легко получается из формулы (3):

$$N(\vec{x}, 0) = I_0(\vec{x}) + S_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (5)$$

Введём новую переменную  $\vec{y}$ :

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\xi}(t), \quad \vec{\xi}(t) = \int_0^t \vec{V}(t') dt'. \quad (6)$$

Очевидно, что формула (6) выражает перенос начала координат в точку с радиус-вектором  $\vec{\xi}(t)$  (при  $t = 0$  эти системы координат совпадают, поскольку  $\vec{\xi}(0) = \vec{0}$ ).

В новых координатах уравнение (4) приводится к канонической форме [17] вида

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D \nabla_y^2 N. \quad (7)$$

Уравнение (7) является двумерным уравнением диффузии–теплопроводности с постоянным коэффициентом, значит, решение задачи Коши (4)–(5) даётся следующей модификацией интеграла Пуассона [17]:

$$N(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi Dt} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{(\vec{x} - \vec{\xi}(t) - \vec{\eta})^2}{4Dt}\right] N(\vec{\eta}, 0) d^2\eta. \quad (8)$$

Из выражения (8) легко получается следующая формула:

$$\int_{\mathbb{R}^2} N(\vec{x}, t) d^2x = \int_{\mathbb{R}^2} N(\vec{x}, 0) d^2x. \quad (9)$$

Равенство (9) представляет собой закон сохранения полного числа особей в популяции. Оно непосредственно демонстрирует, что рассматриваемая болезнь является довольно слабой, поскольку из-за неё ни одна особь популяции не умирает. Кроме того, этот закон сохранения иллюстрирует неявное предположение модели (1) о том, что характерное время  $T$  распространения данной инфекции в популяции много меньше характерного времени изменения численности популяции за счёт рождений молодых и смертей старых её особей.

После того, как функция (8) полностью определена, с помощью формулы (3) систему уравнений (1) можно свести к одному уравнению для плотности заболевших особей:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \vec{V}(t) \cdot \nabla_x I = D \nabla_x^2 I + \beta (N(\vec{x}, t) - I) I - \gamma I. \quad (10)$$

Однако решать это уравнение ничуть не легче, чем исходную систему (1), поэтому для упрощения уравнения (10) предположим, что начальная плотность популяции равна

$$N(\vec{x}, 0) = N_0 \vartheta(\Lambda - |x_1|) \vartheta(\Lambda - |x_2|), \quad (11)$$

где  $\vartheta(x)$  — функция Хевисайда, то есть в начальный момент времени вся популяция равномерно распределена с постоянной плотностью  $N_0$  внутри квадрата  $Q_\Lambda = [-\Lambda, \Lambda] \times [-\Lambda, \Lambda]$  со стороной  $2\Lambda$ .

Подставляя функцию (11) в интеграл (8), получим общее решение уравнения (4) для этого начального условия:

$$N(\vec{x}, t) = \frac{N_0}{4} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \xi_1(t) + \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_1 - \xi_1(t) - \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) \right] \cdot \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - \xi_2(t) + \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_2 - \xi_2(t) - \Lambda}{2\sqrt{Dt}}\right) \right], \quad (12)$$

где  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-q^2) dq$  — функция ошибок.

Формула (12) показывает, что вектор  $\vec{\xi}(t)$  определяет перемещение популяции как целого по плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Графики функции (12) в движущейся системе координат (6) для различных моментов времени приведены на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что при  $t \ll \Lambda^2/D$  начальное условие (11) изменяется очень мало, следовательно, при увеличении параметра  $\Lambda$  квадрат  $Q_\Lambda$ , на котором  $N(\vec{x}, t) \approx N_0$ , покрывает всё большую часть плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Это означает, что для всё больших промежутков времени  $t \ll \Lambda^2/D$  на квадрате  $Q_\Lambda$  в переменных (6) уравнение (10) можно заменить следующим уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D \nabla_y^2 I + \beta (N_0 - I) I - \gamma I. \quad (13)$$

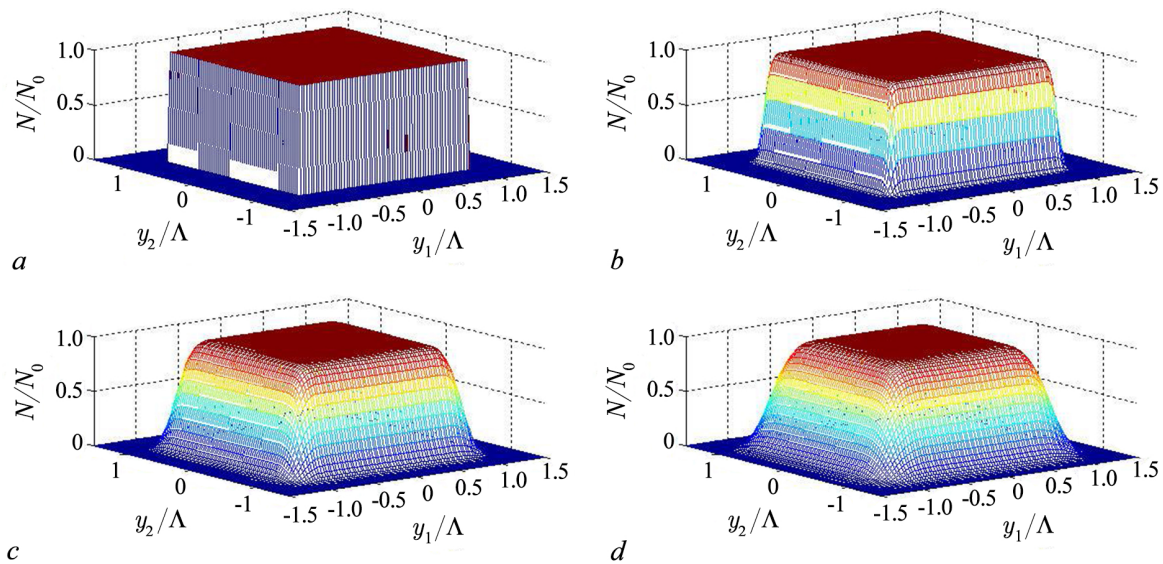


Рис. 1. Пространственно-временная эволюция полной плотности особей популяции:  $a - Dt/\Lambda^2 = 0$ ;  $b - Dt/\Lambda^2 = 0.001$ ;  $c - Dt/\Lambda^2 = 0.005$ ;  $d - Dt/\Lambda^2 = 0.01$  (цвет онлайн)

Fig. 1. Spatiotemporal evolution of the total density of individuals in a population:  $a - Dt/\Lambda^2 = 0$ ;  $b - Dt/\Lambda^2 = 0.001$ ;  $c - Dt/\Lambda^2 = 0.005$ ;  $d - Dt/\Lambda^2 = 0.01$  (color online)

Далее, пусть  $N_0 > \gamma/\beta$ , тогда после введения безразмерных переменных

$$u(\vec{z}, \tau) = \frac{I(\vec{x}, t)}{I_m}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad \vec{z} = \frac{\vec{y}}{l} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{\xi}(t)}{l}, \quad (14)$$

где

$$I_m = N_0 - \gamma/\beta, \quad T = \frac{1}{\beta N_0 - \gamma}, \quad l = \sqrt{\frac{D}{\beta N_0 - \gamma}} \quad (15)$$

— характерные масштабы плотности заболевших особей, времени и пространственных неоднородностей, уравнение (13) переписывается в безразмерном виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \nabla_{\vec{z}}^2 u + u(1 - u). \quad (16)$$

Это уравнение следует дополнить начальным условием:

$$I_0(\vec{x}) = I_m u_0 \left( \frac{\vec{x}}{L} \right), \quad 0 \leq u_0 \left( \frac{\vec{x}}{L} \right) \leq 1, \quad (17)$$

где  $L$  — его характерный пространственный масштаб. При этом начальная плотность числа заболевших  $I_0(\vec{x})$  должна быть сосредоточена внутри квадрата  $Q_\Lambda$ , на котором отлична от нуля функция (11), довольно далеко от его границ. Кроме того, необходимо, чтобы было выполнено очевидное неравенство:  $\Lambda \gg L$ .

Уравнение (16) является двумерным обобщением уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова [18]. С помощью метода, описанного в работе [19], для него можно построить широкий класс его асимптотических решений, а именно, если начальная плотность числа заболевших (17) меняется довольно медленно, то есть если характерный пространственный масштаб  $L$  функции (17) много больше характерного пространственного масштаба  $l$  (15) уравнения (13), то можно

ввести малый параметр  $\varepsilon = (l/L)^2 \ll 1$  и искать решение уравнения (16) в виде асимптотического ряда [19]:

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) = u^{(0)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) + \varepsilon u^{(1)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) + \dots, \quad (18)$$

где

$$\theta = \varepsilon \tau \equiv \frac{Dt}{L^2}, \quad \vec{\zeta} = \sqrt{\varepsilon} \vec{z} \equiv \frac{\vec{x} - \vec{\xi}(t)}{L} \quad (19)$$

— медленные переменные [19].

Далее, потребуем, чтобы в разложении (18) в нулевом приближении по  $\varepsilon$  выполнялось начальное условие (17), тогда функции  $u^{(0)}(\tau, \theta, \vec{\zeta})$  и  $u^{(1)}(\tau, \theta, \vec{\zeta})$  должны удовлетворять следующим соотношениям [19]:

$$u^{(0)}(0, 0, \vec{\zeta}) = u_0(\vec{\zeta}), \quad u^{(1)}(0, 0, \vec{\zeta}) = 0. \quad (20)$$

Подставляя ряд (18) в уравнение (16) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим, что искомые функции подчиняются обыкновенным дифференциальным уравнениям, в которых медленные переменные (19) являются параметрами

$$\frac{\partial u^{(0)}}{\partial \tau} = u^{(0)}(1 - u^{(0)}) \quad (21)$$

и

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = (1 - 2u^{(0)})u^{(1)} + \nabla_{\vec{\zeta}}^2 u^{(0)} - \frac{\partial u^{(0)}}{\partial \theta}. \quad (22)$$

Точное решение уравнения (21) можно записать в виде

$$u^{(0)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) = f(s), \quad s = \tau + \phi(\vec{\zeta}, \theta), \quad (23)$$

где  $f(s) = [1 + \exp(-s)]^{-1}$  — логистическая функция, а функция  $\phi(\vec{\zeta}, \theta)$  — пока произвольна.

Далее, подстановка функции (23) в уравнение (22) даёт

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} = (1 - 2f(s))u^{(1)} + \left( \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) f'(s) + (\nabla_{\vec{\zeta}} \phi)^2 f''(s). \quad (24)$$

Общее решение уравнения (24) легко находится методом вариации постоянной

$$u^{(1)}(\tau, \theta, \vec{\zeta}) = f'(s) \left[ \chi + \left( \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) s + (\nabla_{\vec{\zeta}} \phi)^2 \ln f'(s) \right], \quad (25)$$

где  $\chi = \chi(\vec{\zeta}, \theta)$  — ограниченная функция переменных  $\theta$  и  $\vec{\zeta}$ , также пока произвольная.

Для равномерности асимптотического разложения (18) по  $\varepsilon$  нужно потребовать, чтобы при  $s \rightarrow -\infty$  [19]:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \left| \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}} \right| = O(1). \quad (26)$$

Требование (26) будет выполнено, если функция  $\phi(\vec{\zeta}, \theta)$  удовлетворяет нелинейному уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = (\nabla_{\vec{\zeta}} \phi)^2 + \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \phi. \quad (27)$$

Уравнение (27) — это уравнение Кардара–Паризи–Жанга [20]. Для того чтобы оно имело однозначное решение для всех векторов  $\vec{\zeta} \in \mathbb{R}^2$ , необходимо задать для него начальное условие по медленному времени  $\theta$  [17]. Комбинируя первое из условий (20) и выражение (23) для нулевого приближения, легко получим это условие:

$$\phi(\vec{\zeta}, 0) = \ln \frac{u_0(\vec{\zeta})}{1 - u_0(\vec{\zeta})}. \quad (28)$$

Как хорошо известно [19, 20], заменой  $\phi(\vec{\zeta}, \theta) = \ln \psi(\vec{\zeta}, \theta)$  задача Коши (27)–(28) линеаризуется:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \nabla_{\vec{\zeta}}^2 \psi, \quad \psi(\vec{\zeta}, 0) = \frac{u_0(\vec{\zeta})}{1 - u_0(\vec{\zeta})}. \quad (29)$$

Точное решение задачи Коши (29) находится с помощью интеграла Пуассона [17]:

$$\psi(\vec{\zeta}, \theta) = \frac{1}{4\pi\theta} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left[-\frac{(\vec{\zeta} - \vec{\eta})^2}{4\theta}\right] \psi(\vec{\eta}, 0) d^2\eta. \quad (30)$$

Таким образом, асимптотическое решение уравнения (16) полностью построено:

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) \approx \frac{\psi(\sqrt{\varepsilon}\vec{z}, \varepsilon\tau)}{\psi(\sqrt{\varepsilon}\vec{z}, \varepsilon\tau) + \exp(-\tau)}, \quad (31)$$

где  $\psi(\vec{\zeta}, \theta)$  — функция, определяемая интегралом (30).

Перепишав функцию (31) в размерных переменных (14), получим асимптотическое решение задачи Коши (13) и (17) для плотности заболевших:

$$I(\vec{x}, t) \approx I_m \frac{\psi[(\vec{x} - \vec{\xi}(t))/L, Dt/L^2]}{\psi[(\vec{x} - \vec{\xi}(t))/L, Dt/L^2] + \exp[-(\beta N_0 - \gamma)t]}. \quad (32)$$

Подчеркнём, что правая часть формулы (32) описывает не только рост профиля плотности заболевших особей со временем, но и его перенос по траектории  $\vec{\xi}(t)$  с мгновенной скоростью  $\vec{V}(t)$ .

## 2. Примеры асимптотических решений

Рассмотрим конкретные примеры применения формулы (31), приводящие к явным выражениям.

Пусть начальное условие для уравнения (16) имеет вид

$$u_0(\vec{\zeta}) = \frac{b_0 \exp(-\vec{\zeta}^2)}{b_0 \exp(-\vec{\zeta}^2) + 1}, \quad (33)$$

где  $b_0$  — положительный параметр.

По функции (33) легко пересчитывается начальное условие для вспомогательного уравнения (29):

$$\psi(\vec{\zeta}, 0) = b_0 \exp(-\vec{\zeta}^2), \quad (34)$$

то есть оно оказывается гауссоидой.

Далее, из вспомогательного начального условия (34) по формуле (30) получаем решение вспомогательного уравнения (29):

$$\psi(\vec{\zeta}, \theta) = \frac{b_0}{1 + 4\theta} \exp\left(-\frac{\vec{\zeta}^2}{1 + 4\theta}\right), \quad (35)$$

а затем из него по формуле (31) получаем асимптотическое решение:

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) \approx \frac{b_0 \exp[-\varepsilon \vec{z}^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)]}{b_0 \exp[-\varepsilon \vec{z}^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)] + (1 + 4\varepsilon\tau) \exp(-\tau)}. \quad (36)$$

Графики правой части выражения (36) в движущейся системе координат при  $b_0 = 0.3$  и  $\varepsilon = 0.01$  для различных моментов времени приведены на рис. 2.

На рис. 2, *a* представлено начальное условие (33) в переменных  $(z_1, z_2)$ . Рис. 2, *b* показывает, как это начальное условие трансформируется к моменту безразмерного времени  $\tau = 4$ . Особо отметим, что за время  $t = \tau / (\beta N_0 - \gamma)$  в «физических» координатах  $(x_1, x_2)$  максимум распределения безразмерной плотности заболевших из начала координат сместился на радиус-вектор  $\vec{\xi}(t)$ . На рис. 2, *c* представлена безразмерная плотность заболевших в момент безразмерного времени  $\tau = 8$ . Из этого рисунка видно, что вблизи точки  $(0, 0)$  уже сформировано круговое «плато», на котором значения функции (36) близки к единице. Рис. 2, *d* демонстрирует график этой функции при  $\tau = 12$ . По сравнению с рис. 2, *c* радиус кругового «плато» на рис. 2, *d* стал больше, а граница перехода от единичного значения безразмерной плотности заболевших к её нулевому значению стала резче.

Несложно оценить, что при  $t \gg L^2/D$  радиус кругового «плато» функции (36) растёт приблизительно линейно со временем по закону  $|\vec{x} - \vec{\xi}(t)| \approx 2\sqrt{D(\beta N_0 - \gamma)t}$ , следовательно, в этом случае внутри «плато» плотность заболевших  $I(\vec{x}, t) \approx I_m$  и плотность здоровых  $S(\vec{x}, t) \approx \gamma/\beta$ , а вне этого «плато» плотность заболевших  $I(\vec{x}, t) \approx 0$  и плотность здоровых  $S(\vec{x}, t) \approx N_0$ .

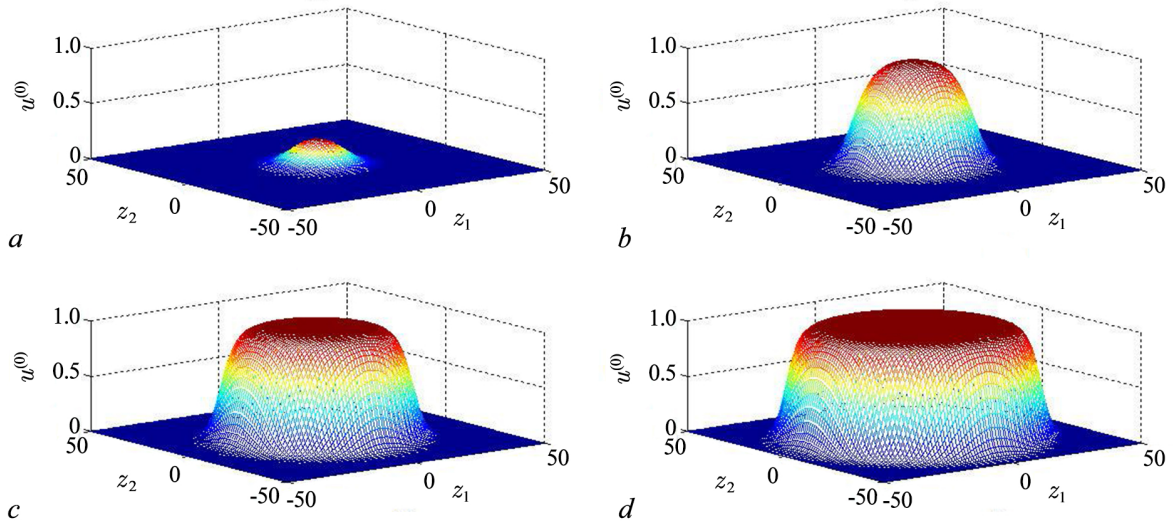


Рис. 2. Пространственно-временная эволюция безразмерной плотности заболевших из начального условия с одним максимумом: *a* –  $\tau = 0$ , *b* –  $\tau = 4$ , *c* –  $\tau = 8$ , *d* –  $\tau = 12$  (цвет онлайн)

Fig. 2. The spatiotemporal evolution of the dimensionless density of infected from the initial condition with one maximum: *a* –  $\tau = 0$ , *b* –  $\tau = 4$ , *c* –  $\tau = 8$ , *d* –  $\tau = 12$  (color online)



Пусть теперь начальное условие для уравнения (16) имеет вид

$$u_0(\vec{\zeta}) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2]}{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2] + 1}, \quad (37)$$

где  $b_i$  — положительные параметры и  $\vec{\zeta}_i$  — постоянные двумерные векторы ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Пересчитывая по функции (37) начальное условие для вспомогательного уравнения (29), получим, что в этом случае оно является линейной комбинацией гауссоид:

$$\psi(\vec{\zeta}, 0) = \sum_{i=1}^m b_i \exp[-(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2]. \quad (38)$$

Далее, в силу линейности вспомогательного уравнения (29) и постоянства его коэффициентов его решение, соответствующее вспомогательному начальному условию, представляется линейной комбинацией функций вида (35):

$$\psi(\vec{\zeta}, \theta) = \sum_{i=1}^m \frac{b_i}{1 + 4\theta} \exp\left[-\frac{(\vec{\zeta} - \vec{\zeta}_i)^2}{1 + 4\theta}\right]. \quad (39)$$

Наконец, подставляя формулу (39) в выражение (31), получим асимптотическое решение уравнения (16) для начального условия (37):

$$u(\vec{z}, \tau; \varepsilon) \approx \frac{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-\varepsilon(\vec{z} - \vec{z}_i)^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)]}{\sum_{i=1}^m b_i \exp[-\varepsilon(\vec{z} - \vec{z}_i)^2 / (1 + 4\varepsilon\tau)] + (1 + 4\varepsilon\tau) \exp(-\tau)}, \quad (40)$$

где  $\vec{z}_i$  — постоянные двумерные векторы, связанные с постоянными векторами  $\vec{\zeta}_i$  соотношениями  $\vec{\zeta}_i = \sqrt{\varepsilon} \vec{z}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Выберем  $m = 3$ ,  $b_1 = 0.6$ ,  $b_2 = 0.4$ ,  $b_3 = 0.2$ ,  $\vec{z}_1 = (20, 15)$ ,  $\vec{z}_2 = (-15, 10)$ ,  $\vec{z}_3 = (0, -15)$  и  $\varepsilon = 0.01$ .

Графики правой части выражения (40) в движущейся системе координат при этих значениях параметров для различных моментов времени приведены на рис. 3.

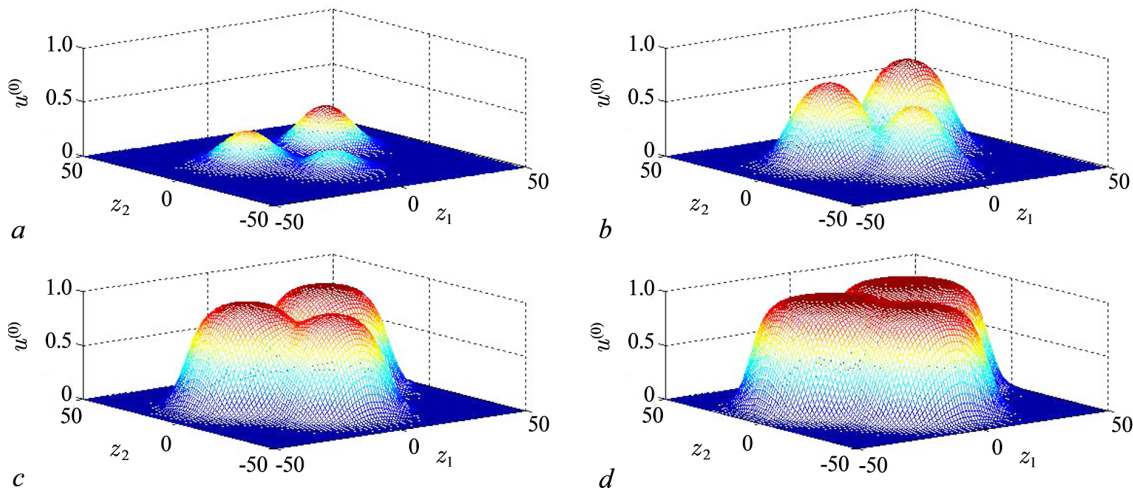


Рис. 3. Пространственно-временная эволюция безразмерной плотности заболевших из начального условия с тремя максимумами:  $a - \tau = 0$ ,  $b - \tau = 2$ ,  $c - \tau = 4$ ,  $d - \tau = 6$  (цвет онлайн)

Fig. 3. The spatiotemporal evolution of the dimensionless density of infected from the initial condition with three maxima:  $a - \tau = 0$ ,  $b - \tau = 2$ ,  $c - \tau = 4$ ,  $d - \tau = 6$  (color online)

На рис. 3, *a* представлено начальное условие (37) в переменных  $(z_1, z_2)$ . У него имеется три максимума. Рис. 3, *b–d* показывают, в какие профили безразмерной плотности заболевших трансформируется это начальное условие при  $\tau = 2$  (рис. 3, *b*),  $\tau = 4$  (рис. 3, *c*) и  $\tau = 6$  (рис. 3, *d*). Из этих рисунков видно, что с течением времени максимумы трёх гауссоид на рис. 3 растут, а сами гауссоиды начинают сливаться друг с другом.

Наконец, при  $\tau \gg 1$  из начального условия на рис. 3, *a* так же, как и в предыдущем примере, образуется «плато», близкое к единице. Однако форма этого «плато» отлична от круговой и определяется взаимным расположением векторов  $\vec{z}_1$ ,  $\vec{z}_2$  и  $\vec{z}_3$ . Впрочем, эффект образования единичного «плато» на больших временах присущ любому начальному условию, что видно непосредственно из формулы (31).

### Заключение

В работе предложена модель распространения эпидемии гипотетической болезни, которая учитывает миграцию заболевшей популяции. С математической точки зрения эта модель представляет собой нелинейную систему (1) из двух уравнений в частных производных параболического типа.

Для случая, когда сумма начальных плотностей заболевших и здоровых особей популяции постоянна на квадрате с большой стороной, а начальная плотность заболевших сосредоточена внутри этого квадрата и меняется медленно по сравнению с характерным пространственным масштабом (15) исходной системы (1), в явном виде построено её асимптотическое решение (32). Это решение описывает эффект слияния нескольких пространственно разнесённых небольших вспышек заболевания в одну большую вспышку.

Перспективой развития данной работы является сравнение полученных приближённых формул (36) и (40) с численными расчётами по исходным уравнениям (1) с начальными условиями (33) и (37) соответственно для оценки точности найденных асимптотических решений.

Интересно также выяснить, как влияет на асимптотическое решение (31) поправка  $u^{(1)}$  первого порядка к нему. Эта величина выписана в формуле (25), однако в неё помимо известной функции  $\phi(\vec{\zeta}, \theta)$  входит и неизвестная функция  $\chi(\vec{\zeta}, \theta)$ , ибо второе из условий (20) даёт возможность найти только её начальный профиль  $\chi(\vec{\zeta}, 0)$ . Для того чтобы определить эту функцию, надо получить и решить обыкновенное дифференциальное уравнение по  $\tau$  для поправки  $u^{(2)}(\tau, \theta, \vec{\zeta})$  второго порядка к асимптотическому решению, и после этого из требования её равномерности, аналогичному условию (26), извлечь дифференциальное уравнение в частных производных для искомой функции  $\chi(\vec{\zeta}, \theta)$ .

В заключение отметим, что хотя предложенная модель эпидемии (1)–(2) применима и для мигрирующих по локально плоским участкам поверхности Земли популяций копытных, грызунов и т. д., вообще говоря, очевидно, что развитая в данной работе теория может быть распространена и на популяции, мигрирующие в пространстве  $\mathbb{R}^3$  — в атмосфере (стаи птиц и насекомых) и гидросфере (стаи рыб и планктона).

### Список литературы

1. Lotka A. J. Elements of physical biology. Williams & Wilkins, 1925. 460 p.
2. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi // Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. 1926. Vol. 2. P. 31–113.
3. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985. 181 с.

4. *Ризниченко Г. Ю.* Лекции по математическим моделям в биологии. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 560 с.
5. *Фрисман В. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П.* Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. *Белотелов Н. В., Коноваленко И. А.* Моделирование влияния подвижности особей на пространственно-временную динамику популяции на основе компьютерной модели // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8, № 2. С. 297–305. DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-2-297-305.
7. *Кулаков М. П., Фрисман В. Я.* Подходы к исследованию мультистабильности пространственно-временной динамики двухвозрастной популяции // Известия вузов. ПНД. 2020. Т. 28, № 6. С. 653–678. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-653-678.
8. *Brauer F., Castillo-Chavez C., Feng Z.* Mathematical models in epidemiology. Springer Science + Business Media, LLC, part of Springer Nature, 2019. 619 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-9828-9.
9. *Kant S., Kumar V.* Stability analysis of predator–prey system with migrating prey and disease infection in both species // Applied Mathematical Modelling. 2017. Vol. 42. P. 509–539. DOI: 10.1016/j.apm.2016.10.003.
10. *Шабунин А. В.* SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяции: Исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. ПНД. 2019. Т. 27, № 2. С. 5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
11. *Arif M., Abodayeh K., Ejaz A.* On the stability of the diffusive and non-diffusive predator-prey system with consuming resources and disease in prey species // Mathematical Biosciences and Engineering. 2023. Vol. 20, no 3. P. 5066–5093. DOI: 10.3934/mbe.2023235.
12. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* Contributions to the mathematical theory of epidemics. II. — The problem of endemicity // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1932. Vol. 138, no. 834. P. 55–83. DOI: 10.1098/rspa.1932.0171.
13. *Аристов В. В., Строганов А. В., Ястребов А. Д.* Применение модели кинетического типа для изучения пространственного распространения COVID-19 // Компьютерные исследования и моделирование. 2021. Т. 13, № 3. С. 611–627. DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-611-627.
14. *Бугров В. О., Рассадин А. Э.* Модель распространения пандемии с двумя устойчивыми состояниями // «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»: X Международная научная молодежная школа-семинар имени Е. В. Воскресенского (Саранск, 14–18 июля 2022 г.). С. 40–48.
15. *Bärwolff G.* A local and time resolution of the COVID-19 propagation — a two-dimensional approach for Germany including diffusion phenomena to describe the spatial spread of the COVID-19 pandemic // Physics. 2021. Vol. 3. P. 536–548. DOI: 10.3390/physics3030033.
16. *Viguerie A., Veneziani A., Lorenzo G., Baroli D., Aretz-Nellesen N., Patton A., Yankeelov T. E., Reali A., Hughes T. J. R., Auricchio F.* Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study // Computational Mechanics. 2020. Vol. 66. P. 1131–1152. DOI: 10.1007/s00466-020-01888-0.
17. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
18. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединённой с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Секция А. Математика и механика. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1–26.

19. Берман В. С. Об асимптотическом решении одной нестационарной задачи о распространении фронта химической реакции // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242, № 2. С. 265–267.
20. Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C. Dynamical scaling of growing interfaces // Physical Review Letters. 1986. Vol. 56. P. 889–892. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.889.

## References

1. Lotka AJ. Elements of physical biology. Williams & Wilkins; 1925. 460 p.
2. Volterra V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. 1926;2:31–113.
3. Bazykin AD. Mathematical biophysics of interacting populations. M.: Nauka; 1985. 181 p. (in Russian).
4. Rznichenko GYu. Lectures on mathematical models in biology. M.-Izhevsk: Institute of Computer Research, SPC “Regular and Chaotic Dynamics”; 2010. 560 p. (in Russian).
5. Frisman EYa, Kulakov MP, Revutskaya OL, Zhdanova OL, Neverova GP. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. Computer Research and Modeling. 2019;11(1):119–151. DOI: 10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151.
6. Belotelov NV, Konovalenko IA. Modeling the impact of mobility of individuals on space-time dynamics of a population by means of a computer model. Computer Research and Modeling. 2016;8(2):297–305. DOI: 10.20537/2076-7633-2016-8-2-297-305.
7. Kulakov MP, Frisman EYa. Approaches to study of multistability in spatio-temporal dynamics of two-age population. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(6):653–678. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-6-653-678.
8. Brauer F, Castillo-Chavez C, Feng Z. Mathematical models in epidemiology. Springer Science + Business Media, LLC, part of Springer Nature; 2019. 619 p. DOI: 10.1007/978-1-4939-9828-9.
9. Kant S, Kumar V. Stability analysis of predator–prey system with migrating prey and disease infection in both species. Applied Mathematical Modelling. 2017;42:509–539. DOI: 10.1016/j.apm.2016.10.003.
10. Shabunin AV. SIRS-model with dynamic regulation of the population: Probabilistic cellular automata approach. Izvestiya VUZ, Applied Nonlinear Dynamics. 2019;27(2):5–20. DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-2-5-20.
11. Arif M, Abodayeh K, Ejaz A. On the stability of the diffusive and non-diffusive predator-prey system with consuming resources and disease in prey species. Mathematical Biosciences and Engineering. 2023;20(3):5066–5093. DOI: 10.3934/mbe.2023235.
12. Kermack WO, McKendrick AG. Contributions to the mathematical theory of epidemics. II. — The problem of endemicity. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character. 1932;138(834):55–83. DOI: 10.1098/rspa.1932.0171.
13. Aristov VV, Stroganov AV, Yastrebov AD. Application of the kinetic type model for study of a spatial spread of COVID-19. Computer Research and Modeling. 2021; 13(3):611–627 (in Russian). DOI: 10.20537/2076-7633-2021-13-3-611-627.
14. Bugrov VO, Rassadin AE. The model of the spread of a pandemic with two stable states. Proceedings of the International Scientific Youth School-Seminar “Mathematical Modeling, Numerical Methods and Software complexes” named after E.V. Voskresensky (Saransk, July 14-18, 2022). Saransk: SVMO Publ.; 2022. P. 40–48. (in Russian).
15. Bärwolff G. A local and time resolution of the COVID-19 propagation — a two-dimensional approach for Germany including diffusion phenomena to describe the spatial spread of the COVID-19 pandemic. Physics. 2021;3:536–548. DOI: 10.3390/physics3030033.
16. Vignerie A, Veneziani A, Lorenzo G, Baroli D, Aretz-Nellesen N, Patton A, Yankeelov TE,

- Realì A, Hughes TJR, Auricchio F. Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study. *Computational Mechanics*. 2020;66:1131–1152. DOI: 10.1007/s00466-020-01888-0.
17. Tikhonov AN, Samarskii AA. *Equations of mathematical physics*. M.: Nauka; 1966. 724 p. (in Russian).
  18. Kolmogorov AN, Petrovsky IG, Piskunov NS. 'Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscou Univ. Bull. Math.* 1937;1(6):1–26.
  19. Berman VS. Asymptotic solution of a nonstationary problem on the propagation of the front of chemical reaction. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1978;242(2):265–267. (in Russian).
  20. Kardar M, Parisi G, Zhang YC. Dynamical scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*. 1986;56:889–892. DOI: 10.1103/PhysRevLett.56.889.



*Рассадин Александр Эдуардович* — родился в Горьком (1972). Окончил физический факультет Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского (1994), аспирантуру ННГУ (1997) и магистратуру Высшей школы экономики по специальности «Математика» (2022). С 2022 года — аспирант Высшей школы экономики на кафедре фундаментальной математики. Научные интересы — теоретическая физика, математическая физика, динамические системы, физика твёрдого тела, радиофизика, радиотехника, математическое моделирование. Опубликовал свыше 70 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
E-mail: brat\_ras@list.ru  
ORCID: 0000-0001-5644-4012  
AuthorID (eLibrary.Ru): 38363