



Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 6  
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(6)

Научная статья  
УДК 517.925 + 517.93

DOI: 10.18500/0869-6632-003133  
EDN: LDKTZM

### Об аттракторах лоренцевского типа в шестимерном обобщении модели Лоренца

Д. М. Сухарев<sup>1</sup>, В. А. Корякин<sup>1,2</sup>, А. О. Казаков<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет  
им. Н. И. Лобачевского, Россия

E-mail: dmsukharev@edu.hse.ru, vakoryakin@edu.hse.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.06.2024, принята к публикации 20.09.2024,

опубликована онлайн 14.11.2024, опубликована 29.11.2024

**Аннотация.** Тема работы — аттракторы лоренцевского типа в многомерных системах. Рассматривается шестимерная модель, описывающая конвекцию в слое жидкости с учетом примесей в атмосфере и жидкости, а также вращения Земли. Основная цель работы — исследование бифуркаций в соответствующей системе и описание сценариев возникновения хаотических аттракторов разного типа. **Результаты.** Показано, что в рассматриваемой системе может возникать как классический аттрактор Лоренца, теория которого была разработана в работах Афраймовича–Быкова–Шильникова, так и аттрактор нового типа, визуально похожий на аттрактор Лоренца, но содержащий при этом симметричную пару состояний равновесия. Установлено, что аттрактор Лоренца в данной системе рождается в результате классического сценария, предложенного Шильниковым. Предложен новый сценарий возникновения аттрактора второго типа в результате бифуркаций аттрактора Лоренца. В работе также обсуждаются гомоклинические и гетероклинические бифуркации, неизбежно возникающие внутри обнаруженных аттракторов, а также их возможная псевдогиперболичность.

**Ключевые слова:** хаотический аттрактор, псевдогиперболичность, аттрактор Лоренца, показатели Ляпунова, гомоклинические бифуркации, гетероклинические бифуркации.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке проекта «Зеркальные лаборатории НИУ ВШЭ» (разделы 1–3). Раздел 4 и Заключение выполнены при финансовой поддержке гранта РФФИ, 23-71-30008.

**Для цитирования:** Сухарев Д. М., Корякин В. А., Казаков А. О. Об аттракторах лоренцевского типа в шестимерном обобщении модели Лоренца // Известия вузов. ПНД. 2024. Т. 32, № 6. С. 816–831. DOI: 10.18500/0869-6632-003133. EDN: LDKTZM

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On Lorenz-type attractors in a six-dimensional generalization of the Lorenz model

*D. M. Sukharev*<sup>1</sup>, *V. A. Koryakin*<sup>1,2</sup>, *A. O. Kazakov*<sup>1</sup>✉

<sup>1</sup>National Research University “Higher School of Economics”, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: dmsukharev@edu.hse.ru, vakoryakin@edu.hse.ru, ✉kazakovdz@yandex.ru

Received 22.06.2024, accepted 20.09.2024, available online 14.11.2024, published 29.11.2024

**Abstract.** The topic of the paper — Lorenz-type attractors in multidimensional systems. We consider a six-dimensional model that describes convection in a layer of liquid, taking into account impurities in the atmosphere and liquid, as well as the rotation of the Earth. The main purpose of the work is to study bifurcations in the corresponding system and describe scenarios for the emergence of chaotic attractors of various types. **Results.** It is shown that in the system under consideration, both a classical Lorenz attractor (the theory of which was developed in the works of Afraimovich–Bykov–Shilnikov) and an attractor of a new type, visually similar to the Lorenz attractor, but containing a symmetric pair of equilibrium states, can arise. It has been established that the Lorenz attractor in this system is born as a result of the classical scenario proposed by L. P. Shilnikov. We propose a new scenario for the emergence of an attractor of the second type via bifurcations inside the Lorenz attractor. In the paper we also discuss homoclinic and heteroclinic bifurcations that inevitably arise inside the found attractors, as well as their possible pseudohyperbolicity.

**Keywords:** chaotic attractor, pseudohyperbolicity, Lorenz attractor, Lyapunov exponents, homoclinic bifurcations, heteroclinic bifurcations.

**Acknowledgements.** The work was carried out with the financial support of the project “Mirror Laboratories” HSE University (Sections 1-3). The studies in Section 4 and Conclusion were financially supported by the Russian Science Foundation, grant No. 23-71-30008.

**For citation:** Sukharev DM, Koryakin VA, Kazakov AO. On Lorenz-type attractors in a six-dimensional generalization of the Lorenz model. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2024;32(6):816–831. DOI: 10.18500/0869-6632-003133

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Аттрактор Лоренца, впервые обнаруженный Э. Лоренцем в 1963 году [1] в системе трех дифференциальных уравнений, является одним из наиболее известных и изученных типов странных аттракторов. Теория аттрактора Лоренца заложена в 70–80-х годах [2–6]. Один из наиболее эффективных способов изучения данного аттрактора связан с построением и анализом геометрической модели — отображения первого возвращения (Пуанкаре) — вблизи пары гомоклинических траекторий (так называемой гомоклинической «восьмерки-бабочки») к седловому состоянию равновесия с одномерным неустойчивым многообразием. Наиболее практичная модель аттрактора Лоренца предложена в работах Афраимовича–Быкова–Шильникова [2, 3]. Авторами этих работ даны достаточные, эффективно проверяемые условия, гарантирующие гиперболичность отображения Пуанкаре и, как следствие, робастность аттрактора Лоренца. Для системы Лоренца выполнение данных условий численно установлено в 1999 году в работе Такера [7]. Таким образом, было доказано, что открытый Лоренцем аттрактор действительно является хаотическим. При этом этот аттрактор не является гиперболическим (структурно устойчивым). Согласно работам [2, 3], в нем плотны гомоклинические траектории к состоянию равновесия, а следовательно, даже сколь угодно малые возмущения системы приводят к бифуркациям.

Гиперболические и лоренцевские (сингулярно-гиперболические) аттракторы входят в более широкий класс псевдогиперболических аттракторов. Согласно работам [8–10], системы с псевдоги-

перболическими аттракторами допускают разложение касательного пространства в прямую сумму двух непрерывно зависящих от точки линейных подпространств: центрального-неустойчивого  $E^{cu}$  и сильно сжимающего  $E^{ss}$ . Дифференциал системы экспоненциально растягивает объемы в подпространстве  $E^{cu}$ , что гарантирует положительность показателя Ляпунова у любой траектории аттрактора, и экспоненциально сжимает любые направления в подпространстве  $E^{ss}$ . При этом разложение на эту пару подпространств является доминантным, то есть любое сжатие в  $E^{ss}$  является более сильным, чем возможные сжатия в  $E^{cu}$ . Это, а также непрерывная зависимость подпространств от точки гарантирует, что максимальный показатель Ляпунова остается положительным у любой траектории аттрактора при малых возмущениях.

В данной работе мы исследуем обобщение классической системы Лоренца, учитывающее примеси (твердые частицы в атмосфере, а также мягкие частицы, растворенные в морской воде) и вращение Земли. Учет новых характеристик в процессе конвекции позволяет получить более физически обоснованную систему, задаваемую шестью уравнениями. Для этой системы мы проводим подробный бифуркационный анализ. Особый интерес связан с исследованием бифуркаций, приводящих к рождению хаотических аттракторов. Одним из основных результатов является обнаружение лоренцевского аттрактора нового типа, когда в аттракторе Лоренца нулевое состояние равновесия претерпевает бифуркацию «вилка», в результате чего оно получает двумерное неустойчивое многообразие и выходит из аттрактора. После этой бифуркации аттрактор содержит два седловых состояния равновесия с одномерными неустойчивыми многообразиями, замыкания которых и образуют этот аттрактор.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 мы сперва приводим классическую систему Лоренца, напоминаем ее физический смысл, после чего даем шестимерное обобщение данной системы, ранее предложенное в работе [11]. В разделе 2 приведены результаты локальных бифуркаций состояний равновесия в шестимерной системе, приведена соответствующая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров. Далее, в разделе 3, мы дополняем эту диаграмму результатами численного бифуркационного анализа с помощью пакета MatCont [12, 13] и результатами построения диаграммы показателей Ляпунова. На полученной карте режимов мы выделяем области существования аттракторов разного типа. Особый интерес связан с обнаружением областей существования аттрактора Лоренца и аттрактора нового типа, содержащего пару седловых состояний равновесия. В разделе 3 мы также приводим результаты однопараметрического бифуркационного анализа, описываем сценарии возникновения аттракторов лоренцевского типа. В частности, мы показываем, что в рассматриваемой шестимерной системе аттрактор Лоренца возникает, как и в системе Лоренца, в результате реализации сценария Шильникова [14]. В данном разделе мы также приводим новый сценарий перехода от аттрактора Лоренца к новому типу аттракторов, содержащему пару седловых состояний равновесия. В разделе 4 мы исследуем гомоклинические бифуркации, возникающие в области существования аттрактора Лоренца, а также гетероклинические бифуркации, возникающие при переходе через границы существования аттрактора Лоренца в область существования аттрактора нового типа. Выводы и обсуждения задач на будущее приведены в Заключение.

## 1. Система Лоренца и ее шестимерное обобщение

Впервые аттрактор Лоренца был обнаружен американским метеорологом Э. Лоренцем в 1963 году в трехмерной системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

Данная система получена как первое нетривиальное приближение для задачи конвекции в плоском слое воды. Здесь первое уравнение описывает движение жидкости по законам Ньютона, второе уравнение задает зависимость температуры от времени в процессе терморегуляции, третье уравнение отражает непрерывность потока среды. Соответственно, параметры в системе Лоренца имеют следующий физический смысл:  $\sigma$  — число Прандтля, этот параметр определяет подобие тепловых процессов в газах и жидкостях;  $r$  — безразмерное число Релея — характеризует поведение жидкости при изменении температуры;  $b$  — геометрический параметр, отвечающий за турбулентность.

Аттрактор Лоренца в системе (1) изображен на рис. 1, *a*. На рис. 1, *b* приведен портрет в момент гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка», играющей важнейшую роль в теории аттрактора Лоренца [2, 3].

В работе [11] предложено физически обоснованное обобщение системы Лоренца, задаваемое шестью дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) - \sigma(Le)^{-1}w + sv, \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{v} = -x - \sigma v, \\ \dot{w} = -xu + cx - (Le)^{-1}w, \\ \dot{u} = xw - (Le)^{-1}bu. \end{cases} \quad (2)$$

В этой системе, в отличие от трехмерной системы, помимо добавления трех новых переменных, появляются дополнительные параметры:  $c$  — безразмерный показатель, характеризующий

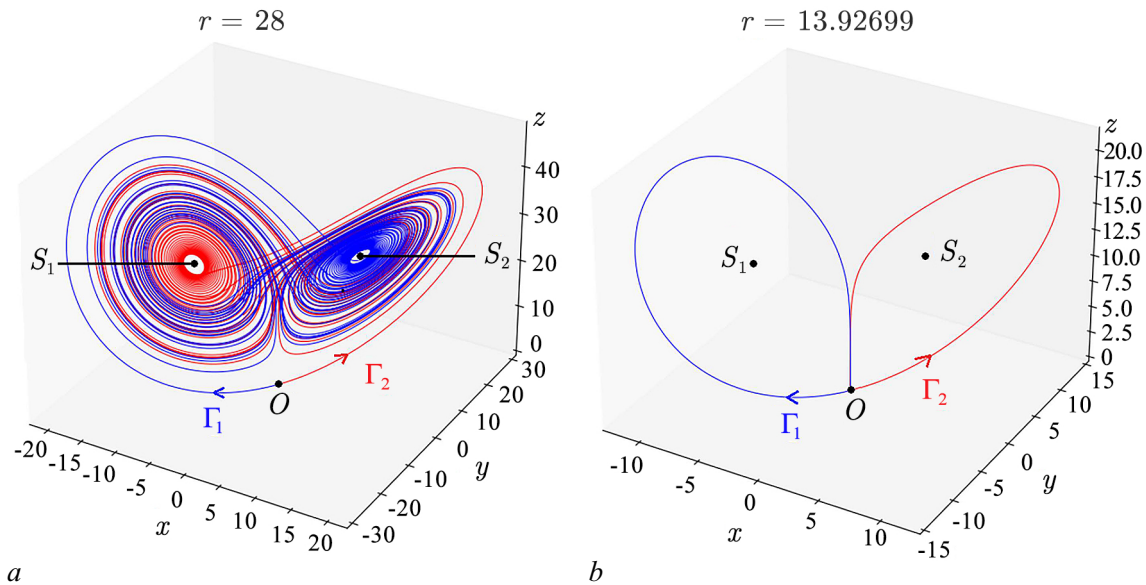


Рис. 1. Поведение неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1, \Gamma_2$  состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  в системе Лоренца ( $b = 8/3, \sigma = 10$ ): *a* —  $r = 28$ , сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  образуют аттрактор Лоренца; *b* —  $r \approx 13.927$ , сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  возвращаются в седловое состояние равновесия, образуя гомоклиническую «восьмерку-бабочку».  $S_1, S_2$  — симметричная пара седло-фокусных состояний равновесия (цвет онлайн)

Fig. 1. Behavior of unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  of the equilibrium state  $O(0, 0, 0)$  in the Lorenz system ( $b = 8/3, \sigma = 10$ ): *a* —  $r = 28$ , separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  form the Lorenz attractor; *b* —  $r \approx 13.927$ , separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  return to the saddle equilibrium state, forming a homoclinic figure-eight butterfly.  $S_1, S_2$  is a symmetric pair of saddle-focus equilibrium states (color online)



отношение между тепловой и диффузионной энергиями в процессе конвекции;  $Le$  — число Льюиса — безразмерный коэффициент, определяемый отношением массопереноса на показатель теплопроводности;  $s$  — геометрический параметр, описывающий вращение модельной рамки.

Заметим, что при  $(Le)^{-1} = 0$  и  $s = 0$  в шестимерной системе отделяется трехмерная подсистема, совпадающая в системой Лоренца. При занулении параметров  $(Le)^{-1}$  и  $s$  по отдельности в шестимерной системе отделяется четырехмерная и пятимерная подсистемы соответственно.

## 2. Бифуркации состояний равновесия

Система (2), аналогично классической модели Лоренца, обладает симметрией

$$S : x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z, v \rightarrow -v, w \rightarrow -w, u \rightarrow u.$$

В ней всегда существует тривиальное состояние равновесия  $O = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . В зависимости от значений параметров также могут существовать еще два или четыре состояния равновесия.

Для дальнейших исследований мы зафиксируем параметры

$$b = 8/3, c = 20, (Le)^{-1} = 0.1, s = 10 \quad (3)$$

и будем проводить исследования системы (2) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ .

На рис. 2 приведена бифуркационная диаграмма состояний равновесия. На кривой  $SN$  происходит седло-узловая бифуркация, в результате чего справа от этой кривой рождается еще

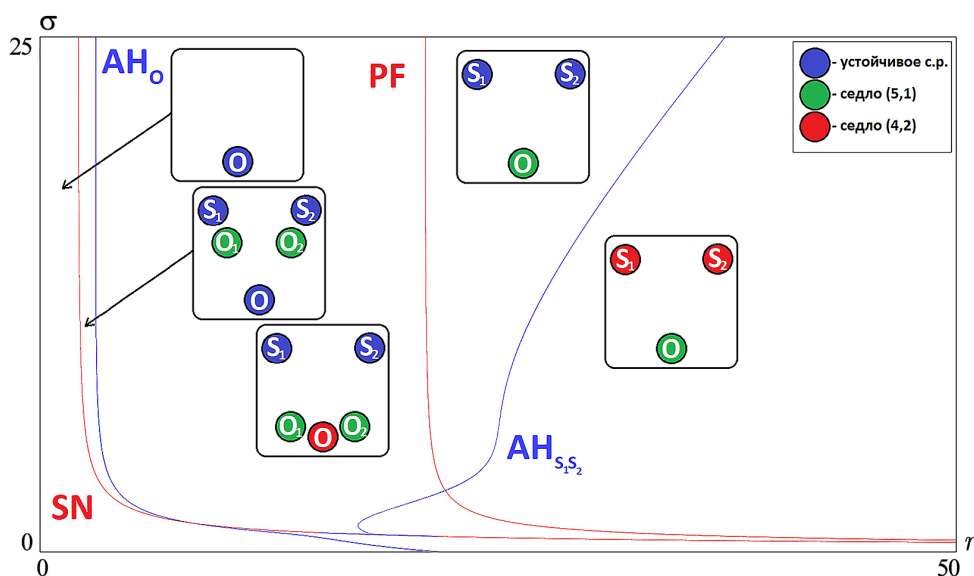


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для системы (2) на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ , остальные параметры зафиксированы согласно (3). На приведенных кривых происходят следующие бифуркации:  $SN$  — пара седло-узловых бифуркаций,  $AH_0$  — бифуркация Андронова–Хопфа состояния равновесия  $O$ ,  $PF$  — бифуркация «вилка» для  $O$ ,  $AH_{S_1 S_2}$  — бифуркация Андронова–Хопфа для состояний равновесия  $S_1, S_2$ . Во вставках внутри рисунка указаны конфигурации и тип состояний равновесия (цвет онлайн)

Fig. 2. Bifurcation diagram for system (2) on the parameter plane  $(\sigma, r)$ , other parameters are fixed according to (3). The following bifurcations occur on the depicted curves:  $SN$  — a pair of saddle-node bifurcations,  $AH_0$  — the Andronov–Hopf bifurcation of the equilibrium state  $O$ ,  $PF$  — the pitchfork bifurcation of  $O$ ,  $AH_{S_1 S_2}$  — the Andronov–Hopf bifurcation of the equilibrium states  $S_1, S_2$ . The insets inside the figure indicate the configurations and the type of the equilibrium states (color online)

две пары состояний равновесия:  $S_1$  и  $S_2$  — устойчивые, а также  $O_1$  и  $O_2$  — седла с одномерным неустойчивым многообразием. Состояние равновесия  $O$  является устойчивым слева от кривой  $AH_0$ , на которой оно претерпевает бифуркацию Андронова–Хопфа, в результате чего теряет устойчивость и становится седло-фокусом с двумерным неустойчивым многообразием справа от этой кривой.

Между кривыми  $SN$  и  $AH_0$  в системе три устойчивых состояния равновесия  $O$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  и два седловых состояния равновесия  $O_1$  и  $O_2$  с одномерным неустойчивым многообразием. Справа от кривой  $AH_0$  в системе два устойчивых состояния равновесия  $S_1$  и  $S_2$ , два седловых состояния равновесия с одномерным неустойчивым многообразием  $O_1$  и  $O_2$ , а также седловое состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием  $O$ . Кривая  $PF$  отвечает бифуркации «вилка» равновесия  $O$ . Справа от этой кривой конфигурация состояний равновесия в системе (2) такая же, как в системе Лоренца (1), а именно, существует три состояния равновесия:  $O$  — седло с одномерным неустойчивым многообразием и  $S_1$ ,  $S_2$ . Слева от кривой  $AH_{S_1S_2}$  эти два равновесия устойчивы, а справа — становятся седло-фокусами в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа.

### 3. Хаотическая динамика и аттракторы лоренцевского типа

Для выявления областей с хаотической динамикой построим диаграмму показателей Ляпунова на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ , рис. 3, а. Для удобства на эту диаграмму наложены вышеописанные кривые локальных бифуркаций состояний равновесия. На полученной карте

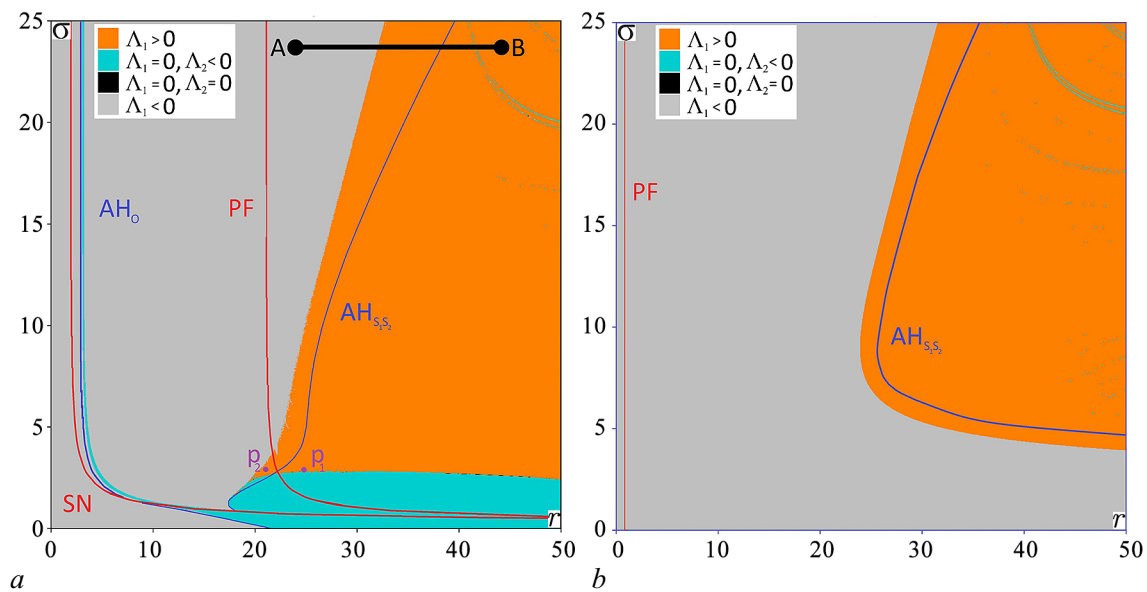


Рис. 3. Карты режимов ( $1000 \times 1000$  точек) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ : а — для системы (2) с параметрами, заданными согласно (3); б — для системы Лоренца (1) при  $b = 8/3$ . Изображенные кривые описаны в подписи к рис. 2, описание цветовой схемы приведено в легенде слева сверху, где  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$  — два старших показателя Ляпунова (цвет онлайн)

Fig. 3. Charts of regimes ( $1000 \times 1000$  points) on the plane of parameters  $(r, \sigma)$ : а — for system (2) with parameters fixed according to (3); б — for the Lorenz system (1) with  $b = 8/3$ . The depicted curves are described in the caption to Fig. 2, the description of the color scheme is given in the legend shown in the top-left inset, where  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$  are two maximal Lyapunov exponents (color online)

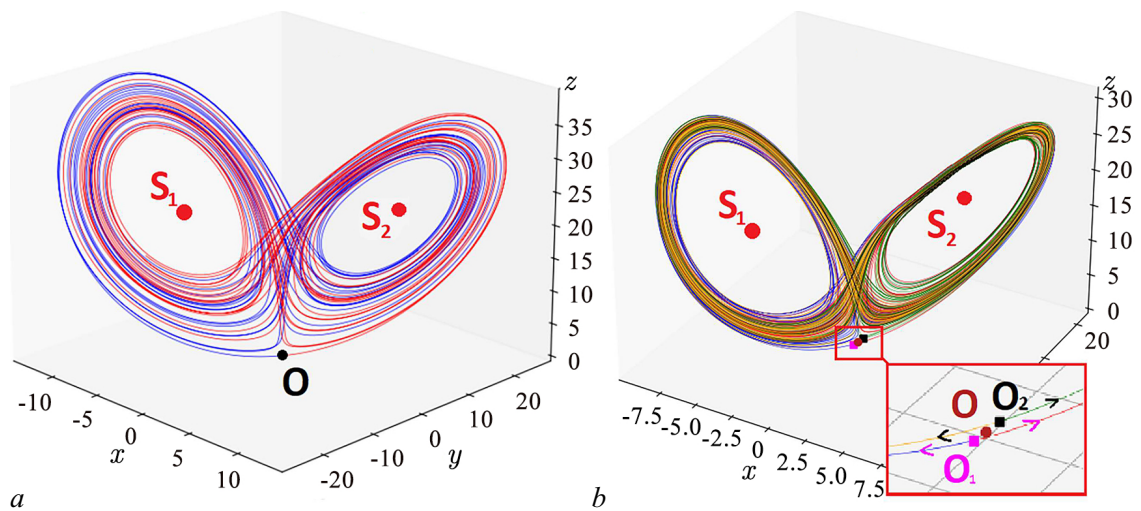


Рис. 4. Аттракторы лоренцевского типа в системе (2) при  $\sigma = 3$  (остальные параметры зафиксированы согласно (3)):  $a - r = 25$  (в точке  $p_1$  на карте режимов – справа от кривой  $PF$ );  $b - r = 21.1$  (в точке  $p_2$  на карте режимов – слева от кривой  $PF$ ). Во вставке на рис.  $b$  изображен увеличенный фрагмент фазового портрета вблизи состояний равновесия  $O, O_1, O_2$ . Разным цветом показаны разные сепаратрисы: синим и красным – сепаратрисы состояний равновесия  $O, O_1$ , желтым и зеленым – сепаратрисы состояния равновесия  $O_2$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Lorenz-type attractors in system (2) with  $\sigma = 3$  (other parameters are fixed according to (3)):  $a - r = 25$  (the point  $p_1$  on the chart of dynamical regimes – to the right of the curve  $PF$ );  $b - r = 21.1$  (the point  $p_2$  on the chart of dynamical regimes – to the left of curve  $PF$ ). The inset in Fig.  $b$  shows an enlarged fragment of the phase portrait near the equilibrium states  $O, O_1, O_2$ . Different separatrices are shown in different colors: blue and red – separatrices of the equilibrium states  $O, O_1$ , yellow and green – separatrices of the equilibrium state  $O_2$  (color online)

режимов видно, что большая часть области с хаотической динамикой находится справа от кривой  $PF$ , отвечающей бифуркации «вилка» состояния равновесия  $O$ . Однако небольшой фрагмент области существования хаотического аттрактора также наблюдается слева от кривой  $PF$ , где существует пять состояний равновесия, а состояние равновесия  $O$  имеет двумерное неустойчивое многообразие. Это существенно отличает рассматриваемую шестимерную систему от классической системы Лоренца, где странные аттракторы существуют лишь в той области плоскости параметров  $(r, \sigma)$ , где система имеет три состояния равновесия, и состояние равновесия  $O$  является седлом с одномерным неустойчивым многообразием, см. рис. 3,  $b$ , на котором изображена диаграмма показателей Ляпунова для системы (1).

На рис. 4 приведены фазовые портреты для двух типов странных аттракторов в системе (2). На рис. 4,  $a$  изображен аттрактор в точке  $p_1 : (r, \sigma) = (25, 3)$  – справа от кривой бифуркации «вилка». Данный аттрактор визуально неотличим от классического аттрактора Лоренца (ср. рис. 4,  $a$  и рис. 1,  $a$ ). На рис. 4,  $b$  изображен аттрактор в точке  $p_2 : (r, \sigma) = (21.1, 3)$ , когда седловая точка  $O$  имеет двумерное неустойчивое многообразие и не входит в аттрактор. В данном случае аттрактор содержит симметричную пару состояний равновесия  $O_1, O_2$ . Насколько нам известно, ранее о существовании таких аттракторов не сообщалось.

Отметим, что механизмы разрушения аттракторов лоренцевского типа в результате бифуркации «вилка» симметричного равновесия ранее наблюдались в других системах. Например, в системе Любимова–Закса [16] в результате такой бифуркации седловое состояние равновесия, входящее в аттрактор Ровеллы (аттрактор лоренцевского типа, у которого седловая величина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Напомним, что седловая величина вычисляется как сумма действительных частей пары ближайших к мнимой оси собственных чисел, одно из которых устойчивое, а второе неустойчивое.

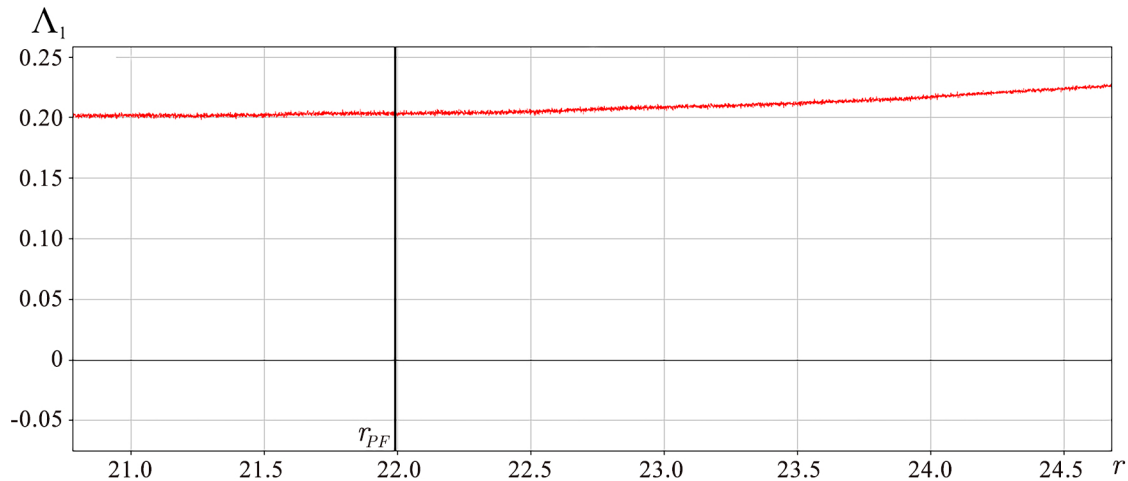


Рис. 5. График зависимости максимального показателя Ляпунова в системе (2), построенный по  $10^4$  точкам вдоль маршрута  $p_1p_2$ :  $\sigma = 3, r \in 20.65, 24.7$ . В точке  $r = r_{PF} \approx 22$  седловое состояние равновесия  $O$ , входящее в аттрактор Лоренца, претерпевает бифуркацию «вилка», что, однако, не сказывается на монотонной зависимости показателя Ляпунова от параметра. Этот эксперимент свидетельствует о возможной псевдогиперболичности исследуемых хаотических аттракторов (цвет онлайн)

Fig. 5. The graph of the maximal Lyapunov exponent in system (2), computed by  $10^4$  points along the route  $p_1p_2$ :  $\sigma = 3, r \in 20.65, 24.7$ . At the point  $r = r_{PF} \approx 22$ , the saddle equilibrium state  $O$ , belonging to the Lorenz attractor, undergoes the pitchfork bifurcation, which, however, does not impact to the monotonic dependence of the Lyapunov exponent on the parameter. This experiment indicates the possible pseudohyperbolicity of the studied chaotic attractors (color online)

является отрицательной [17]), становится устойчивым, и в его окрестности рождается пара седловых состояний равновесия с одномерным неустойчивым многообразием.

В случае системы (2) после бифуркации «вилка», также рождается пара седловых состояний равновесия  $O_1, O_2$  с одномерным неустойчивым многообразием, однако при этом состояние равновесия  $O$  остается неустойчивым, а хаотический аттрактор не разрушается. Более того, максимальный показатель Ляпунова для аттрактора меняется плавно при переходе через кривую бифуркации «вилка»  $PF$  (см. рис. 5). Это говорит о том, что в результате бифуркации «вилка» хаотический аттрактор, содержащий пару состояний равновесия  $O_1, O_2$ , может оставаться псевдогиперболическим.

Далее проследим, как эволюционирует аттрактор в системе (2) вдоль маршрута  $AB$ :  $\sigma = 23, r \in [20, 40]$  (см. рис. 3), проходящего через область, где в рассматриваемой системе, как и в классической системе Лоренца, три состояния равновесия, а равновесие  $O$  — седло с одномерным неустойчивым многообразием.

В начале маршрута неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  равновесия  $O$  стремятся к устойчивым состояниям равновесия  $S_1$  и  $S_2$  соответственно (см. рис. 6, a). При  $r \approx 21.55$  эти сепаратрисы возвращаются обратно в точку  $O$ , то есть наблюдается гомоклиническая бифуркация «восьмерка-бабочка», см. рис. 6, b. После этой бифуркации в системе рождается пара седловых периодических траекторий  $L_1, L_2$ , сепаратриса  $\Gamma_1$  стремится к  $S_2$ , а сепаратриса  $\Gamma_2$  — к  $S_1$ , см. рис. 6, c. Кроме того, вместе с расщеплением гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка» в системе также рождается нетривиальное гиперболическое множество с одномерным неустойчивым многообразием. При  $r \approx 30.75$  неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ложатся на устойчивые многообразия периодических траекторий  $L_2, L_1$  соответственно (см. рис. 6, d), в результате чего при  $r > 30.75$  в системе рождается аттрактор Лоренца (см. рис. 6, e). Сначала он сосуществует с парой устойчивых состояний равновесия  $S_1, S_2$ . После влипания в них периодических траекторий  $L_1, L_2$

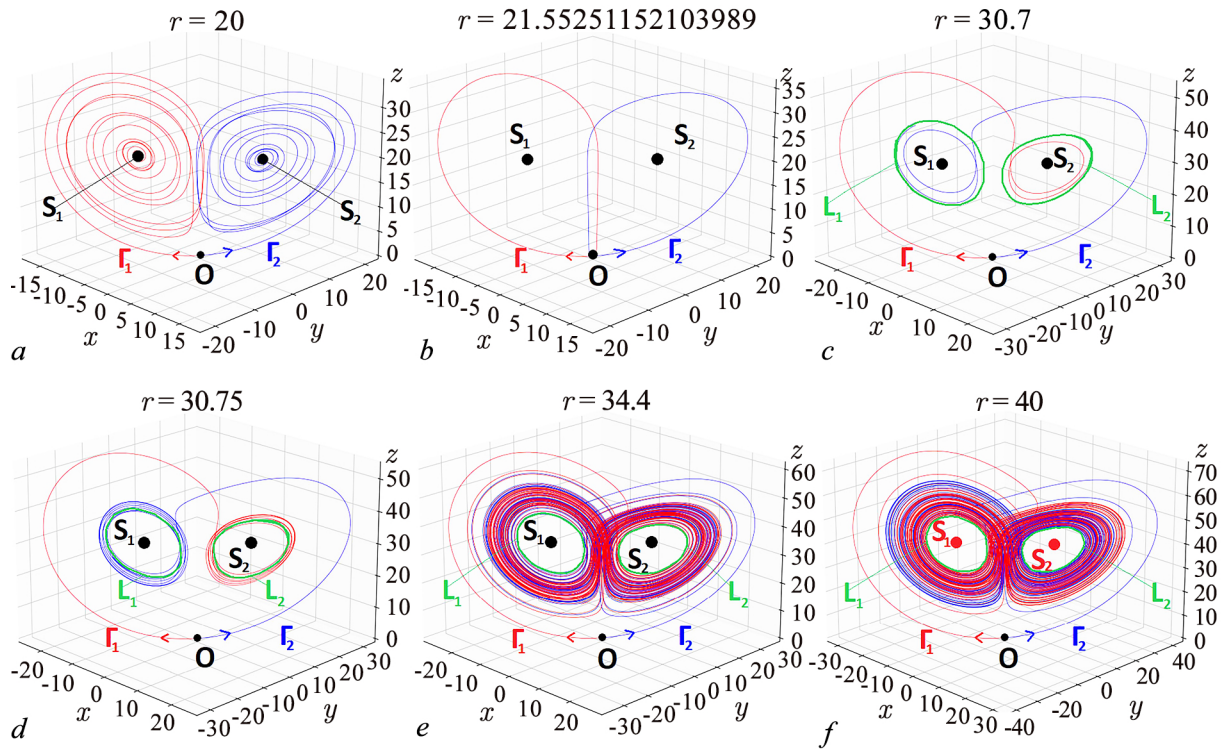


Рис. 6. Поведение неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1, \Gamma_2$  состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  в системе (2) при  $\sigma = 23$  (остальные параметры зафиксированы согласно (3)): *a* — неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  наматываются на устойчивые равновесия  $S_1, S_2$ ; *b* — гомоклиническая «восьмерка-бабочка»; *c* — неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  наматываются на  $S_2, S_1$  соответственно, а из гомоклинической бифуркации рождается пара седловых периодических траекторий и нетривиальное гиперболическое множество; *d* — сепаратрисы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ложатся на устойчивые многообразия периодических траекторий  $L_1, L_2$ ; *e* — аттрактор Лоренца сосуществует с парой устойчивых состояний равновесия  $S_1$  и  $S_2$ ; *f* — после бифуркации Андронова–Хопфа аттрактор Лоренца остается единственным аттрактором в системе (цвет онлайн)

Fig. 6. Behavior of unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  of the equilibrium state  $O(0, 0, 0)$  in system (2) with  $\sigma = 23$  (other parameters are fixed according to (3)): *a* — unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  wind onto stable equilibria  $S_1, S_2$ ; *b* — homoclinic butterfly; *c* — unstable separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  wind onto  $S_2, S_1$ , respectively, and a pair of saddle periodic trajectories and a nontrivial hyperbolic set are born from the homoclinic bifurcation; *d* — the separatrices  $\Gamma_1, \Gamma_2$  lie on stable manifolds of periodic orbits  $L_1, L_2$ ; *e* — the Lorenz attractor coexists with a pair of stable equilibrium states  $S_1$  and  $S_2$ ; *f* — after the Andronov–Hopf bifurcation, the Lorenz attractor remains the only attractor in the system (color online)

в результате субкритической бифуркации Андронова–Хопфа аттрактор Лоренца остается единственным аттрактором в системе (2), см. рис. 6, *f*. Отметим, что данный сценарий совпадает со сценарием Шильникова, в результате которого образуется аттрактор Лоренца в классической системе Лоренца.

#### 4. О гомоклинических бифуркациях «восьмерка-бабочка»

В данном разделе приведены результаты двухпараметрического анализа гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка» в шестимерной системе (2). Соответствующие бифуркационные диаграммы построены с помощью так называемого метода нидинг-диаграмм [18–21]. Согласно теории Афраймовича–Быкова–Шильникова [2, 3], гомоклинические петли плотны в области существования аттрактора Лоренца. В работе [18] с помощью метода нидинг-диаграмм этот



эффект был продемонстрирован для системы Лоренца (1), в работе [19] — для системы Шимицу–Мориока, а в работах [20, 21] — для шестимерной модели оптического лазера.

Суть метода нидинг-диаграмм заключается в кодировании поведения одной из неустойчивых сепаратрис состояния равновесия  $O$  (например,  $\Gamma_2(O)$ ), совершающей обороты вокруг состояний равновесия  $S_2$  и  $S_1$ , с помощью последовательности нулей и единиц (в зависимости от того, вокруг какого состояния равновесия совершается очередной оборот) и присвоении каждой такой последовательности уникального цвета. Нидинг-диаграмма — это цветная карта на плоскости параметров. Любое изменение символа в двоичной последовательности (при движении вдоль любого маршрута на плоскости параметров) отвечает возникновению гомоклинической бифуркации «восьмерка-бабочка». За счет выбора контрастной палитры на нидинг-диаграмме удается визуализировать кривые таких бифуркаций.

Результаты работы метода нидинг-диаграмм для системы (2) приведены на рис. 7, а. Здесь мы применяли метод только для построения диаграммы справа от кривой  $PF$ , где симметричное равновесие  $O$  имеет одномерное неустойчивое многообразие. На рис. 7, б, для сравнения, мы воспроизводим результаты построения нидинг-диаграммы для системы Лоренца (1). Из построенных диаграмм можно сделать следующие выводы.

- Нидинг-диаграмма для системы (2) справа от кривой  $PF$  похожа на нидинг-диаграмму для системы Лоренца (1).
- Кривые гомоклинических бифуркаций образуют регулярное слоение в большей части рассматриваемой плоскости параметров. Наличие такого слоения, в сочетании с монотонной положительностью максимального показателя Ляпунова (см. рис. 3, а и рис. 5), является косвенным признаком того, что рассматриваемые аттракторы в шестимерной системе (2), так же как и аттракторы в классической системе Лоренца (1), могут быть псевдогиперболическими.
- В системе (2), как и в системе (1), на нидинг-диаграмме отчетливо видны две сингулярности. Правая сингулярность отвечает так называемой быковской точке [22, 23], отвечающей

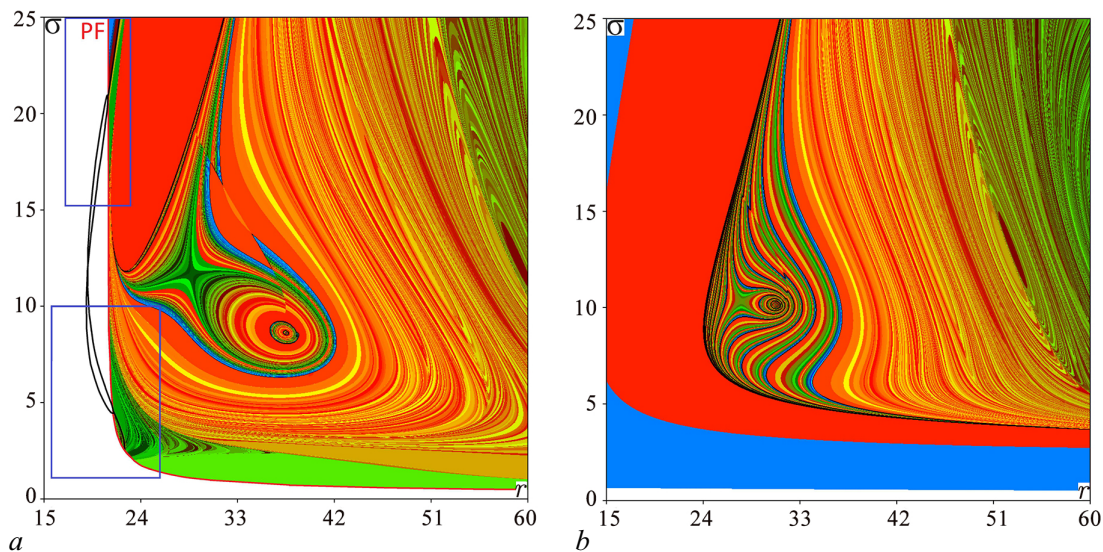


Рис. 7. Нидинг-диаграммы на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ : а — для шестимерной системы (2) при параметрах, заданных согласно (3); б — для системы Лоренца при  $b = 8/3$ . Линии смены цвета на рисунках отвечают гомоклиническим бифуркациям «восьмерка-бабочка», черные кривые найдены с помощью программы MatCont, увеличенные фрагменты, выделенные прямоугольниками, приведены на рис. 9 (цвет онлайн)

Fig. 7. Kneading diagrams on the plane of parameters  $(r, \sigma)$ : а — for the six-dimensional system (2) with parameters fixed according to (3); б — for the Lorenz system with  $b = 8/3$ . The color change curves in the figures correspond to homoclinic “figure-eight-butterfly” bifurcations, the black curves were found using the MatCont package, the enlarged fragments highlighted by rectangles are shown in Fig. 9 (color online)



за возникновение гетероклинического контура, соединяющего состояния равновесия  $O$  и  $S_1$  ( $O$  и  $S_2$ , по симметрии  $S$ ). В системе Лоренца такая точка лежит на границе существования аттрактора Лоренца [23, 24]. Можно предположить, что и в рассматриваемой шестимерной системе (2) справа от этой точки аттрактор не может быть псевдогиперболическим.

Слева от кривой бифуркации «вилка»  $PF$  состояние равновесия  $O$  имеет двумерное неустойчивое многообразие и, как было отмечено выше, выходит из аттрактора. При этом кривые гомоклинических бифуркаций состояния равновесия  $O$ , втыкаясь в кривую  $PF$ , заканчиваются на этой кривой. Таким моментам отвечают гомоклинические бифуркации коразмерности 2 (для системы с симметрией), когда состояние равновесия с парой гомоклинических траекторий имеет нулевое собственное число.

Аналогичная бифуркация рассматривалась ранее. В работах [25, 26] описан случай, когда в результате бифуркации «вилка» симметричного седлового состояния равновесия с парой гомоклинических траекторий рождается устойчивое состояние равновесия и симметричная пара седловых состояний равновесия. Иллюстрации к этой бифуркации приведены на рис. 8. На рис. 8, *a* изображена бифуркационная диаграмма. Здесь кривая  $h$  отвечает существованию у седлового состояния равновесия пары гомоклинических траекторий («восьмерке-бабочке») (см. рис. 8, *b*, а также рис. 1, *b*). На кривой  $PF$  состояние равновесия  $O$  претерпевает бифуркацию «вилка»: слева оно является седловым, а справа — устойчивым, а в его окрестности

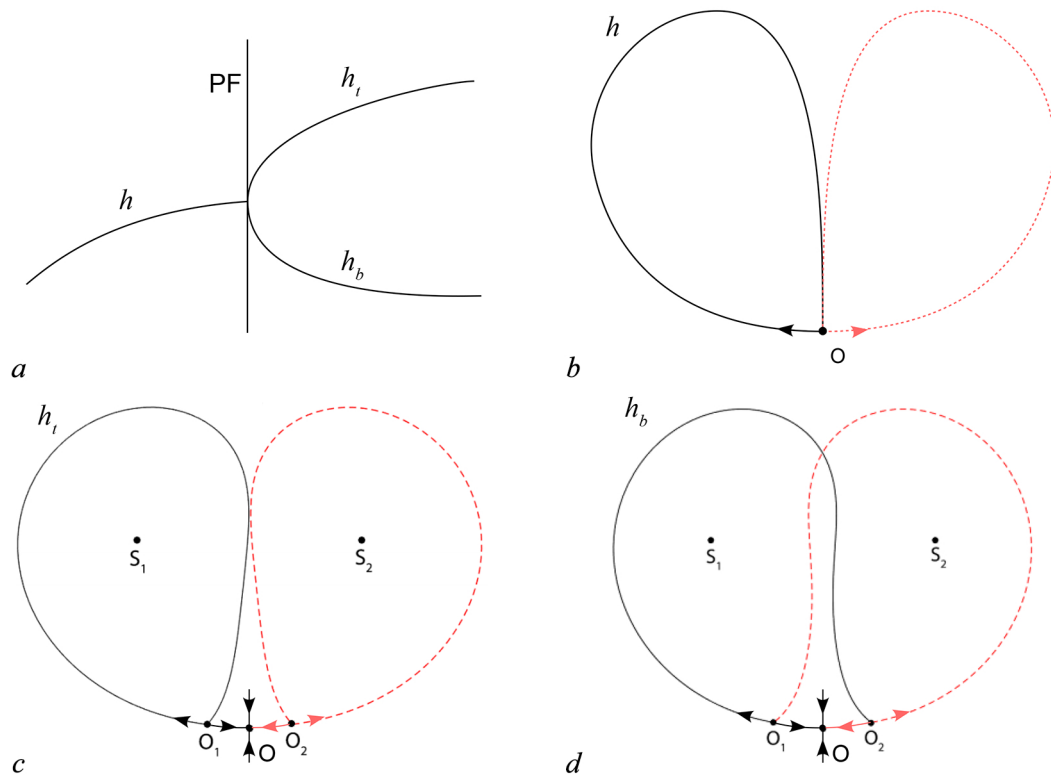


Рис. 8. Бифуркация седлового состояния равновесия с парой гомоклинических траекторий [25, 26]. *a* — Бифуркационная диаграмма:  $h, h_t$  — гомоклинические бифуркации,  $PF$  — бифуркации «вилка»,  $h_b$  — гетероклиническая бифуркация. *b* — Гомоклиническая «восьмерка-бабочка» на кривой  $h$ , *c* — петля сепаратрисы для  $O_1$  ( $O_2$ , по симметрии) на кривой  $h_t$ , *d* — гетероклинический контур между  $O_1$  и  $O_2$  на кривой  $h_b$  (цвет онлайн)

Fig. 8. Bifurcation of a saddle equilibrium state with a pair of homoclinic orbits [25, 26]. *a* — Bifurcation diagram:  $h, h_t$  — homoclinic bifurcations,  $PF$  — pitchfork bifurcations,  $h_b$  — heteroclinic bifurcation. *b* — Homoclinic butterfly occurring on  $h$ , *c* — separatrix loop for  $O_1$  ( $O_2$ , by symmetry) occurring on  $h_t$ , *d* — heteroclinic cycle between  $O_1$  and  $O_2$  occurring on  $h_b$  (color online)

рождается пара седловых состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ . В работах [25, 26] показано, что из точки пересечения кривых  $h$  и  $PF$  выходит пара кривых  $h_t$  и  $h_b$ , отвечающих гомоклинической и гетероклинической бифуркации соответственно. На кривой  $h_t$  состояние равновесия  $O_1$  имеет гомоклиническую траекторию (по симметрии,  $O_2$  также имеет гомоклиническую траекторию), см. рис. 8, *c*, а на кривой  $h_b$  возникает гетероклиническая траектория из состояния равновесия  $O_1$  в  $O_2$  (по симметрии, из  $O_2$  в  $O_1$ ), см. рис. 8, *d*. Важно отметить, что во всех случаях вторая пара неустойчивых сепаратрис состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$  всегда стремится к симметричному устойчивому состоянию равновесия  $O$ .

В нашем случае в системе (2) с симметричным седловым состоянием равновесия  $O$  происходит другой тип бифуркации «вилка». После этой бифуркации, как и в описанном выше случае, в окрестности симметричного состояния равновесия  $O$  рождается пара седловых состояний равновесия с одномерным неустойчивым многообразием, однако само равновесие  $O$  становится седлом с двумерным неустойчивым многообразием. Таким образом, ни одна из неустойчивых пар сепаратрис не стремится к  $O$  после бифуркации.

С помощью методов продолжения по параметрам, реализованных в пакете MatCont [12, 13], нам удалось проследить за парами «внешних» неустойчивых сепаратрис состояний равновесия  $O_1$  и  $O_2$ , рождающихся слева от кривой  $PF$ . Аналогично описанному выше случаю, после соответствующей бифуркации «вилка», кривые гомоклинических бифуркаций «восьмерка-бабочка» раздваиваются на пары кривых, а именно: из каждой точки пересечения этих кривых с кривой  $PF$  налево выходит пара кривых  $h_t^i$  и  $h_b^i$ , отвечающих возникновению гомоклинических и гетероклинических траекторий: на кривой  $h_t^i$  левая (правая) сепаратриса равновесия  $O_1$  ( $O_2$ ) образует гомоклиническую петлю, подобно тому, как изображено на рис. 8, *c*, а на кривой  $h_b^i$  левая (правая) сепаратриса равновесия  $O_1$  ( $O_2$ ) стремится к равновесию  $O_2$  ( $O_1$ ), то есть образуется гетероклинический контур, аналогичный контуру, изображенному на рис. 8, *d*. Результаты бифуркационного анализа изображены на рис. 7 слева от кривой  $PF$ . Увеличенные фрагменты этой диаграммы, выделенные прямоугольниками, приведены на рис. 9. Опишем более подробно полученные результаты.

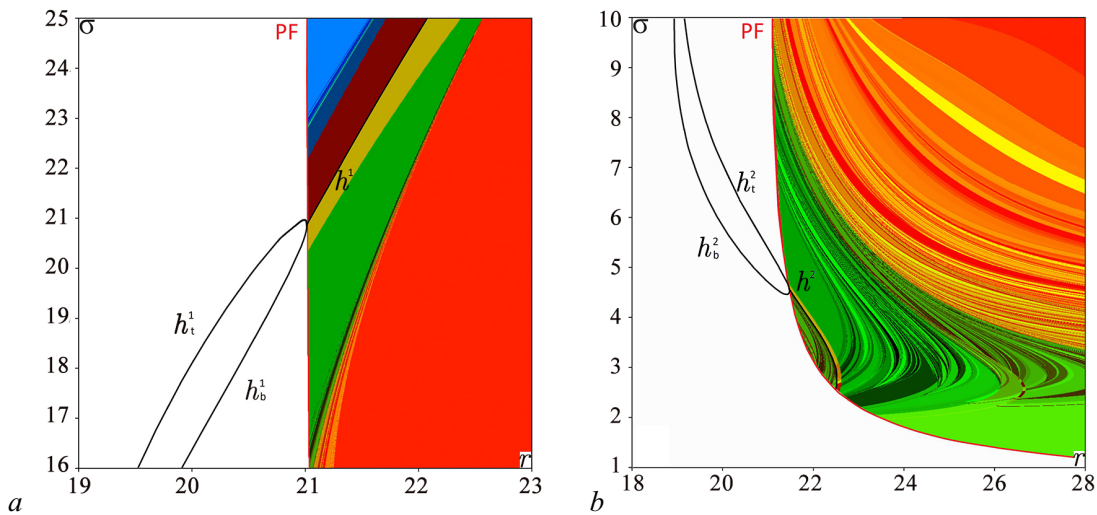


Рис. 9. Увеличенные фрагменты нидинг-диаграммы, выделенные на рис. 7.  $h^1, h^2$  — кривые гомоклинических бифуркаций «восьмерка-бабочка» состояния равновесия  $O$ ;  $h_t^1, h_t^2$  — кривые гомоклинических петель состояния равновесия  $O_1$  ( $O_2$ , по симметрии)  $h_b^1, h_b^2$  — кривые гетероклинических бифуркаций между состояниями равновесия  $O_1$  и  $O_2$  (цвет онлайн)

Fig. 9. Enlarged fragments of the kneading diagram highlighted in Fig. 7.  $h^1, h^2$  — curves of the homoclinic figure-eight bifurcations of the equilibrium state  $O$ ;  $h_t^1, h_t^2$  — curves of the homoclinic loops of the equilibrium state  $O_1$  ( $O_2$ , by symmetry);  $h_b^1, h_b^2$  — curves of the heteroclinic bifurcations between the equilibrium states  $O_1$  and  $O_2$  (color online)

На рис. 9, а, справа от кривой  $PF$ , отмечена одна из кривых, отвечающих гомоклинической «восьмерке-бабочке»,  $h^1$ . Расположение данной кривой на границе желтой и коричневой областей хорошо согласуется с результатами построения нидинг-диаграммы. Из точки  $PF \cap h^1$  налево от кривой  $PF$  выходит пара кривых  $h_t^1$  и  $h_b^1$ , отвечающих возникновению гомо- и гетероклинической бифуркаций, описанных выше. На рис. 9, b отмечена такая же бифуркация в нижней части бифуркационной диаграммы (кривые  $h^2$ ,  $h_t^2$  и  $h_b^2$ ).

### Заключение

В данной работе мы изучили некоторые особенности хаотической динамики в шестимерной системе (2), обобщающей классическую систему Лоренца. В частности, обнаружено два типа странных аттракторов и описаны сценарии их возникновения. К первому типу аттракторов относится классический аттрактор Лоренца. Этот аттрактор содержит симметричное седловое состояние равновесия  $O$  с одномерным неустойчивым многообразием и имеет характерную узнаваемую форму (см. рис. 4, а). Второй тип аттракторов является новым. Он содержит пару седловых состояний равновесия, которые возникают в результате бифуркации «вилка» состояния равновесия  $O$ , которое после этой бифуркации получает двумерное неустойчивое многообразие и выходит из аттрактора (см. рис. 4, b). Оба типа аттракторов могут быть псевдогиперболическими. Мы планируем провести численную проверку их псевдогиперболичности в следующей работе. Еще одна задача на будущее связана с теоретическим исследованием аттрактора нового типа. Мы планируем построить для него геометрическую модель (подобную модели Афраймовича–Быкова–Шильникова для аттрактора Лоренца) и найти условия, при которых этот аттрактор является псевдогиперболическим. В заключение отметим, что все обнаруженные в системе хаотические аттракторы демонстрируют в численных экспериментах лишь один положительный показатель Ляпунова, несмотря на то, что размерность системы позволяет получить аттракторы с несколькими положительными показателями. Таким образом, еще одна задача на будущее связана с исследованием возможности возникновения в рассматриваемой системе гиперхаотических аттракторов.

### Список литературы

1. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of atmospheric sciences. 1963. Т. 20, № 2. С. 130–141. DOI: 10.18500/0869-6632-00313310.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
2. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // ДАН СССР. 1977. Т. 234, № 2. С. 336–339.
3. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца // Труды ММО. 1982. Т. 44. С. 150–212.
4. Guckenheimer J., Williams R. F. Structural stability of Lorenz attractors // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1979. Vol. 50. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF02684769.
5. Marsden J. E., McCracken M., Guckenheimer J. A Strange, Strange Attractor // In: The Hopf Bifurcation and Its Applications. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer, 1976. С. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
6. Williams R. F. The structure of Lorenz attractors // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1979. Vol. 50. P. 73–99. DOI: 10.1007/BF02684770.
7. Tucker W. The Lorenz attractor exists // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Vol. 328, no. 12. P. 1197–1202. DOI: 10.1016/s0764-4442(99)80439-x.
8. Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system // Nonlinearity. 2021. Vol. 34(2). P. 1–30.
9. Тuraev Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора // Матем. Сборник. 1998. Т. 189, № 2. С. 137–160.

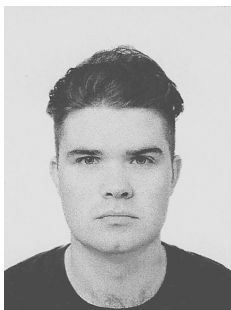
10. Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа // Доклады Академии наук. 2008. Т. 418, № 1. С. 23–27.
11. Moon S., Seo J. M., Beom-Soon H., Park J. A physically extended Lorenz system // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Vol. 29, no. 6. P. 063129. DOI: 10.1063/1.5095466.
12. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Meijer H. G. E., Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems // Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems. 2008. Vol. 14, no. 2. P. 147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
13. De Witte V., Govaerts W., Kuznetsov Y. A., Friedman M. Interactive initialization and continuation of homoclinic and heteroclinic orbits in MATLAB // ACM Trans. Math. Software. 2012. Vol. 38, iss. 3. P. 1–34. DOI: 10.1145/2168773.2168776.
14. Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца // В кн.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркации рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. С. 317–335.
15. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // Meccanica. 1980. Vol. 15, iss. 1. P. 9–20.
16. Lyubimov D. V., Zaks M. A. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. Vol. 9, iss. 1–2. P. 52–64. DOI: 10.1007/BF01237679.
17. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor // Bol. da Soc. Bras. de Matemática Bull. Braz. Math. Soc. 1993. Vol. 24. P. 233–259.
18. Barrio R., Shilnikov A., Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2012. Vol. 22, no. 04. P. 1230016. DOI: 10.1142/S0218127412300169.
19. Xing T., Barrio R., Shilnikov A. Symbolic quest into homoclinic chaos // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, no. 08. P. 1440004. DOI: 10.1142/S0218127414400045.
20. Pusuluri K., Shilnikov A. Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model // Physical Review E. 2018. Vol. 98, no. 4. P. 040202. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.040202.
21. Pusuluri K., Meijer H. G. E., Shilnikov A. L. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. Vol. 93. P. 105503.
22. Быков В. В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седлофокусом // В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений / Под ред. Е. А. Леонтович-Андроновой). Горький: ГГУ, 1978. С. 3–32.
23. Вуков В. В. The bifurcations of separatrix contours and chaos // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1993. Vol. 62, no. 1–4. P. 290–299.
24. Быков В. В., Шильников А. Л. О границах области существования аттрактора Лоренца // Методы качеств, теории дифференц. уравнений. 1989. С. 151–159.
25. Zaks M. A., Lyubimov V. Anomalous fast convergence of a doubling-type bifurcation chain in systems with two saddle equilibria // Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1984. Vol. 87. P. 1696–1699.
26. Zaks M. A., Lyubimov D. V. Bifurcation sequences in the dissipative systems with saddle equilibria // Banach Center Publications. 1989. Vol. 23, no. 1. P. 367–380. DOI: 10.4064/-23-1-367-380.

## References

1. Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. Journal of atmospheric sciences. 1963;20(2):130–141. DOI: 10.18500/0869-6632-00313310.1175/1520-0469(1963)020<0130:dnf>2.0.co;2.
2. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. On the origin and structure of the Lorenz attractor. Akademiia Nauk SSSR Doklady. 1977;234:336–339 (in Russian).

3. Afraimovich VS, Bykov VV, Shilnikov LP. Attractive nonrough limit sets of Lorenz-attractor type. *Trudy Moskovskoe Matematicheskoe Obshchestvo*. 1982;44 :150–212 (in Russian).
4. Guckenheimer J, Williams RF. Structural stability of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. 1979;50:59–72.
5. Marsden JE, McCracken M, Guckenheimer J. A Strange, Strange Attractor. In: *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Applied Mathematical Sciences, vol. 19. New York: Springer; 1976. C. 368–381. DOI: 10.1007/978-1-4612-6374-6\_25.
6. Williams RF. The structure of Lorenz attractors. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*. 1979;50: 73–99. DOI: 10.1007/BF02684770.
7. Tucker W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics*. 1999;328(12):1197–1202. DOI: 10.1016/s0764-4442(99)80439-x.
8. Gonchenko SV, Kazakov AO, Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz system. *Nonlinearity*. 2021;34(2):1–30.
9. Turaev DV, Shilnikov LP. An example of a wild strange attractor. *Sb. Math*. 1998;189:291–314.
10. Turaev DV, Shilnikov LP. Pseudohyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-type attractors. *Doklady Mathematics*. 2008;77(1):17–21. DOI: 10.1134/S1064562408010055.
11. Moon S, Seo JM, Beom-Soon H, Park J. A physically extended Lorenz system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2019;29(6):063129. DOI: 10.1063/1.5095466.
12. Dhooge A, Govaerts W, Kuznetsov YA, Meijer HGE, Sautois B. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2008;14(2):147–175. DOI: 10.1080/13873950701742754.
13. De Witte V, Govaerts W, Kuznetsov YA, Friedman M. Interactive initialization and continuation of homoclinic and heteroclinic orbits in MATLAB. *ACM Trans. Math. Software*. 2012;38(3):1–34. DOI: 10.1145/2168773.2168776.
14. Shilnikov LP. Bifurcation theory and the Lorenz model. In: Marsden J., McCracken M. (eds) *Appendix to Russian edition of The Hopf Bifurcation and Its Applications*. M.: Mir; 1980. P. 317–335.
15. Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica*. 1980;15(1):9–20.
16. Lyubimov DV, Zaks MA. Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983;9(1–2):52–64.
17. Rovella A. The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor. *Bol. da Soc. Bras. de Matemática Bull. Braz. Math. Soc*. 1993;24:233–259. DOI: 10.1007/BF01237679.
18. Barrio R, Shilnikov A, Shilnikov L. Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2012;22(04):1230016. DOI: 10.1142/S0218127412300169.
19. Xing T, Barrio R, Shilnikov A. Symbolic quest into homoclinic chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014;24(08):1440004. DOI: 10.1142/S0218127414400045.
20. Pusuluri K, Shilnikov A. Homoclinic chaos and its organization in a nonlinear optics model. *Physical Review E*. 2018;98(4):040202. DOI: 10.1103/PhysRevE.98.040202.
21. Pusuluri K, Meijer HGE, Shilnikov AL. Homoclinic puzzles and chaos in a nonlinear laser model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2021;93:105503.
22. Bykov VV. On the generation of a non-trivial hyperbolic set from a contour formed by separatrices of saddles. In: *Methods of qualitative theory and bifurcation theory*. Gorky: Gorky Univ. Press; 1978. P. 22–32.
23. Bykov VV. The bifurcations of separatrix contours and chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993;62(1–4):290–299.

24. Bykov VV, Shilnikov AL. On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor. *Selecta Mathematica Sovietica*. 1992;11(4):375–382.
25. Zaks MA, Lyubimov V. Anomalously fast convergence of a doubling-type bifurcation chain in systems with two saddle equilibria. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1984;87:1696–1699.
26. Zaks MA, Lyubimov DV. Bifurcation sequences in the dissipative systems with saddle equilibria. *Banach Center Publications*. 1989;23(1):367–380. DOI: 10.4064/-23-1-367-380.



*Сухарев Дмитрий Михайлович* — родился в 1999 году. Окончил Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». В настоящее время обучается в аспирантуре НИУ «Высшая школа экономики» на программе «Математика».

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: dmsukharev@edu.hse.ru



*Корякин Владислав Андреевич* — родился в 2000 году. Окончил бакалавриат Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». В данный момент обучается в магистратуре и работает стажером-исследователем в лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, где занимается разработкой параллельных методов исследования многомерных динамических систем.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: vakoryakin@edu.hse.ru  
 ORCID: 0000-0001-5640-8345



*Казаков Алексей Олегович* — родился в 1987 году. Окончил Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (2010). Доктор физико-математических наук (2021, НИУ ВШЭ). Работает главным научным сотрудником в лаборатории динамических систем и приложений, профессором на кафедре фундаментальной математики НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). Его научные интересы связаны с исследованиями динамического хаоса, бифуркаций и странных аттракторов. Автор более 50 научных работ в ведущих российских и международных журналах.

Россия, 603155 Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12  
 Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
 E-mail: kazakovdz@yandex.ru  
 ORCID: 0000-0003-0002-6553  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 826649