



## КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

### Часть 1. Сценарий Фейгенбаума

А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов

В обзорном плане излагаются основные результаты, характеризующие сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в контексте теории критических явлений. Даны компьютерные иллюстрации скейлинга. Представлены приближенный ренормгрупповой анализ, позволяющий построить процедуру ренормпреобразования в явной форме, и примеры нелинейных систем, демонстрирующих обсуждаемый тип критического поведения.

### Введение

Для понимания хаоса в нелинейных системах ключевое значение имеет вопрос о *сценариях* его возникновения. А именно: каковы типичные последовательности бифуркаций, которые можно наблюдать при адиабатически медленном изменении управляющих параметров системы, отвечающем переходу из области простого регулярного поведения в область хаоса? Трудями многих исследователей выявлены типичные сценарии - переход к хаосу через каскад удвоений периода (Miyberg, 1963 [1]; Шарковский, 1964 [2]; Metropolis и др., 1973 [3]; May, 1976 [4] и другие), через перемежаемость (Афраймович и Шильников, 1974 [5]; Romeau и Manneville, 1980 [6]) и через квазипериодичность (Арнольд [7]; Ruelle и Takens, 1980 [8]; Shenker, 1982 [9]).

Как оказалось, постановка вопроса о сценариях перехода к хаосу подразумевает не только качественные варианты ответа. Одно из самых замечательных достижений последних лет состоит в открытии количественной универсальности и скейлинговых свойств динамики нелинейных систем у порога хаоса. Для их теоретического обоснования был привлечен метод ренормализационной группы (РГ), подобный развитому ранее в физике фазовых переходов. Для систем, демонстрирующих каскад удвоений периода, этот принципиальный шаг был сделан Фейгенбаумом (Feigenbaum, 1979 [10-12]). Позднее аналогичный подход был развит для перемежаемости (Hirsh, 1982 [13]; Hu и Rudnik, 1982 [14]) и квазипериодичности (Ostlund и др., 1983 [15]; Feigenbaum и др., 1982 [16]).

В теории фазовых переходов метод РГ привлекают для описания критического поведения вещества вблизи точки фазового перехода (критической точки), когда имеют место флуктуации с пространственными масштабами, намного превышающими межатомное расстояние. По аналогии можно говорить о критических явлениях в нелинейных системах, имея в виду режимы динамики, реализующиеся у порога хаоса и обладающие временными масштабами, намного

превышающими прочие характерные времена задачи. Использование этой терминологии предполагает такой подход к проблеме возникновения хаоса, когда на первый план выдвигаются концепции универсальности, скейлинга и метод РГ, а не просто качественное описание последовательностей бифуркаций [17-21].

В семействах нелинейных систем, зависящих от нескольких параметров, могут встретиться новые типы критического поведения и классы универсальности, допускающие РГ анализ (некоторые примеры известны [19-21]). О ситуациях такого рода можно говорить как о *мультипараметрической критичности*. Каждый тип мультипараметрической критичности должен характеризоваться присущей ему уникальной, обладающей свойством самоподобия, структурой пространства параметров вблизи критической точки. Эти структуры можно рассматривать как обобщение понятия "сценарий перехода к хаосу" на многопараметрический случай.

В первой части настоящей статьи мы изложим в обзорном плане основные результаты, характеризующие сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в контексте теории критических явлений. Будут даны компьютерные иллюстрации скейлинга, изложен приближенный ренормгрупповой анализ, позволяющий построить процедуру ренормпреобразования в явной форме, а также приведены примеры нелинейных систем, демонстрирующих этот тип динамики.

Во второй части работы будет рассмотрено развитие теории критических явлений на случай одномерных многопараметрических отображений.

В третьей части работы мы обсудим некоторые аспекты ренормдинамики нелинейных систем.

## 1. Логистическое отображение

Наиболее простой и удобный для изучения класс систем, демонстрирующих переход к хаосу через каскад удвоений периода, - это одномерные рекуррентные уравнения вида

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1)$$

где  $f(x)$  - гладкая функция, зависящая от параметра  $\lambda$ , отображающая некоторый отрезок оси  $x$  в себя и имеющая на этом отрезке единственный квадратичный экстремум. Примером может служить логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad (2)$$

в интервале значений  $\lambda$  от 0 до 2.

Модель (2) играет фундаментальную роль в теории критических явлений у порога динамического хаоса. Если говорить о методологическом аспекте, то напрашивается аналогия с гармоническим осциллятором. Наиболее характерные черты такой аналогии - междисциплинарный характер моделей, которые дают единый математический формализм для описания систем разной физической природы. В то же время степень абстрактности модели (2) выше, чем гармонического осциллятора. Гармонический осциллятор позволяет описывать поведение реальной физической системы в *любой момент времени*. Чтобы придать физический смысл дискретному времени  $n$  в соотношении (2), придется прибегать к помощи специального метода сечений Пуанкаре [22-24]. При этом динамика нелинейной системы оказывается определенной лишь в некоторые избранные моменты времени. Точные количественные результаты получаются лишь в асимптотике *больших интервалов времени*. Для гармонического осцил-

лятора переменная  $x$  всегда допускает естественную физическую интерпретацию (смещение маятника, величина электрического поля в резонаторе, разность населенностей уровней и т.д.). Для модели (2) переменной  $x$  давать наглядную интерпретацию не обязательно. Наиболее полное "соприкосновение" с физической реальностью происходит с помощью параметра  $\lambda$  - основного параметра, характеризующего нелинейность физической (химической, биологической) системы. При исследовании реальной системы в контексте критических явлений решающее значение имеет изменение характера динамического режима при вариации параметра нелинейности. В такой ситуации и наблюдаются скейлинговые закономерности, которые могут быть проверены количественно в соответствии с предсказаниями модели (2).

Обсудим свойства логистического отображения (2) у порога хаоса.

При  $\lambda < 0.75$  отображение (2) имеет единственный устойчивый режим - неподвижную точку  $x_0 = (\sqrt{1+4\lambda} - 1)/2\lambda$ . При переходе параметра  $\lambda$  через значение  $\lambda_1 = 0.75$  величина, характеризующая устойчивость неподвижной точки - мультипликатор  $\mu = f'(x_0) = 1 - \sqrt{1+4\lambda}$ , обращается в -1 и неподвижная точка теряет устойчивость. От нее отделяется цикл периода 2. При  $\lambda_2 = 1.25$ , в свою очередь, теряет устойчивость 2-цикл и рождается устойчивый цикл периода 4 и т.д. до бесконечности. Как говорят, реализуется каскад бифуркаций удвоения периода.

Последовательность точек бифуркаций удвоения периода  $\lambda_n$  сходится к критической точке  $\lambda_c = 1.40115518909$  по закону геометрической прогрессии:

$$(\lambda_n - \lambda_c) / (\lambda_{n+1} - \lambda_c) \rightarrow \delta_F, \quad (3)$$

где  $\delta_F = 4.6692016091$  - универсальная константа Фейгенбаума. Соотношение (3) работает тем лучше, чем больше  $n$  и является в этом смысле асимптотическим. Это - первый скейлинговый закон Фейгенбаума.

Отношение ближайших к экстремуму отображения (2) элементов  $2^n$  и  $2^{n+1}$  циклов подчиняется второму соотношению Фейгенбаума

$$x_0^{(n)} / x_0^{(n+1)} \rightarrow a_F,$$

где  $a_F = -2.502907876$  - универсальный масштабный фактор.

Непосредственно в критической точке  $\lambda = \lambda_c$  все  $2^n$  циклы неустойчивы. При  $n \rightarrow \infty$  они лежат вблизи сложно устроенного критического аттрактора, имеющего фрактальную структуру.

В закритической области на оси  $\lambda$  имеет место сложная картина областей, которая содержит множество ненулевой меры, отвечающее хаотическим режимам [25], и бесконечное число "окон" периодических режимов, порядок появления которых устанавливается теоремой Шарковского [2,26].

В случае хаотической динамики переменная  $x$  последовательно посещает множество, состоящее из  $2^n$  отрезков на интервале (0,1). Правило их обхода во времени совпадает с правилом обхода элементов соответствующего  $2^n$  цикла, но в пределах отрезков точка располагается случайным образом. При возрастании  $\lambda$  соседние отрезки последовательно смыкаются краями (как говорят, имеет место обратный каскад). Внутри каждого окна периодических режимов, в свою очередь, наблюдается каскад удвоений периода, завершающийся в соответствующей критической точке переходом к хаосу.

## 2. Иллюстрации скейлинга

Приведем основные компьютерные иллюстрации сложной динамики логистического отображения, сделав акцент на картине критических явлений.

На рис. 1,а показано бифуркационное дерево, дающее зависимость значений переменной  $x$  на аттракторе от управляющего параметра  $\lambda$ . Хорошо видны точки бифуркации удвоения периода - в этих точках каждая ветвь дерева расщепляется на две. В критической точке  $\lambda=\lambda_c$  число ветвей становится бесконечным и формируется фрактальная структура. Области хаоса при  $\lambda>\lambda_c$  выглядят как более или менее равномерно заполненные точками участки "кроны". Последовательное исчезновение "дыр" в кроне отвечает обратному каскаду, а прореживающие ее светлые вертикальные полосы - это окна периодических режимов.

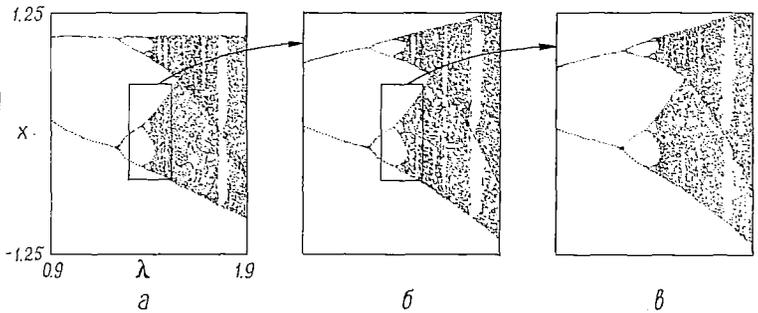


Рис.1. Скейлинг на бифуркационном дереве

Скейлинг на бифуркационном дереве иллюстрируется серией рисунков (см. рис. 1, а - 1, в). Каждый последующий рисунок серии представляет собой увеличенный фрагмент предыдущего. При этом масштаб по оси динамической переменной пересчитывается в  $a_f$  раз относительно точки  $x=0$  - экстремума отображения (2), а по оси управляющего параметра - в  $b_f$  раз относительно критической точки. Все картинки хорошо совпадают, причем степень соответствия тем лучше, чем на более глубокий уровень иерархии мы проникаем.

Устройство аттрактора в критической точке может быть описано по аналогии с классическим канторовым множеством. Напомним, что при его построении отрезок единичной длины делят на три части и оставляют лишь два крайних. Затем эти два отрезка делят на три части и т.д. до бесконечности. Фейгенбаумовский аттрактор строится из отрезков  $[x_1, x_2]$ , затем  $[x_1, x_3]$  и  $[x_4, x_2]$  и т.д., края которых образованы последовательными итерациями точки экстремума отображения (2) при  $\lambda=\lambda_c$  (рис. 2). Возникшее в пределе бесконечного уровня построения множество имеет дробную величину хаусдорфовой размерности  $D_H=0.5380450$ .

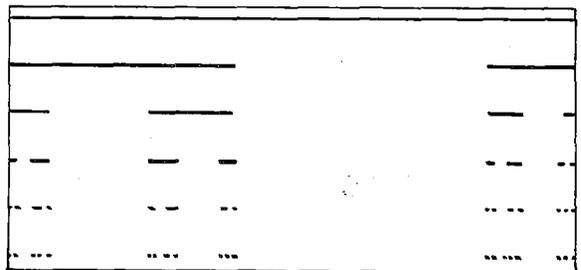


Рис.2. Построение критического аттрактора

Наличие хаоса в логистическом отображении можно зафиксировать с помощью ляпуновского показателя,

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |2\lambda x_i|, \quad (4)$$

характеризующего неустойчивость фазовых траекторий. На рис. 3,а показана зависимость ляпуновского показателя от управляющего параметра  $\lambda$ . В докритической области, где реализуются только устойчивые периодические движения, ляпуновский показатель отрицателен. В критической точке он переходит через ноль в первый раз. За критической точкой зависимость  $\Lambda$  от  $\lambda$  имеет фрактальный характер, причем чередуются области хаоса с положительным ляпуновским показателем с областями периодических режимов, для которых показатель отрицателен.

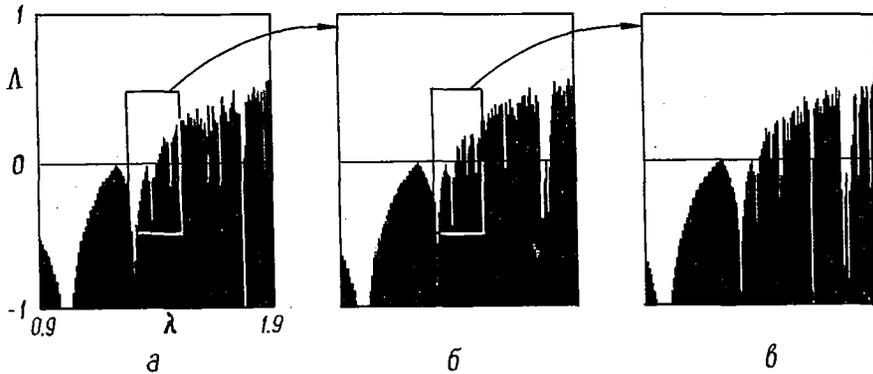


Рис.3. Скейлинг для зависимости ляпуновского показателя от параметра  $\lambda$

Вблизи критической точки поведение ляпуновского показателя подчиняется простому скейлинговому закону

$$\Lambda \rightarrow \Lambda/2, \quad (\lambda - \lambda_c) \rightarrow (\lambda - \lambda_c)/\delta_F \quad (5)$$

Отсюда вытекает соотношение для огибающей ляпуновского показателя в хаотической области:

$$\Lambda = (\lambda - \lambda_c)\chi, \quad (6)$$

где критический индекс  $\chi = \ln 2 / \ln \delta_F = 0.4498$ . На рис. 3,б,в показаны увеличенные фрагменты зависимости ляпуновского показателя от параметра  $\lambda$  в окрестности критической точки, причем пересчет масштабов осуществлен в соответствии с соотношениями (5). Ожидаемый скейлинг подтверждается с хорошей точностью, растущей при переходе к более глубоким уровням. Ляпуновский показатель иногда интерпретируют как аналог параметра порядка в теории фазовых переходов [17,24].

На рис. 4 показан спектр колебаний логистического отображения в критической точке. Он обладает ярко выраженной иерархической организацией по уровням амплитуд субгармоник. Линии каждого уровня могут быть найдены по линиям предыдущего с помощью известного приближенного соотношения [27,28]:

$$\frac{1 + a_F^2 \pm 2a_F \cos(\pi\omega/2)}{4a_F^4} S_n(\omega) \rightarrow \begin{cases} S_{n+1}(\omega/2), & \text{знак "+"}, \\ S_{n+1}(1-\omega/2), & \text{знак "-"}. \end{cases} \quad (7)$$

Это соотношение задает еще два новых критических индекса:  $\gamma = 10 \lg(1/4a_F^2 + 1/4a_F^4) = 13.35$  дБ и характеризует средний перепад между соседними уровнями субгармоник, а  $\alpha = |2a_F/(1+a_F^2)| = 0,69$  и характеризует степень неравномерности распределения амплитуд субгармоник на данном уровне иерархии.

Описанные нами критические индексы - универсальная константа  $\delta_F$ , масштабный фактор  $a_F$ , критический индекс ляпуновского показателя  $\chi$ , индексы  $\gamma$  и  $\alpha$  и величина хаусдорфовой размерности  $D_H$  - характеризуют все основные скейлинговые свойства логистического отображения, а вместе с ним и скейлинговые свойства любых систем, принадлежащих тому же классу универсальности.

Известно еще несколько более тонких характеристик фейгенбаумовского критического аттрактора. Одна из них -  $\sigma$ -функция, введенная Фейгенбаумом. Она служит для описания глобальных скейлинговых свойств на бифуркационном дереве. Действительно, фактор  $a_F$  определяет правило пересчета масштаба переменной  $x$  лишь в окрестности экстремума отображения (2). Для других областей на дереве правило пересчета будет другим, например, в окрестности самой дальней от экстремума точки  $x = 1$  скейлинг осуществляется с константой  $a_F^2$ . Сложные масштабные закономерности на бифуркационном дереве можно проиллюстрировать, исследуя правило относительного расщепления соседних ветвей, что приводит к функции

$$\sigma(m/2^{n+1}) = \frac{x'_m - x'_{m+2^n}}{x_m - x_{m+2^{n-1}}}, \quad (8)$$

где  $x_m$  и  $x'_m$  - элементы циклов периода  $2^n$  и  $2^{n+1}$  отображения (2) в критической точке, причем  $m, n \rightarrow \infty$ . Эта функция, найденная численно, показана на рис.5. Она имеет фрактальную структуру и содержит разрывы во всех двоичных рациональных точках  $m/2^n$ . Справедливы предельные соотношения

$$\sigma(+0) \rightarrow 1/a_F^2, \quad \sigma(1/2-0) \rightarrow 1/|a_F|. \quad (9)$$

Эти две величины задают максимальный и минимальный масштабы расщепления на бифуркационном дереве.

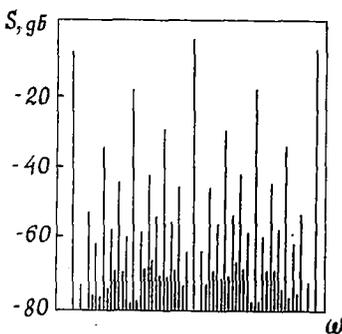


Рис.4. Спектр в критической точке



Рис.5.  $\sigma$ -функция

При построении  $\sigma$ -функции сохраняется информация о временном правиле обхода элементов цикла. Можно, однако, абстрагироваться от этого правила и рассматривать критический аттрактор как чисто геометрический объект. Сложные масштабные правила расщепления на дереве в такой интерпретации сводятся к тому, что все отрезки, из которых строится аттрактор, имеют разную длину (см.

рис.3). Оказывается, что такой мультифрактал можно описать с помощью гладкой функции, которую называют скейлинг-спектром, или  $f(\alpha)$ -спектром (Halsey и др. [29]).

Для этого, используя процедуру [29], определим функцию разбиения на  $n$ -м уровне разрешения:

$$\Gamma_n = \sum_{i=1}^{2^n} p_i^n / l_i^\tau, \quad (10)$$

где  $p_i = 1/2^n$ ,  $l_i = |x_i - x_{i+2^n}|$ ,  $x_i$  - последовательность, генерируемая отображением (2) в критической точке с нулевым начальным условием. Далее потребуем, чтобы  $\Gamma_n$  оставались конечными при  $n \rightarrow \infty$  и определим параметр:

$$q = \frac{1}{n} \log_2 \left| \sum_{i=1}^{2^n} l_i^{-\tau} \right|. \quad (11)$$

Следуя [29], получаем скейлинг-спектр в параметрической форме:

$$\alpha = \frac{d\tau}{dq}, \quad f = \alpha q - \tau. \quad (12)$$

На рис.6 приведен скейлинг-спектр, найденный численно. Он располагается в интервале изменения  $\alpha$  от  $1/\log_2 a_F^2 = 0.37776$  до  $1/\log_2 |a_F| = 0.755512$  и имеет экстремум, равный величине хаусдорфовой размерности аттрактора:  $f_{\max} = D_H = 0.5380450$ .

Нетрудно ввести теперь и семейство обобщенных размерностей  $D(q) = \tau / (1-q)$  (Grassberger, Procaccia [30]). Соответствующий график показан на рис.7, где некоторые важные точки - хаусдорфова размерность  $D_H = D(0)$ , информационная размерность  $D_I = D(1)$ , корреляционная размерность  $D_C = D(2)$  - отмечены численными значениями.

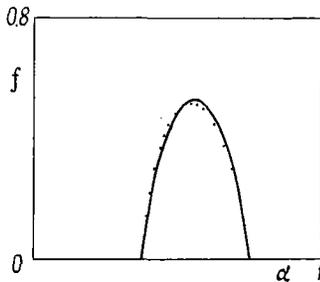


Рис.6. Скейлинг-спектр

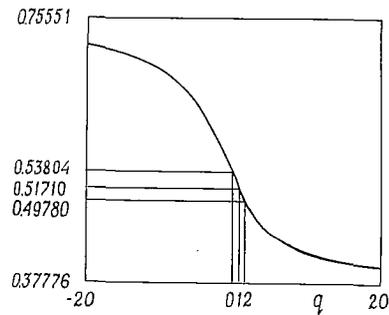


Рис.7. График обобщенной размерности

Критический аттрактор отображения (2) может быть хорошо аппроксимирован *двухмасштабным канторовым множеством* [29]. Это множество получается, когда каждый очередной отрезок делится на три части в отношении  $a$ ,  $1-a$ ,  $b$  и средний интервал исключается. Фрактальная размерность предельного множества  $D$  определяется из уравнения [29].

$$a^D + b^D = 1.$$

Для аппроксимации фейгенбаумовского аттрактора нужно принять  $a = 1/|a_F|$ ,  $b = 1/a_F^2$ . Хаусдорфова размерность, вычисленная по формуле  $1/|a_F|^{D+1} + 1/a_F^{2D} = 1$ , равна 0.5245, что близко к точному значению ( $D_H = 0.5380450$ ). В рамках двухмасштабной аппроксимации формулы (7) для спектра в критической точке и предельные соотношения (9) для  $\alpha$ -функции являются строгими, а  $f(\alpha)$ -спектр показан точками на рис.6.

### 3. Приближенный ренормгрупповой анализ

Чтобы понять природу рассмотренных скейлинговых закономерностей, проведем приближенный ренормгрупповой анализ критических явлений в логистическом отображении. Для этого выполним отображение (2) дважды и отбросим член порядка  $x^4$ :

$$x_{n+2} = 1 - \lambda - 2\lambda^2 x_n^2 + \dots \quad (13)$$

Если сделать в полученном соотношении замену переменной

$$x \rightarrow X(1-\lambda), \quad (14)$$

и параметра

$$\lambda' = \varphi(\lambda) = 2\lambda^2(\lambda-1), \quad (15)$$

то мы вновь приходим к отображению (2):

$$X_{n+2} = 1 - \lambda' X_n^2 \quad (16)$$

Итак, оператор эволюции за удвоенный временной интервал *приводится приближенной перенормировкой к исходному виду*. Поскольку описанную процедуру можно повторить многократно, строя оператор эволюции на увеличивающихся по закону  $2^n$  временных интервалах, мы имеем "рецепт" описания динамики на любых, сколь угодно больших промежутках времени. Это дает возможность описать критическую динамику логистического отображения только на основе анализа свойств его неподвижной точки.

Действительно, неподвижная точка логистического отображения (2) теряет устойчивость при  $\lambda_1 = 0.75$ . Решая уравнение  $\lambda_1 = \varphi(\lambda_2)$ , находим бифуркационное значение для 2-цикла:  $\lambda_2 = 1.24279$ . Из уравнения  $\lambda_2 = \varphi(\lambda_3)$  находим точку потери устойчивости 4-цикла:  $\lambda_3 = 1.34400$  и т.д. Итерационная схема  $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$  позволяет найти весь каскад бифуркаций удвоения (табл.1).

Можно сказать, что отображение  $\lambda' = \varphi(\lambda)$  задает *ренормдинамику*. Одна итерация этого отображения - это один шаг в *ренормвремени*, отвечающий удвоению периода в реальном времени. Критической ситуации соответствует *неустойчивая неподвижная точка ренормдинамики*. В нее можно прийти, итерируя уравнение  $\lambda' = \varphi(\lambda)$  в обратном ренормвремени.

Описанную процедуру можно проиллюстрировать с помощью диаграммы, подобной диаграмме Ламерея, на которой изображена функция  $\varphi(\lambda)$  и показаны последовательные итерации отображения  $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$ , сходящиеся к критической точке  $\lambda_c = \varphi(\lambda_c)$  (рис.8). В данном случае  $\lambda_c = (1+\sqrt{3})/2 = 1.36603$ .

В критической точке оператор эволюции при ренормализации переходит сам в себя. Поэтому из существования при  $\lambda = \lambda_c$  неподвижной точки логистического отображения следует существование всевозможных циклов с периодами  $2, 4, 8, \dots, 2^n$ . Они характеризуются одним и тем же мультипликатором, величину которого

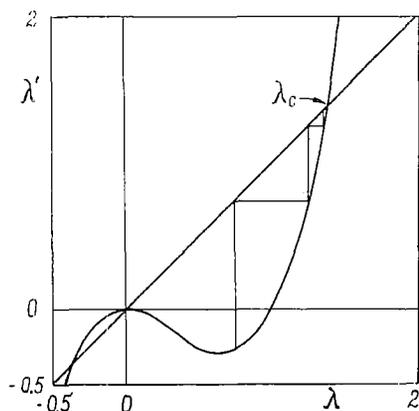


Рис.8. Ренормдинамика на "диаграмме Ламерея"

находим из известного выражения для мультипликатора неподвижной точки:

$$\mu_c = 1 - \sqrt{1 + 4\lambda_c} = -1.54246. \quad (17)$$

Поскольку  $|\mu_c| > 1$ , то все циклы в критической точке неустойчивы.

При ренормировке в критической точке масштаб динамической переменной  $x$  пересчитывается по правилу (14), что позволяет оценить масштабную константу  $a_F = 1/(1 - \lambda_c) = -2.73205$ .

Нетрудно получить теперь закон (3) сходимости бифуркационных значений  $\lambda_n$  к критической точке. Из отображения  $\lambda_n = \varphi(\lambda_{n+1})$  при  $\lambda_{n+1} \rightarrow \lambda_c$  находим:

$$\lambda_n \approx \varphi(\lambda_c) + \varphi'(\lambda_c)(\lambda_{n+1} - \lambda_c) = \lambda_c + \varphi'(\lambda_c)(\lambda_{n+1} - \lambda_c). \quad (18)$$

Это и есть соотношение (3), причем для константы  $\delta_F$  имеем  $\delta_F = \varphi'(\lambda_c) = 4 + \sqrt{3} = 5.73205$ .

В табл. 2 приведены точные и приближенные значения всех скейлинговых констант, сопоставляя которые можно судить о точности описанной схемы РГ анализа.

Итак, приближенный РГ анализ позволяет понять качественную сторону процедуры перенормировки и предсказывает основные критические закономерности перехода к хаосу через каскад удвоений периода.

Рассмотренная здесь схема ренормгруппового анализа является приближенной, что связано с приближенным характером процедуры перенормировки, которая может быть сделана более точной. Для этого выполним отображение (2) четыре раза и оставим в полученном точном соотношении члены только порядка  $x^2$ :

$$x_{n+4} = 1 - \lambda [1 - \lambda(1 - \lambda)^2]^2 + 8\lambda^4(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]x_n^2 + \dots \quad (19)$$

Потребуем теперь, чтобы полученный оператор эволюции был бы подобен оператору эволюции на удвоенном интервале времени (13). Это приводит к соотношению

$$8\lambda^4(1 - \lambda)[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]\{1 - \lambda[1 - \lambda(1 - \lambda)^2]^2\} = 2(\lambda')^2(1 - \lambda'), \quad (20)$$

которое задает в неявной форме уточненное значение выражения для функции  $\lambda' = \varphi(\lambda)$ .

Такая процедура допускает дальнейшее уточнение: можно потребовать, чтобы были подобны с точностью до членов порядка  $x^2$  операторы эволюции за четыре и восемь, затем - восемь и шестнадцать, ...,  $2^k$  и  $2^{k+1}$  временных шага. Это приводит каждый раз ко все более точному выражению для функции  $\lambda' = \varphi(\lambda)$ . В зависимости от уровня РГ анализа  $k$  можно получить различные значения скейлинговой константы  $\delta_F = \varphi'(\lambda_c)$  и критической точки  $\lambda_c = \varphi(\lambda_c)$  (табл. 3).

Таблица 1

Таблица 2

Таблица 3

Критич. параметры	Значение параметра		$n$	$\lambda_n$		$k$	$\delta_F$	$\lambda_c$
	приблиз.	точное		приблиз.	точное			
$\lambda_c$	1.36603	1.40115	0	0.75	0.75	0	5.732	1.36603
$a_F$	-2.73205	-2.50291	1	1.242792	1.25			
$\delta_F$	5.73205	4.66920	2	1.344006	1.36809894	1	5.129	1.40344
$\mu_c$	-1.54246	-1.60119	3	1.362168	1.39404616			
			4	1.365352	1.39963724	2	4.834	1.40115
			5	1.365908	1.40082874			
			$\dots$	$\dots$	$\dots$	3	4.698	1.40116
			$\infty$	1.366025	1.40115519			

Нетрудно видеть, что в пределе  $k \rightarrow \infty$  получаются точные результаты. Отсюда вытекает важный вывод о том, что фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу характеризуется *одномерной ренормдинамикой* - для его описания достаточно задать одну единственную функцию  $\lambda' = \varphi(\lambda)$ . Поэтому *сценарий Фейгенбаума оказывается типичным в однопараметрической ситуации.*

#### 4. Строгий ренормгрупповой анализ

Изложим теперь основные идеи строгого РГ анализа Фейгенбаума. Обозначая правую часть (1) через  $f_0(x)$ , выполним отображение дважды и изменим масштаб  $x$  в некоторое число раз  $a$ . В результате получим

$$x_{k+2} = af_0(f_0(x_k/a)). \quad (21)$$

Функцию, стоящую в правой части, обозначим теперь через  $f_1(x)$ . Повторяя эту процедуру многократно, приходим к рекуррентному РГ уравнению

$$f_{k+1}(x) = af_k(f_k(x/a)), \quad (22)$$

которое связывает ренормализованные отображения  $f_k$  и  $f_{k+1}$ , определяющие эволюцию системы соответственно за  $2^k$  и  $2^{k+1}$  временных шагов.

Критическое поведение соответствует неподвижной точке уравнения (22):

$$g(x) = ag(g(x/a)). \quad (23)$$

Численное решение этого функционального уравнения позволяет найти масштабную константу  $a = a_F$  и получить функцию  $g(x)$  в виде полиномиальной аппроксимации:

$$g(x) = 1 - 1.527632997x^2 + 0.1048151943x^4 + 0.0267056735x^6 - 0.6065274139x^8 + \\ + 0.0000815819x^{10} + 0.0000253684x^{12} - 0.0000026878x^{14}. \quad (24)$$

Рассмотрим решение уравнения РГ (22) в линейном приближении около неподвижной точки  $g(x)$ . Полагая  $f_k(x) = g(x) + \varepsilon h_k(x)$ , имеем:

$$h_{k+1}(x) = \hat{m}h_k(x), \quad (25)$$

где линейный оператор  $\hat{m}$  определен соотношением

$$\hat{m}h(x) = a[g'(g(x/a))h(x/a) + h(g(x/a))]. \quad (26)$$

Оператор  $\hat{m}$  имеет дискретный спектр, причем (для возмущений неустраимых инфинитезимальной заменой переменных) *только одно собственное число*  $\delta = \delta_F$  *превышает по модулю единицу*. Это означает, что коразмерность данного вида критического поведения равна единице и он является типичным в однопараметрической ситуации. Соответствующая собственная функция  $h(x)$  оператора  $\hat{m}$  может быть найдена численно в виде полиномиальной аппроксимации:

$$h(x) = 1 - 0.3256514x^2 - 0.0505539x^4 + 0.0145598x^6 - 0.0008810x^8 - \\ - 0.0001062x^{10} + 0.0000198x^{12}. \quad (27)$$

При больших  $k$  отображение  $f_k(x)$  имеет вид  $f_k(x) = g(x) + C\delta_F^k h(x)$ , коэффициент  $C$  пропорционален отклонению параметра  $\lambda$  от критической точки. Ясно, что при уменьшении этого отклонения в  $\delta_F$  раз и увеличений  $k$  на единицу (что отвечает удвоению временного масштаба) вид  $f_k$  не изменится. Это и есть фейгенбаумовский скейлинг.

## 5. Фейгенбаумовская критическая динамика реальных нелинейных систем

После работ Фейгенбаума описанный тип критического поведения со всеми присущими ему количественными закономерностями скейлинга в окрестности критической точки был обнаружен в огромном количестве реальных нелинейных физических систем и математических моделей [22,23,31-39].

Приведем несколько примеров, относящихся к системам разной физической природы, что позволит глубже прочувствовать мощь концепции универсальности. Все рассматриваемые физические ситуации являются многопараметрическими, и, чтобы наблюдать переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума, достаточно варьировать всего один параметр. В качестве управляющего параметра удобно выбирать тот, который допускает наиболее простое регулирование и измерение в эксперименте.

**Конвекция Релея - Бенара.** Первый пример заимствован из гидродинамики - это движение горизонтального слоя жидкости, подогреваемого снизу. Как показал Лоренц [40], такая задача при некоторых предположениях описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -Px + Py, \\ \dot{y} &= -xz + Rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz.\end{aligned}\tag{28}$$

Здесь  $R$  - число Релея, пропорциональное разности температур внизу и вверху слоя, нормированное так, что  $R=1$  соответствует порогу конвекции,  $P$  - число Прандтля, пропорциональное отношению кинематической вязкости и теплопроводности жидкости,  $b$  - параметр геометрии.

В качестве управляющего параметра выбирают число Релея, поскольку в эксперименте оно допускает естественное регулирование за счет изменения температуры дна ячейки, в которую помещена жидкость. В обширной литературе, посвященной системе Лоренца, параметры  $P$  и  $b$  обычно полагают равными 10 и  $8/3$  соответственно.

Система (28) характеризуется сложной динамикой. Хаос возникает при превышении числа Релея над пороговым значением  $R = 24.74$ . При еще больших значениях числа Релея имеются "окна" периодических движений. Изменяя  $R$  сверху вниз, внутри этих окон можно наблюдать каскад удвоений периода, а за критической точкой - характерный обратный каскад слияния полос. Одно из наиболее широких окон лежит в интервале  $99.52450 < R < 100.795$ . Для него в табл. 4 приведены бифуркационные значения числа Релея.

Переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума наблюдался и экспериментально для конвекции в ртути, силиконовом масле и др. [23]. Одним из признаков каскада удвоений являлась характерная эволюция спектра колебаний.

**Оптический резонатор с нелинейной средой.** Эта система была рассмотрена в серии работ Икеды с соавторами [41,42] и представляет собой кольцевой резонатор, частично заполненный средой с фазовой нелинейностью. Резонатор возбуждается лучом лазера через одно полупрозрачное зеркало, а выходной сигнал снимается через другое. В результате интерференции промодулированного по фазе сигнала с монохроматическим возможно возникновение сложных колебательных режимов.

Если пренебречь релаксацией фазы колебаний и считать, что она мгновенно реагирует на изменение амплитуды света, то система Икеды может быть приближенно описана двумерным отображением:

$$E_{n+1} = A + BE_n \exp(i|E_n|^2).\tag{29}$$

Таблица 4

Нелинейная система и управляющий параметр	Динамические уравнения	Бифуркационные значения	Критические значения
Конвекция Релея-Бенара $R$	$\dot{x} = -Px + Py,$ $\dot{y} = -Xz + Rx - y,$ $\dot{z} = xy - bz,$ $P=10, b=8/3$	100.7952 99.9800 99.62851 99.54712 99.52934 99.525533 .....	99.52450
Оптический нелинейный резонатор $A$	$E_{n+1} = A +$ $+BE_n \exp(i E_n ^2),$ $B=0.15361446$	2.30729537 2.44065537 2.47918150 2.48632189 2.48826717 2.48868645 2.48877637 2.48879563 .....	2.48880088
Нелинейный осцилятор под внешним воздействием $A$	$\ddot{x} + \gamma \dot{x} +$ $+(1+A \cos \Omega t) \sin x = 0$ $\Omega = 1.56$ $\gamma = 0.15$	0.519 0.79338 0.89150 0.907097 0.909900 0.9105672 .....	0.9107356
Отображение Хенона $\lambda$	$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n,$ $y_{n+1} = x_n,$ $b = 0.3$	1.2675 1.8125 1.9216455 1.9452005 1.9502644 .....	1.9516465
Отображение окружности $K$	$x_{n+1} = x_n + \Omega +$ $+(K/2\pi) \sin 2\pi x_n,$ $\Omega = 0.3$	2.74828266 3.10351200 3.18364271 3.20096158 3.20467850 3.20547489 .....	3.20569196

Здесь  $A$  - комплексная амплитуда света на входе в нелинейную среду;  $B$  - параметр, пропорциональный сигналу лазера;  $E_n$  - параметр диссипации поля в среде.

В качестве управляющего параметра естественно выбрать интенсивность излучения лазера  $A$ . В табл.4 приведены значения этого параметра, при котором наблюдается каскад удвоений периода при фиксированном  $B$ , равном 0.15361446.

**Осциллятор под периодическим внешним воздействием.** Это сам по себе широкий класс физических задач и математических моделей, допускающих механические, радиотехнические (в виде всевозможных нелинейных колебательных контуров), оптические и т.д. реализации. В качестве первого примера укажем осциллятор Дуффинга при гармоническом воздействии:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x + \mu x^3 = A \cos \Omega t, \quad (30)$$

где  $\gamma$  - параметр нелинейности,  $\mu$  - параметр диссипации,  $A$  и  $\Omega$  - амплитуда и частота внешнего воздействия, частота колебаний свободного осциллятора нормирована на единицу. Эта задача характеризуется четырьмя существенными параметрами:  $\gamma$ ,  $\mu$ ,  $\Omega$  и  $A$ .

Частный случай осциллятора Дуффинга представляет собой система Уегы [22]

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x^3 = A \cos t, \quad (31)$$

которая характеризуется двумя параметрами -  $\gamma$  и  $A$ . Она допускает физическую реализацию в виде электронной цепи с нелинейной индуктивностью.

Весьма распространена ситуация параметрического возбуждения нелинейного осциллятора гармоническим сигналом:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + A \cos \Omega t) \sin x = 0. \quad (32)$$

Здесь нелинейность выбрана в виде, типичном для математического маятника.

Все описанные системы демонстрируют каскад удвоений периода движения и переход к хаосу по Фейгенбауму. В качестве управляющего параметра естественно выбрать амплитуду воздействия  $A$ . Для примера в табл. 4 приведены бифуркационные значения амплитуды воздействия и критическая точка для параметрически возбуждаемого осциллятора (32) при фиксированных  $\Omega$  и  $\gamma$ .

В рамках рассматриваемого класса задач внешнее воздействие не обязательно гармоническое, оно может быть и импульсным. В свою очередь, осциллятор может быть и линейным, но тогда для возникновения сложной динамики эффективность толчка должна зависеть от положения осциллятора. Это может быть, например, маятник с затуханием, помещенный между полюсами электромагнита, причем электромагнит периодически включается на очень короткое время. Колебания такого маятника описываются уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Phi(x) \delta(t - nT), \quad (33)$$

где  $\Phi(x)$  - период включения электромагнита,  $T$  - функция, характеризующая распределение поля электромагнита вдоль траектории шарика. Используя известный закон движения маятника между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м импульсами, можно перейти от уравнения (33) к дискретному отображению [43]:

$$x_{n+1} = f(x_n) - b y_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (34)$$

где  $b = \exp(-\gamma T)$  - нормированный параметр диссипации. Если взять функцию  $f(x)$  в виде  $1 - \lambda x^2$ , то получаем отображение Хенона [22-24]:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (35)$$

Отображение Хенона с ростом параметра  $\lambda$  и фиксированном  $b$  также демонстрирует каскад удвоений периода (см. табл. 4).

**Автоколебания, синхронизированные внешним воздействием.** Это тоже широкий класс физических систем. К нему относится, например, *генератор Ван-дер-Поля при периодическом воздействии*:

$$\ddot{x} - (\gamma - x^2)\dot{x} + x = A \cos t. \quad (36)$$

Каскад удвоений периода можно наблюдать с ростом амплитуды воздействия  $A$  в режиме синхронизации, когда реализуются колебания с частотой, находящейся в рациональном соотношении с частотой воздействия.

Рассмотрим достаточно общую ситуацию, когда на систему, демонстрирующую бифуркацию Хопфа рождения предельного цикла, действует периодическое возмущение. В случае импульсного воздействия приходим к уравнению

$$\dot{z} - (\alpha + i\omega)z + (\beta + i\gamma) |z|^2 z = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (37)$$

где  $z = re^{ix}$  - комплексная амплитуда. Рассматривая динамику фазы  $x$  между  $n$ -м и  $(n+1)$ -м импульсами в случае сильной фазовой нелинейности и сильной диссипации, из (37) можно получить *стандартное отображение окружности* [22-24]

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + [K \sin 2\pi x_n] / 2\pi \pmod{1}, \quad (38)$$

где  $\Omega = (\omega - \gamma\alpha/\beta)T$  - нормированная амплитуда воздействия,  $K = 2\pi\gamma A / \sqrt{\alpha\beta}$  - параметр, определяемый соотношением частоты автоколебаний и частоты внешнего воздействия. Отображение окружности - весьма популярная модель для описания эффектов синхронизации и перехода к хаосу через разрушение квазипериодического движения. С ростом амплитуды воздействия  $K$  в пределах какой-либо полосы синхронизации для отображения окружности можно также наблюдать каскад удвоений периода (соответствующий пример приведен в табл. 4).

Все описанные нелинейные системы демонстрируют переход к хаосу по сценарию Фейгенбаума. Этот сценарий может быть обнаружен как в результате компьютерного исследования, так и в реальном эксперименте с помощью любой из рассмотренных нами иллюстраций: по характерному виду бифуркационного дерева, по спектру колебаний, по графику ляпуновского показателя, т.д. Существенно, что для нелинейных систем самой разной физической природы фиксируются одни и те же значения скейлинговых констант. Это обстоятельство демонстрирует важную роль логистического отображения для понимания закономерностей рождения хаоса через удвоения периода в нелинейных системах. В то же время логистическое отображение является одномерным и однопараметрическим. Переход к *многомерным нелинейным системам* привносит определенную специфику в картину удвоений.

Двумерные отображения (например, отображения Хенона) характеризуются двумя мультипликаторами -  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . В точке потери устойчивости  $2^n$  цикла один из мультипликаторов  $2^{n+1}$  цикла равен единице:  $\mu_1 = 1$ . С ростом управляющего параметра мультипликаторы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  движутся навстречу друг другу по действительной оси, затем сливаются, расходятся в комплексной плоскости, обходя начало координат, возвращаются на действительную ось в области  $\mu < 0$ , снова расходятся, и лишь после этого один из них обращается в  $-1$ . Такая эволюция мультипликаторов приводит к последовательной перестройке фазового портрета, как показано на рис.9. Неподвижная точка сначала является устойчивым узлом, затем узел превращается в фокус, а фокус вновь становится устойчивым узлом. В точке бифуркации удвоения узел превращается в седло, и от него отделяются два устойчивых узла, являющиеся элементами цикла удвоенного периода.

В результате такого каскада удвоений формируется сложно устроенный слоистый аттрактор. В отличие от логистического отображения он имеет фрактальную структуру и, соответственно, дробную величину хаусдорфовой размерности не только в критической точке, но и в хаотическом режиме. На

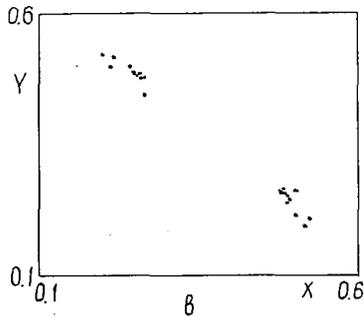
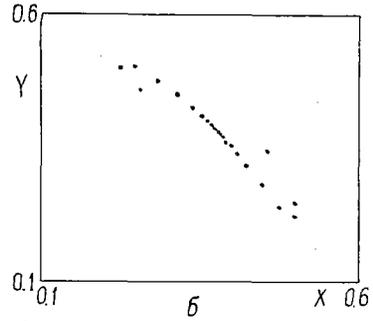
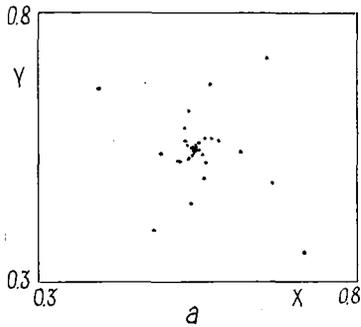


Рис.9. "Падение" изображающей точки на аттрактор Хенона в докритической области при  $b=0.75$ :  
 а -  $\lambda=0.15$ , мультипликаторы комплексные; неподвижная точка типа фокус;  
 б -  $\lambda=2.28$ , мультипликаторы действительные, отрицательные; изображающая точка последовательно посещает соседние ветви, неподвижная точка типа узел;  
 в -  $\lambda=2.38$ , произошло удвоение периода, траектория изображающей точки "накручивается" на оба элемента 2-цикла

рис.10,а показан хаотический аттрактор Хенона, для которого можно видеть характерную фрактальную структуру в "поперечном" направлении, тогда как вдоль аттрактора "нити", из которых он сформирован, сплошные. В то же время критическая ситуация по-прежнему является уникальной. Это легко усмотреть из сопоставления с рис.10,б, на котором изображен аттрактор Хенона в критической точке. Поперечная структура "схлопнулась", а в мелких масштабах нить аттрактора (лежащая на одномерном центральном многообразии) распалась на группы точек - возникла продольная фрактальная структура. Критический аттрактор имеет известную нам величину хаусдорфовой размерности  $D_H$ , равную 0.5380450.

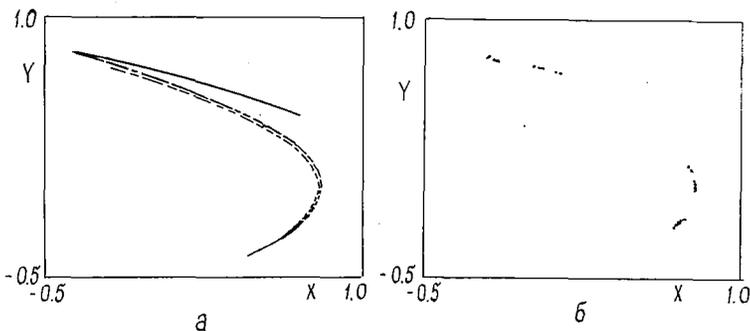


Рис.10. Аттрактор Хенона в хаотической области при  $b=0.3$ ,  $\lambda=2.1$  (а) и в критической точке  $b=0.3$ ,  $\lambda=1.95026$  (б)

Для дискретных отображений с размерностью больше двух картина удвоений протекает аналогично (Collet, Eckmann, Koch [44]).

Для трехмерных потоков, описываемых дифференциальными уравнениями, двумерные отображения дают типичную картину удвоений в сечении Пуанкаре. Чтобы вложить эту картину в трехмерное пространство, необходимо "провернуть" сечение вокруг породившего его предельного цикла (рис.11). При этом сечение Пуанкаре может сделать разное число вращений в меридиональной плоскости. Определив эти числа в каждой точке удвоения, можно ввести

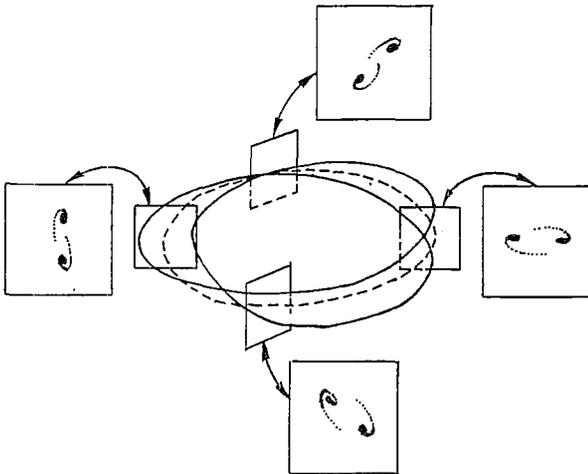


Рис.11. Вложение сечения Пуанкаре в трехмерное фазовое пространство

некоторые классы вложения аттракторов в трехмерное фазовое пространство (Crawford и Omohundro [45]). Для разных классов спектры колебаний нелинейных систем имеют определенные отличия.

Отмеченные особенности, однако, лишь уточняют картину сценария Фейгенбаума. В какой-то мере результаты работы [45] позволяют говорить о возможной классификации, но в рамках все того же типа критической динамики *скейлинговые константы остаются неизменными*. Таким образом, переход к системам с многомерным фазовым пространством не вносит принципиально новых моментов в картину перехода к хаосу по сценарию Фейгенбаума.

\* \* \*

В заключение скажем несколько слов о путях развития "теории удвоений периода". Наиболее естественное продолжение исследований состоит в копировании методологии теории колебаний и волн и предполагает решение задач о динамике логистического отображения под действием внешнего сигнала (периодического и хаотического), о динамике связанных отображений, одномерных и двумерных решеток связанных отображений, сетей. В рамках этого направления накоплен значительный эмпирический компьютерный материал, экспериментальные результаты и целый ряд результатов в рамках метода РГ. Для распределенных (решеточных) систем РГ подход вовлекает пространственную переменную и приводит к новому типу скейлинга - *скейлингу пространственных структур, формирующихся в среде у порога хаоса* (см., например, обзор [46] и литературу к нему).

Еще одна возможность возникает при переходе к многопараметрическим нелинейным системам. В этом случае "фазовый портрет" ренормгруппового уравнения устроен более сложно - возникает разнообразие типов неподвижных точек, причем число неустойчивых направлений, отвечающих за скейлинг, равно двум и больше. В реальной динамике это отвечает наличию новых видов критического поведения с более высокой коразмерностью.

Наконец, третье направление исследований состоит в существенно более глубоком развитии представлений о ренормдинамике, вводящем в рассмотрение более сложные ситуации, такие как *бифуркации в уравнении ренормгруппы* [47-

48], *ренормциклы* [49], *ренормхаос* [50]. Развитие этой тематики, как можно надеяться, приведет к РГ описанию множества, определяющего границу хаоса в многопараметрических нелинейных системах с позиций РГ, универсальности и скейлинга.

#### Библиографический список

1. *Myrberg P.J.* Iteration der reellen polynome zweiten grades//Ann.Acad.Sci. Fenn. Ser. A. 1963. Vol.336. P.1.
2. *Шарковский А.М.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую//Укр. мат. журн. 1964. Т.26. N 1. С.61.
3. *Metropolis N., Stein P.R., Stein M.L.* Finite limit sets for transformations of the unit interval//J.Comb. Theory. 1973. Vol.15. P.25.
4. *May R.M.* Simple mathematical models with very complicated dynamics//Nature. 1976. Vol.261. P.459.
5. *Афраймович В.С., Шильников Л.П.* О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижных точек седлоузла//Докл. АН СССР. 1974. Т.219. N3. С.1281.
6. *Pomeau Y., Manneville P.* Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems//Commun. Math. Phys. 1980. Vol.74. P.189.
7. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence//Commun. Math. Phys. 1971. Vol.20. P.167.
9. *Shenker S.J.* Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results //Physica. 1982. Vol.D5. P.405.
10. *Feigenbaum M.J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations//J. Stat. Phys. 1978. Vol.19, N 1. P.25.
11. *Feigenbaum M.J.* The universal metric properties of nonlinear transformations //J. Stat. Phys. 1979. Vol.21, N 6. P.669.
12. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем//УФН. 1983. Т.141, N 2. С.343.
13. *Hirsh J.E., Nauenberg M., Scalapino D.J.* Intermittency in the presence of noise: a renormalization group formulation//Phys. Lett. 1982. Vol.A87. P.391.
14. *Hu B., Rudnik J.* Exact solution to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.48. P.1645.
15. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasi-periodicity to chaos in dissipative systems// Physica. 1983. Vol.D8. P.303.
16. *Feigenbaum M.J., Kadanoff L.P., Shenker S.J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: Renormalization group analysis//Physica. 1982. Vol.5D. P.370.
17. *Hu B.* Introduction to real-space renormalization-group methods in critical and chaotic phenomena//Phys. Rep. 1982. Vol.91, N.5. P.233.
18. *Aranson I.S., Gaponov-Grekhov A.V., Rabinovich M.I.* The onset and spatial development of turbulence in flow systems//Physica. 1988. Vol.D33. P.1.
19. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior//Phys. Rev. 1981. Vol.A24, N5. P.2669.
20. *Закс М.А., Любимов Д.В., Пиковский А.С.* Универсальные сценарии перехода к хаосу через гомоклинические бифуркации. Препринт ин-та механики сплошных сред УО АН СССР. 1987. 70 с.
21. *Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М.* Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм//УМН. 1984. Т.39, N 3. С.3.
22. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
23. *Берже П., Помо И., Вигаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991.
24. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.

25. *Jakobson M.V.* Absolutely continuous measures for oneparameter families of one-dimensional maps//Commun. Math. Phys. 1981. Vol.81, N 1. P.39.
26. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.А., Романенко Ю.Е.* Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1986.
27. *Huberman B., Zisook A.* Power spectra of strange attractors//Phys. Rev. Lett. 1981. Vol.26. P.626.
28. *Nauenberg M., Rudnik J.* Universality and the power spectrum at the onset of chaos//Phys. Rev. 1981. Vol.B24. P.493.
29. *Halsey T.S., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I.* Fractal measures and their singularities//Phys. Rev. 1986. Vol.A33. P.1141.
30. *Grassberger P., Procaccia I.* Characterization of strange attractors//Phys. Rev. Lett. 1983. Vol.50, N 5. P.346.
31. *Lanford O.E.* III. A computer assisted proof of the Feigenbaum conjectures //Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol.6, N 3. P.427.
32. *Franceschini V.* Feigenbaum sequece of bifurcations in the Lorenz model//J. Stat. Phys. 1980. Vol.22. P.397.
33. *Kai T.* Universality of power spectrum of a dinamical system with an infinite sequence of period doubling bifurcations//Phys. Lett. 1981. Vol.A86, N 5. P.263.
34. *Testa J., Pere J., Jeffries C.* Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.48, N 11. P.714.
35. *Yen W.J., Kao Y.H.* Universal scaling and chaotic behavior of a Josephson-junction analog//Phys. Rev. Lett. 1982. Vol.49, N 26. P.1888.
36. *Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорг Т.Е., Сафонова М.А.* О бифуркациях в трехмерной двухпараметрической автоколебательной системе со странным аттрактором//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1983. Т.26, N 2, С.169.
37. *Libhaber A., Fauve S., Laroche C.* Two-parameter study of the routes to chaos //Physica. 1983. Vol.ZD. P.73.
38. *Xiao-lan Chen, You-gin Wang, Shi-gang Chen.* Period-doubling bifurcations and chaotic behavior in nonequilibrium superconductivity film//Solid State Commun. 1984. Vol.25, N 1. P.1.
39. *Астахов В.В., Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Исследование динамики нелинейного колебательного контура при гармоническом воздействии//Радиотехника и электроника. 1987. Т.32, N 12. С.2558.
40. *Lorenz E.N.* Deterministic nonperiodic flow//J. Atmos. Sci. 1963. Vol.20, N 2. P.130.
41. *Ikeda K., Daido H., Akimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol.45. P.709.
42. *Carmichael H., Snapp R., Schieve W.* Oscillatory instabilities leading to "optical turbulence" in a bistable ring cavity//Phys. Rev. 1982. Vol.26. P.3408.
43. *Кузнецов С.П., Ерастова Е.Н.* Теория Фейгенбаума//Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов, Изд-во Саратов. ун-та, 1983. Кн.2. С.3.
44. *Collet P., Eckmann J.P., Koch H.* Period doubling bifurcations for families of maps on  $R^n$ //J.stat. Phys. 1980. Vol.25, N 1. P.1.
45. *Crawford D., Omohundro S.* On the global structure of period doubling flows //Physica. 1984. Vol.13D. P.161.
46. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений: Обзор//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1991. Т.34, N 10.С.1021.
47. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Воздействие фрактального сигнала на систему Фейгенбаума и бифуркация в уравнении ренормгруппы//Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1991. Т.34, N 6. С.661.
48. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Period-doubling system under fractal signal. Bifurcation in the renormalization group equation//Chaos, Solitons&Fractals. 1991. Vol.1, N 4. P.355.
49. *Chang S.J., Fendley P.R.* Scaling and universal behavior on the bifurcation attractor//Phys. Rev. 1986. Vol.A33, N 6. P.4092.

50. Чириков Б.В., Шепелянский Д.Л. Граница хаоса и статистические аномалии. Препринт 86-174. Саратовский филиал Новосиб. ин-та ядерной физики СО АН СССР, 1986. 30 с.

Саратовский филиал института радиоэлектроники РАН

## CRITICAL DYNAMICS FOR ONE-DIMENSIONAL MAPS PART 1: FEIGENBAUM'S SCENARIO

*A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov*

A review of main results is given, concerning the Feigenbaum's scenario in the context of critical phenomena theory. Computer-generated illustrations of scaling are presented. Approximate renormalization group (RG) analysis is considered, allowing to obtain RG transformation in an explicit form. Examples of nonlinear systems are discussed, demonstrating this type of critical behaviour.



### An offer for publication

*A monography written by famous Russian specialists in vacuum electronics  
prof. Yu.A. Kalinin and A.D. Yessin, Ph.D.*

### METHODS AND MEANS OF PHYSICAL EXPERIMENT IN VACUUM ELECTRONICS OF SUPER HIGH FREQUENCIES

Part 1 of the book entitled "Methods, Apparature and Experimental results" presents a first known attempt of a summary and systematic review of methods and results of the analysis of intense electron beams with or without density or velocity modulation, electromagnetic probing of the RF circuits, study of the electron beam interaction with RF fields, and of the heating properties of electron vacuum devices as well. The results of experimental investigations of electron device physics leading to the enhancement of the device performance are also given.

Part 2, "The Design and Optimization of the Electron Devices on the Basis of Experimental Studies", illustrates the efficiency of the methods described in applications to design and engineering of the power and broadband travelling wave tubes (TWTs). A comparison of the theoretical and experimental results is given which is necessary for testing and improving of theoretical models. A particular attention is paid to the methods of enhancement of the device construction and performance, including repeatability, stability and fidelity.

The monography is adressed to the specialists in engineering, design, production and applications of the power broadband TWTs, accelerators and electron-beam devices. It may also be useful for senior students and post-graduates in electronics and RF physics.

