

Изв. вузов "ПНД", т.1, №1, №2, 1993

УДК 621.317

## ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ

*Н.М. Даценко, Д.М. Сонечкин*

Описан вейвлетный анализ - новое средство исследования временных рядов данных, генерированных хаотическими динамическими системами. Его использование иллюстрируется в анализе временных колебаний индекса зональной циркуляции атмосферы.

За последнее десятилетие развито большое число методов изучения метрических и топологических свойств мультифракталов, появляющихся при рассмотрении странных аттракторов динамических систем со сложным, кажущимся случайным, хаотическим поведением. В их числе методы оценки размерностей, энтропий и ляпуновских экспонент, спектров статических и динамических скейлинговых индексов. Перечисленные методы позволяют характеризовать странные аттракторы глобально, в лучшем случае указывая возможный диапазон вариаций средних характеристик. В этом отношении перечисленные методы нелинейного анализа подобны традиционному спектральному анализу, который экстрагирует из рассматриваемого временного ряда информацию об относительных вкладах отдельных гармоник в общую изменчивость ряда, но ничего не сообщает о временной локализации этих вкладов.

Совсем недавно появилось новое средство нелинейного анализа временных рядов (в том числе и многомерных) - так называемый вейвлетный анализ (англ. - wavelet transform) - название, которое еще не имеет русского эквивалента, но которое можно перевести как анализ волновых пакетов. Вейвлетный анализ (ВА) соединяет возможности, присущие упомянутым выше методам анализа метрических свойств мультифракталов, с возможностями спектрального анализа, дополняя их возможности локального исследования.

Следуя [1], дадим основные определения ВА. Объектом ВА является комплексная функция  $s(t)$ , где  $t$  будем называть временем. Достаточно очевидно также обобщение ВА на случай двух- и трехмерного аргумента, который тогда можно интерпретировать как пространственную координату [2]. На полуплоскости  $H(b, a)$ , где  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , определим свертку функции  $s(t)$  с функцией  $g(t)$  - анализирующей вейвлетной функцией - следующим образом:

$$S(b, a) = a^{-n} \int g^* \left( \frac{t-b}{a} \right) s(t) dt, \quad (1)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. В Фурье-образах, которые будем обозначать крышечкой сверху символа функции, уравнение (1) переписывается в виде

$$S(b,a) = a^n \int \hat{g}^*(a\omega) e^{ib\omega} \hat{s}(\omega) d\omega. \quad (1a)$$

На вейвлетную функцию положим условие допустимости

$$C_g = 2\pi \int |\hat{g}(\omega)| \frac{d\omega}{|\omega|} < \infty.$$

Выберем  $\hat{g}(\omega)$  из числа дифференцируемых функций. Тогда вейвлетная функция будет допустима, если  $\hat{g}(0)=0$ ,  $\int g(t)dt=0$ . Это означает, что свертка не вносит никакой постоянной составляющей в функцию  $S(b,a)$ .

Поскольку  $S(b,a)$  - комплексная функция, возможно ее двоякое представление - как в виде ее вещественной и мнимой частей по отдельности, так и, что часто удобнее для последующей интерпретации, через амплитуду и фазу:

$$S(b,a) = |S(b,a)| \exp(i\varphi(b,a)), \quad (0 \leq \varphi(b,a) < 2\pi).$$

Соответствие (1), в общем, не локально. Однако, если вейвлетная функция исчезает вне некоторого интервала  $(t_{\min}, t_{\max})$ , значение  $s(t)$  в точке  $t_0$  влияет только на те значения  $S(b,a)$ , которые на полуплоскости  $H$  лежат в конусе  $t_0 - b \in a\Lambda$ , расширяющемся с ростом параметра масштаба  $a$ . Вершина этого конуса (при  $a \rightarrow 0$ ) находится в точке  $b = t_0$ . И обратно, значение  $S(b,a)$  в точке  $(b_0, a_0)$  влияет (при обратном к (1) преобразовании) только на те значения  $s(t)$ , которые лежат внутри конуса  $t \in a_0\Lambda + b_0$  с вершиной в точке  $(b_0, a_0)$  и расширяющегося по мере уменьшения параметра масштаба. В частотной области на значение  $S(b,a)$  в точке  $(b_0, a_0)$  влияют только гармоники функции  $s(t)$ , лежащие внутри диапазона частот  $\hat{s}(\omega)$  такого, что  $\omega_{\min} < a\omega < \omega_{\max}$ , где  $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$  - диапазон частот, вне которого  $\hat{g}(a\omega)$  пренебрежимо мала.

Чтобы функция  $S(b,a)$  была легко интерпретируема в терминах свойств анализируемой функции  $s(t)$ , надо наложить на вейвлетную функцию некоторые дополнительные ограничения. Первым очевидным свойством является ковариантность ВА по отношению к сдвигу и растяжению анализируемой функции: если  $S(b,a)$  есть преобразование  $s(t)$ , то  $S(b-t_0, a)$  есть преобразование  $s(t-t_0)$ , и  $S(\frac{b}{\lambda}, \frac{a}{\lambda})$  есть преобразование  $\lambda^n s(\frac{t}{\lambda})$ , где  $\lambda > 0$ . Следствием ковариантности к сдвигу является воспроизведение при ВА частоты комплексного монохроматического сигнала в виде фазы  $\varphi(b,a)$ , меняющейся с постоянной скоростью (зависящей от частоты сигнала) на каждой линии  $a = \text{const}$ , при этом амплитуда  $|S(b,a)|$  остается постоянной. Вдоль каждой линии  $b = \text{const}$  амплитуда  $|S(b,a)|$  меняется с частотой сигнала. Если сигнал есть сумма нескольких гармоник, то, в соответствии с вышеупомянутой частотной локализацией ВА, на полуплоскости  $H$  появляется несколько картинок такого рода, ограниченных величинами  $a_i = \text{const}$ ,  $i=1,2,\dots$  по числу гармоник. Визуально эти картинки легко воспринимаются.

Если анализируемая функция  $s(t)$  представляет собой вещественный гармонический сигнал, а не комплексный, как только что было рассмотрено, то амплитуда  $|S(b,a)|$  вдоль линий  $a = \text{const}$  перестает быть постоянной, что затрудняет интерпретацию. Чтобы этого не происходило, образ Фурье вейвлетной функции  $\hat{g}(\omega)$  должен быть равным нулю для  $\omega < 0$ . Такие вейвлетные функции называются прогрессивными.

Наиболее часто используемыми, допустимыми и прогрессивными вещественными вейвлетными функциями являются так называемые "мексиканская шляпа" -

$$g(t) = \text{Me}(t) = (1-t^2)\exp(-1/2t^2), \quad (2)$$

"французская шляпа" -

$$g(t) = Fr(t) = \begin{cases} 1.0 & \text{при } |t| < 1, \\ -0.5 & \text{при } 1 \leq |t| < 3, \\ 0 & \text{при } |t| \geq 3 \end{cases} \quad (3)$$

(особенно удобная для ВА дискретных временных рядов). Комплексным их обобщением являются вейвлетные функции, так называемые "одногорбая шляпа" -

$$g(t) = Me(t)\exp(ict) \text{ или } g(t) = Fr(t)\exp(ict), \quad (4)$$

"двугорбая шляпа" -

$$g(t) = Me(t)(\exp(ic_1t) + \exp(ic_2t))$$

или

$$g(t) = Fr(t)(\exp(ic_1t) + \exp(ic_2t)). \quad (5)$$

Здесь для выполнения условия прогрессивности все константы должны быть более пяти. "Двугорбая шляпа" используется обычно для идентификации в анализируемом сигнале специфических комбинаций гармонических компонент, например, отдельных аккордов при анализе звуковых сигналов. Для выявления в анализируемой функции сигнала с изменяющейся монотонно со временем частотой можно использовать вейвлетную функцию вида

$$g(t) = Me(t)\exp(ict)\exp(idt^2), \quad (6)$$

где  $d > 0$  - ожидаемая скорость роста мгновенной частоты сигнала  $c + 2dt$ .

Все эти и им подобные вейвлетные функции пригодны для обнаружения сингулярностей анализируемой функции, таких как разрывы самой функции или ее производных [3]. В таких случаях на полуплоскости  $H$  появляется картина, где амплитуда  $|S(b,a)|$  растет при  $a \rightarrow 0$ , а линии равных фаз  $\varphi(b,a)$  сходятся при  $a \rightarrow 0$  в направлении точек  $b = t_0$ , где расположена сингулярность. Таким образом, ВА - новое интересное средство обнаружения моментов нарушения стационарности временного ряда.

Ковариантность ВА к сдвигу и растяжению позволяет использовать ее для обнаружения автомодельной (скейлинговой, самоподобной и самоафинной) структуры анализируемой функции, поскольку самоподобие  $\Delta f(\lambda t) \sim \lambda^{\alpha(\tau)} \Delta f_{\tau}(t)$ , где  $\Delta f_{\tau}(t) = f(\tau+t) - f(\tau)$ , влечет за собой подобное же самоподобие [4].  $\Delta S_{\tau}(\lambda b, \lambda a) \sim \lambda^{\alpha(\tau)} \Delta S_{\tau}(b, a)$ ,  $\Delta S_{\tau}(b, a) = S(\tau+b, a) - S(\tau, a)$ . На полуплоскости  $H$  самоподобие проявляется как древовидная структура, ветви которой расходятся при  $a \rightarrow 0$ , варьируясь в своих формах как в зависимости от используемой вейвлетной функции, так и от характера автомодельности анализируемого сигнала. Константа  $\alpha(\tau)$  является параметром самоподобия. Распределение ее значений  $p(\alpha)$  связано с известным из теории динамических систем спектром  $f(\alpha^*)$  статических скейлинговых индексов странного аттрактора соотношением  $\alpha^* = \alpha + n$ , где  $n$  - показатель степени в формуле (1). Таким образом, ВА временного ряда, порожденного измерениями одной или двух фазовых координат хаотической динамической системы, пригоден для прямого расчета спектра скейлинговых индексов (и, следовательно, спектра обобщенных размерностей) хаотической динамики системы. Но дополнительно ВА дает информацию о локализации конкретных значений этих индексов во времени (и в фазовом пространстве динамической системы, реконструированном по Ф. Такенсу).

Уже известны примеры успешных расчетов скейлинговых индексов для ряда одномерных отображений в случае, когда временная реализация хаотической динамики представлена многомерным вектором  $x(t)$ . Предлагаем новый способ расчета  $f(\alpha^*)$  спектра, использующий прием Г. Кантора взаимнооднозначного отображения  $n$ -мерного вектора  $x$  в одномерное пространство. Пусть, например,  $x \equiv (0.17\dots, 0.63\dots, 0.45\dots)$  - трехмерный вектор. Тогда его канторовское одномерное отображение  $y \equiv (0.164735\dots)$  получается по правилу: сначала после запятой выписываются все десятые доли всех по очереди компонент вектора, затем - сотые и т.д. Если известно, что вектор был трехмерным, то по отображению он может быть однозначно реконструирован. Далее, временной ряд  $y(t)$  может быть объектом ВА, при котором возможна оценка спектра его скейлинговых индексов  $p(\alpha)$ . Размерность  $D_y$  одномерной хаотической динамической системы (хаусдорфовой, информационной, корреляционной и т.п.) также может быть объектом ВА. Оказывается [5],  $D_y \geq D_x/n$ , где  $D_x$  - соответствующая размерность аттрактора хаотической динамической системы, породившей временной ряд  $x(t)$ .

Вейвлетный анализ был использован нами для исследования временных колебаний индекса зональной циркуляции, характеризующего скорость вращения атмосферы северного полушария Земли в западно-восточном направлении на среднем уровне (примерно 5.5 км). Ежедневные значения этого индекса известны из метеорологических наблюдений за период с 1.01.49 по настоящее время, т.е. более чем за 40 лет (и с довольно высокой точностью). При ВА зонального индекса можно решать две основные задачи: во-первых, искать сингулярности в многолетнем временном ходе индекса как признаки изменений климата, во-вторых, исследовать автомодельную структуру временных колебаний индекса как проявление макротурбулентной природы общей циркуляции атмосферы. Первая задача требует обработки всего имеющегося в наличии 40-летнего ряда данных с подбором вейвлетной функции, наиболее чувствительной к временным колебаниям именно этого ряда. Работа эта чрезвычайно трудоемка и в настоящее время не закончена. Поэтому здесь ограничимся сообщением о некоторых результатах по второй задаче.

Для реализации вейвлетного анализа на ЭВМ составлена программа, предусматривающая численную свертку (1) для дискретно заданных функций  $s(t)$  и  $g(t)$  с выбором анализируемого диапазона параметров сдвига и масштаба. Предусмотрено использование как вещественных, так и комплексных вейвлетных функций. Результатом счета являются поля вещественных и мнимых компонент  $S(b,a)$ , а также поля рассчитанных по ним амплитуд и фаз в полуплоскости  $H$  (по оси  $a$  обычно представляемой в логарифмическом масштабе). Стандартно выбирается двенадцать значений параметра масштаба и до 1000 значений параметра сдвига. Применительно к индексу зональной циркуляции атмосферы такой выбор параметров обеспечивает анализ временных колебаний в диапазоне от двух дней до примерно двух месяцев, и эти колебания исследуются на трехлетнем временном интервале. По полученным данным в диапазоне выявленной автомодельности рассчитывается спектр скейлинговых индексов.

На рис. 1 даны результаты вейвлетного анализа на полуплоскости  $H$  для вещественной части функции  $S(b,a)$ . Видно, что по мере уменьшения параметра масштаба значения функции  $S(b,a)$  образуют ветвящуюся структуру. Уже одно это может свидетельствовать [5] об автомодельной природе временных колебаний индекса зональной циркуляции атмосферы. Заметим, что в мелкомасштабной части представленного на рис. 1 диапазона масштабов  $1 \leq A \leq 24$  (что соответствует временным колебаниям индекса зональной циркуляции от примерно 8 до 190 дней) известно существование колмогоровского энергетического каскада, где спектральная плотность временных колебаний убывает с ростом частоты по степенному закону. Иногда этот каскад называют каскадом отрицательной вязкости на том основании, что в нем энергия временных колебаний мелких вихрей передается крупным вихрям.

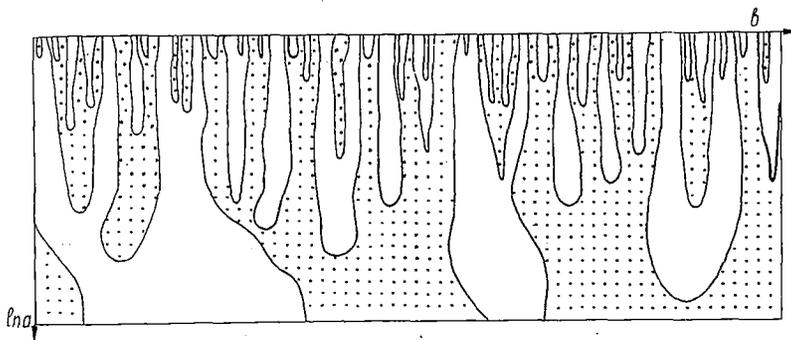


Рис. 1. Вейвлетное преобразование временного ряда ежедневных значений индекса зональной циркуляции атмосферы северного полушария Земли за пять месяцев в диапазоне от 1 до примерно 30 дней (вейвлетная функция - вещественная "мексиканская шляпа")

Известно [6,7], что в диапазоне отрицательной вязкости существенна перемежаемость макротурбулентных движений. Перемежаемость приводит к изменению крутизны спада энергетического спектра с изменением частоты и проявляется в образовании крупномасштабных локализованных во времени

структур. Поправка к показателю степени  $-5/3$ , соответствующему каскаду отрицательной вязкости [7,8], может быть вычислена по спектру обобщенных размерностей или статических скейлинговых индексов. Последние, как было отмечено выше, можно рассчитать с помощью ВА. Пример такого расчета представлен на рис. 2.

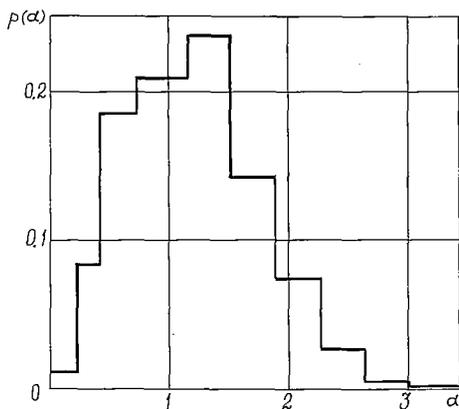


Рис.2. Гистограмма повторяемости различных значений скейлингового индекса для временных колебаний индекса зональной циркуляции (с рис.1) в диапазоне "отрицательной вязкости" от примерно 10 до 24 дней

### Библиографический список

1. Wavelets / Eds. J.M. Combes, A. Grossmann, Ph. Tchamitchian. Springer. 1989.
2. Argoul F. et al. Wavelet transform of fractal aggregate // Phys. Lett. A. 1989. Vol. 135, N 6,7. P.327.
3. Grossmann A. Wavelet transforms and edge detection // Stochastic Processes in Physics and Engineering. Reidel, 1988. P. 149.
4. Argoul F. et al. Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade // Lett. to Nature. 1989. Vol. 338. P.51.
5. Labor E., Turcsanyi B. On the reversible and irreversible representations of motions in  $R^n$  to  $R^2$  // Phys. D. 1985. Vol.16. P.124.

6. Мирабель А.П., Монин А.С. Двумерная турбулентность // УФН. 1979. Т.2, вып.3. С.47.  
 7. Nelkin M. What do we know about self-similarity in fluid turbulence? // J. Stat. Phys. 1989. Vol.54, N 1,2. P.1.  
 8. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. Freeman, 1982.

*Гидрометцентр России  
 Москва*

## WAVELET TRANSFORM OF TIME SERIES AND ATMOSPHERE DYNAMICS

*N.M. Datsenko, D.M. Sonechkin*

Wavelet transform is described as a new tool for investigation of data generated by the chaotic dynamic systems. Its usage is illustrated by the analysis of the temporal oscillation of the atmosphere zonal circulation index.



В издательстве Саратовского университета выходит книга

*Ю.А. Калинин, А.Д. Ессин*

### МЕТОДЫ И СРЕДСТВА ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ВАКУУМНОЙ СВЧ ЭЛЕКТРОНИКЕ

В первой части книги "Методы, аппаратура и результаты исследований" впервые в отечественной и зарубежной практике обобщены и систематизированы опыт и результаты разработки методов физического эксперимента для анализа структуры интенсивных немодулированных и модулированных по плотности и скорости протяженных электронных пучков, электродинамических структур, процессов взаимодействия электронных пучков с СВЧ полями, а также теплофизических характеристик электровакуумных СВЧ приборов.

Приводятся результаты экспериментальных исследований физических процессов в электровакуумных СВЧ приборах, направленных на улучшение их параметров и характеристик.

Во второй части книги "Проектирование и оптимизация конструкций электровакуумных приборов на основе экспериментальных исследований" иллюстрируется эффективность применения методов физического эксперимента в проектировании и разработке мощных широкополосных ЛБВ. Проведено сопоставление теоретических и экспериментальных результатов для апробации и уточнения математических моделей приборов. Рассмотрено применение методов физического эксперимента в системе автоматизированного проектирования ЛБВ для улучшения параметров, совершенствования конструкций приборов и повышения их серийнопригодности, стабильности и надежности.

Книга предназначена для специалистов в области исследования, проектирования, разработки, производства и применения мощных широкополосных ЛБВ, ускорительной техники, электронно-лучевой технологии.

Часть I вышла в свет в четвертом квартале 1992 года,  
 часть II выйдет в третьем квартале 1993 года.

