



ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛБВ-ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

*Ю.П. Блюх, А.В. Борожкин, М.Г. Любарский, И.Н. Онищенко,
Я.Б. Файнберг*

С помощью метода функционального отображения описана и исследована нелинейная динамика ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью. Показано, что при малых коэффициентах обратной связи область линейной стадии взаимодействия пучка с волной приобретает свойства узкополосного фильтра, формирующего квазимонохроматический сигнал к началу нелинейной стадии взаимодействия. Резонансный характер пучковой неустойчивости приводит к сильной зависимости динамики поля от мгновенной частоты сигнала, что и определяет механизм возникновения стохастической автомодуляции выходного сигнала генератора.

Введение

Исследованию механизмов стохастизации в электронных и радиофизических приборах посвящено большое количество оригинальных работ, а также ряд монографий и обзоров (см., например, [1-5]). Такой интерес обусловлен как широким разнообразием режимов, демонстрируемых относительно простыми электронными устройствами, так и возможностью их адекватного математического описания. Последнее относится, в основном, к системам с сосредоточенными параметрами, описываемым уравнениями в полных производных. Такие динамические системы в большей или меньшей степени поддаются аналитическому исследованию и для многих из них удается определить механизм стохастизации, бифуркационные значения параметров и т.д. Значительно хуже изучены системы с распределенными параметрами, динамика которых описывается нелинейными уравнениями в частных производных. Здесь основными являются численные методы исследования и моделирование непрерывной среды дискретным набором связанных между собой ячеек, каждая из которых представляет собой систему с конечным числом степеней свободы [6,7].

В данной работе в качестве математического аппарата описания сложной динамики систем с распределенными параметрами предлагается метод функционального отображения, который, как это будет показано на примере ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью, позволяет продвинуться по пути аналитического исследования и значительно (в 10^4 - 10^3 раз) сокращает время численного решения эволюционных уравнений в частных производных.

1. Эволюционные уравнения и функциональное отображение генератора

Под ЛБВ-генератором с запаздывающей обратной связью будем подразумевать лампу бегущей волны (ЛБВ), работающую в режиме самовозбуждения, обусловленном наличием обратной связи. Такой генератор можно рассматривать как распределенную кольцевую систему, состоящую из усилителя ВЧ колебаний, основанного на эффекте Черенкова, и цепи запаздывающей обратной связи, которая может содержать линейные элементы: аттенюатор, фазовращатель, фильтр и т.д. Нелинейный ЛБВ-усилитель является системой с распределенными параметрами, поскольку описывается уравнениями в частных производных. Эти уравнения хорошо известны [2,8] и в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + s \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\varphi} d\varphi_0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \text{Re}\{\varepsilon e^{i\varphi}\}. \quad (1)$$

Здесь $\varepsilon(\xi, \tau)$ - безразмерная комплексная амплитуда усиливаемой волны; φ_0, φ - начальная и текущая фазы частицы пучка в волне; $s = \text{sign}(v_0 - v_g)$, где v_0 - начальная скорость частиц; v_g - групповая скорость волны.

Связь с размерными переменными (временем t , координатой x , амплитудой продольной компоненты электрического поля волны E) задается формулами

$$\xi = \delta k x, \quad \tau = \frac{v_g}{|v_0 - v_g|} \delta k (v_0 t - x), \quad \varepsilon = \frac{keE}{mv_0^2 \delta k^2},$$

где k - волновой вектор волны, δk - пространственный инкремент неустойчивости.

Уравнения (1) дополняют краевые условия

$$\varphi(0, \tau) = \varphi_0 \in [-\pi, \pi), \quad \frac{\partial \varphi(0, \tau)}{\partial \xi} = 0, \quad (2)$$

означающие отсутствие модуляции плотности и скорости пучка на входе генератора.

Цепь обратной связи зададим условием

$$\varepsilon(0, \tau + \Theta) = q \varepsilon(L, \tau), \quad (3)$$

где $\xi = 0, \xi = L$ - координаты начала и конца области взаимодействия пучка с волной, Θ - время задержки в цепи обратной связи, q - комплексный коэффициент обратной связи.

Чтобы полностью определить задачу, необходимо описать начальное состояние генератора. Это удобно сделать, задав входной сигнал на отрезке времени формуле $\tau \in [0, \Theta + L)$:

$$\varepsilon(0, \tau) = \varepsilon_0(\tau), \quad \tau \in [0, \Theta + L). \quad (4)$$

(Почему верхняя граница интервала равна $\Theta + L$, а не Θ , будет ясно из дальнейшего.)

Уравнения (1) являются простейшими, описывающими нестационарные процессы в ЛБВ. В них не учтено возможное изменение сопротивления связи и групповой скорости с частотой, не учтен пространственный заряд пучка, предполагается малым изменение скорости частиц пучка в процессе взаимодействия с волной. Мы преднамеренно остановились на этих уравнениях, чтобы выяснить, является ли механизм возникновения регулярной и стохастической автомодуляции выходного сигнала генератора свойством данной системы, либо обусловлен какими-либо из перечисленных выше эффектов.

Начально-краевая задача (1) - (4) полностью описывает работу ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью, но в таком виде она малоприменима для аналитического исследования. Численное же решение требует большого объема вычислений из-за большой длительности переходных режимов генерато-

ра, особенно вблизи бифуркационных значений параметров, и не всегда дает ответ на вопрос о механизме возникновения регулярной или стохастической автомодуляции.

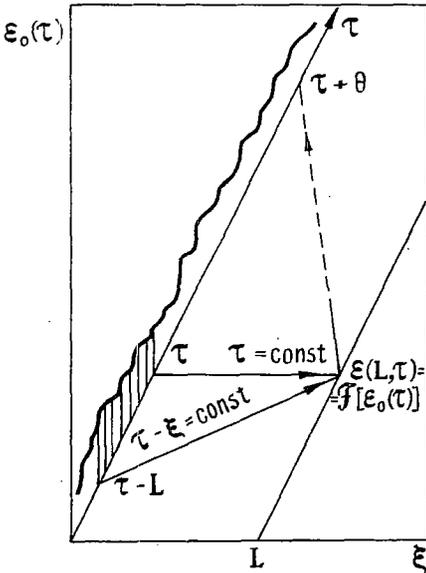


Рис.1. Схема пространственно-временных связей в ЛБВ-генераторе

Исследование генератора и его моделирование на ЭВМ значительно упростится, если предварительно решить задачу без обратной связи, т.е. найти нелинейный функционал F , позволяющий по известному входному сигналу $\epsilon_0(\tau)$ определить выходной сигнал:

$$\epsilon(L, \tau) = F[\epsilon_0(\tau)].$$

То, что F является не функцией, а функционалом, следует из системы (1), имеющей два типа характеристик (рис. 1). Информация переносится частицами пучка вдоль характеристик $\tau = \text{const}$ и волной вдоль характеристик $\tau - \xi = \text{const}$. Поэтому значение сигнала на выходе генератора в момент времени τ определяется функцией $\epsilon_0(\tau)$, заданной на интервале времени $[\tau, \tau - L]$.

Определив функционал F и подключив условие (4), можно записать уравнение генератора в виде функционального отображения

$$\epsilon_0(\tau + \Theta) = qF[\epsilon_0(\tau)], \quad (5)$$

эквивалентного исходной задаче в частных производных. В п.2 функционал F будет найден в предположении малого коэффициента обратной связи: $-\ln |q| \gg 1$.

2. Структура функционального отображения ЛБВ-генератора

Система уравнений (1), (2) не имеет аналитических решений. Однако в случае монохроматического входного сигнала,

$$\epsilon_0(\tau) = \epsilon_v e^{iv\tau},$$

решения хорошо изучены численными методами [9,10] и имеют вид

$$\epsilon(\xi, \tau) = \epsilon_v(\xi) e^{iv\tau}.$$

Поведение функции $\epsilon_v(\xi)$ для некоторых значений v показано на рис.2.

Первый же вывод, который следует из приведенных зависимостей, следующий: функция отображения входного сигнала в выходной сигнал не может быть функцией только амплитуды. Даже для монохроматических входных сигналов величина выходного сигнала сильно зависит от частоты. Если же на вход подается сигнал произвольной формы, то для нахождения выходного сигнала нет, казалось бы, иного способа, как численное решение уравнений (1) в частных производных. Однако при $|q| \ll 1$ решение с высокой степенью точности совпадает в каждый момент с монохроматическим, зависящим от двух комплексных параметров - амплитуды и частоты. Это объясняется следующим.

Как видно из рис. 2, амплитуда выходного сигнала не превышает нескольких единиц. Это означает, что при $|q| \ll 1$ сигнал на входе генератора всегда мал.

Разобьем длину L на две условные части: "линейную" $0 < \xi < L_*$ и "нелинейную" $L_* < \xi < L$. На линейной части амплитуда всегда мала и динамика пучка и волны может быть хорошо описана в рамках линейного приближения. Сформировавшееся к концу линейной части состояние пучка и волны является граничным условием для решения задачи на нелинейной части. В дальнейшем будет показано, что даже при широкополосном сигнале на входе прибора длинная линейная часть формирует сигнал, близкий к монохроматическому. Таким образом, на нелинейной стадии решение имеет стандартный двухпараметрический вид. Это утверждение, безусловно, не является абсолютно точным, но точность его тем выше, чем длиннее линейная часть, т.е. чем меньше $|q|$.

Представим линеаризованные уравнения (1) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial \xi} + s \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} &= -i\Phi, & \Phi(0, \tau) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{2} \epsilon, & \frac{\partial \Phi(0, \tau)}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \delta\phi d\omega$, $\delta\phi = \phi - \phi_0$.

Для монохроматического входного сигнала $\epsilon_0(\tau) = \epsilon_v e^{i\nu\tau}$ решение уравнений (6) имеет вид

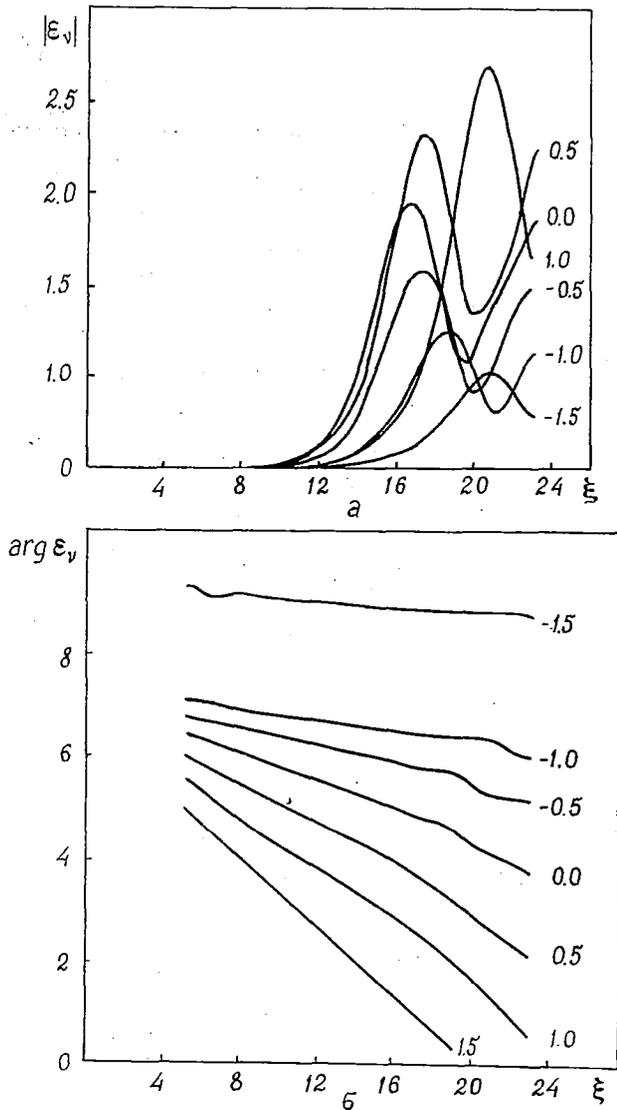


Рис.2. Зависимости амплитуды (а) и фазы (б) монохроматических сигналов от координаты. Кривые параметризованы частотой ν

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(\xi, \tau) &= e^{i\nu\tau} \varepsilon_v \sum_j \alpha_j(\nu) e^{x_j(\nu)\xi}, \\ \Phi_v(\xi, \tau) &= i e^{i\nu\tau} \varepsilon_v \sum_j \alpha_j(\nu) [x_j(\nu) + is\nu] e^{x_j(\nu)\xi}, \\ \frac{\partial \Phi_v(\xi, \tau)}{\partial \xi} &= i e^{i\nu\tau} \varepsilon_v \sum_j \alpha_j(\nu) x_j(\nu) [x_j(\nu) + is\nu] e^{x_j(\nu)\xi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $x_j(\nu)$ - корни характеристического уравнения

$$x^2(x + is\nu) = -i/2, \quad (8)$$

а $\alpha_j(\nu)$ - коэффициенты разложения вектора начальных условий $(\varepsilon_v, 0, 0)$ по собственным векторам системы (6).

Поскольку лишь один корень x_j имеет положительную вещественную часть (обозначим его $x(\nu)$), то поведение решения на линейной стадии взаимодействия быстро приобретает характер экспоненциального роста. С ростом ξ вектор решения $(\varepsilon_v, \Phi_v, \frac{\partial \Phi_v}{\partial \xi})$ экспоненциально быстро стремится к направлению, задаваемому вектором e_v :

$$e_v = (1, i[x(\nu) + is\nu], i x(\nu)[x(\nu) + is\nu]),$$

так что пучковые компоненты решения при $\xi \gg 1$ однозначно связаны с полевой компонентой.

Если форма входного сигнала $\varepsilon_0(\tau)$ произвольна, общее решение системы (6) имеет вид

$$\varepsilon(\xi, \tau) = G_\xi \circ \varepsilon \equiv \int_{\tau-\xi}^{\tau} g_\xi(\tau-\tau') \varepsilon_0(\tau') d\tau',$$

где $g_\xi(\tau-\tau')$ - функция Грина уравнений (6).

Сравнив выражения для общего решения и решения для монохроматического сигнала, нетрудно видеть, что последнее определяет преобразование Фурье полевой компоненты функции Грина, что позволяет найти ее с помощью обратного преобразования Фурье. Приведем явный вид функции g_ξ , полученный в предположении $\xi \gg 1$ методом перевала:

$$g_\xi(\tau) = 1/4 \left(\frac{\alpha_0}{\pi \xi} \right)^{1/2} [1 + 3s \frac{\tau}{\xi}]^2 e^{-3/4 \alpha_0 \xi (1 - \frac{9}{4} (\frac{\tau}{\xi} - \frac{s}{3})^2)}, \quad (9)$$

где $\alpha_0 = (-is + \sqrt{3})2^{-4/3}$ - корень уравнения (8) при $\nu = 0$.

Хотя выражение (9) получено как первый член асимптотического ряда, сравнение численных решений и решений, полученных с использованием функции (9), показывает, что уже при $\xi \gg 3$ различие между ними мало.

Аналогично можно найти компоненты функции Грина g'_ξ и g''_ξ , описывающие поведение функций Φ и $\partial \Phi / \partial \xi$, однако проще воспользоваться тем, что функция Грина является решением исходных уравнений, так что

$$g'_\xi = i \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + s \frac{\partial}{\partial \tau} \right) g_\xi, \quad g''_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi} g'_\xi.$$

Из (9) видно, что $|g_\xi(\tau)|$ имеет максимум при $\tau = (s/3)\xi$, полуширина которого пропорциональна $\xi^{1/2}$. Из этого следует, что частоты $|\nu| \geq \xi^{-1/2}$, если они присутствуют в спектре входного сигнала $\varepsilon_0(\tau)$, подавляются после прохождения линейной стадии взаимодействия (точнее, уменьшается их доля в спектре сигнала). Таким образом, функция Грина действует как фильтр, полоса пропускания которого убывает с ростом длины взаимодействия. При $L \gg 1$ к нелинейной стадии взаимодействия сигнал приходит квазимонохроматическим даже тогда, когда на входе ЛБВ он был широкополосным.

Для описания эволюции сигнала на нелинейной стадии ($L < \xi < L$) необходимо решить исходные уравнения, взяв в качестве граничного условия поле $\varepsilon(L, \tau)$

в конце линейной стадии, а также определив фазы частиц пучка и их скорости при $\xi=L_*$. Последнее можно сделать, воспользовавшись отмеченной выше квази-монохроматичностью сигнала при $L_* \gg 1$, по формулам

$$\begin{aligned} \delta \rho(\varphi_0) &= 2|\Phi| \sin(\varphi_0 + \arg \Phi), \\ \delta v(\varphi_0) &= \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right| \cos(\varphi_0 + \arg \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}), \end{aligned}$$

где $\delta \rho$ и δv - отклонения плотности и скорости частиц пучка от невозмущенных значений.

Таким образом, эволюция сигнала на нелинейной стадии определяется тремя комплекснозначными функциями, которые необходимо задать на интервале времени $(\tau-L_*, \tau)$. Длина этого интервала составляет несколько единиц, а характерный масштаб времени изменения вектора состояния после линейной части порядка $L_*^{1/2} \gg 1$. В силу этого можно было бы считать упомянутые функции постоянными и искать решение в виде монохроматического сигнала с нулевой частотой, но при этом мы бы сильно огрубili задачу, поскольку, как видно на примере монохроматических сигналов, решения весьма чувствительны к временным характеристикам граничного условия. Поэтому учтем зависимость от времени сигнала $\varepsilon(L_*, \tau)$ на интервале $(\tau-L_*, \tau)$, аппроксимировав его экспонентой:

$$\varepsilon(L_*, \tau) \approx \varepsilon e^{i\nu\tau},$$

где $\nu = -\frac{i}{\varepsilon(L_*, \tau)} \frac{\partial \varepsilon(L_*, \tau)}{\partial \tau}$ - мгновенная частота, вообще говоря, комплексная.

Отметим, что аппроксимировать $\varepsilon(L_*, \tau)$ можно было бы и другой функцией, например, полиномом, но использование мгновенной частоты ν в качестве характеристики сигнала более удобно.

Может показаться, что необходимо определить мгновенные частоты и амплитуды функций, описывающих вариации плотности и скорости пучка. Однако в этом нет необходимости, поскольку при $L_* \gg 1$ все три функции имеют одну и ту же частоту, а их амплитуды образуют вектор с направлением e_* .

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим структуру полевой компоненты функции Грина, которую можно записать в виде

$$g_\xi(\tau-\tau') = \xi^{-1/2} P(u) e^{\alpha\xi(1-u^2)},$$

где $P(u)$ - полином, $u = 3/2[(\tau-\tau')/\xi - s/3]$, $|\alpha| \sim 1$.

При вычислении свертки $G \circ \varepsilon$ не все члены полинома равноправны, что показывает следующая простая оценка. Пусть

$$\begin{aligned} I_n &= \int u^n e^{-\alpha\xi u^2} \varepsilon_0(\tau') dt', \\ C_n &= \int |v|^n |e^{-\alpha v^2}| dv, \end{aligned}$$

тогда

$$|I_n| \leq \max |\varepsilon_0| C_n \xi^{-n/2 - 1/2}. \quad (10)$$

Таким образом, при $\xi \gg 1$ вклад каждого члена полинома тем меньше, чем выше его степень.

Представим выражение для мгновенной частоты при $\xi=L_*$ в виде

$$\nu = -\frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\frac{i}{G_{L_* \circ \varepsilon_0}} \frac{\partial}{\partial \tau} G_{L_* \circ \varepsilon_0}.$$

Поскольку функция $\partial g_\xi / \partial \tau$ того же типа, что и g_ξ , то и к ней применима оценка (10). Частоту ν можно представить в виде

$$\nu = a_0 + a_1 \frac{I_1}{I_0} + \dots$$

с независимыми от входного сигнала $\varepsilon_0(\tau)$ коэффициентами a_i . Заметим, что $a_0=0$ с точностью до ξ^{-1} , поскольку старший член соответствующего полинома антисимметричен по $\tau-\tau'$. Таким образом, в первом неисчезающем приближении для v справедливо выражение

$$v \approx a_1 \frac{I_1}{I_0} \sim \xi^{-1/2},$$

что согласуется со сделанной выше оценкой полосы пропускания длинной линейной части ЛБВ.

Пучковые компоненты функции Грина имеют аналогичную структуру. Поэтому

$$\Phi/\varepsilon = i \left(\frac{\partial G_\xi}{\partial \xi} + s \frac{\partial G_\xi}{\partial \tau} \right) \circ \varepsilon / G_\xi \circ \varepsilon = b_0 + b_1 (I_1/I_0) + \dots$$

и такое же представление имеет место для $\varepsilon^{-1} \partial \Phi / \partial \xi$, т.е. эти функции однозначно (с точностью до $\xi^{-1/2}$) задаются мгновенной частотой v , что и требовалось доказать.

Таким образом, при большой длине L линейной стадии эволюция сигнала на нелинейной стадии зависит от двух параметров: амплитуды и мгновенной частоты промежуточного сигнала $\varepsilon(L, \tau)$. Следующие два обстоятельства упрощают эту зависимость. Во-первых, аргумент решения на нелинейной стадии меняется практически по тому же закону, что и на линейной (см. рис.2). Во-вторых, модуль выходного сигнала не зависит от фазы промежуточного сигнала $\varepsilon(L, \tau)$, что следует из инвариантности исходной системы (1) относительно сдвига фазы поля.

Исходя из этого, зависимость выходного сигнала от промежуточного имеет вид

$$\varepsilon(L, \tau) = F_{L-L_*}(|\varepsilon(L_*, \tau)|, v(\tau)) = e^{i \arg G_{L-L_*} \circ \varepsilon(L_*, \tau)},$$

где F - вещественнозначная функция.

Поскольку $(L-L_*)^{-1} \ll L_*$, то $v(\tau)$ можно с той же степенью точности вычислить по формулам линейной теории как при $\xi=L_*$, так и при $\xi=L$, а модули полей (в том же линейном приближении) в точках $\xi=L_*$ и $\xi=L$ связаны соотношением

$$|G_L \circ \varepsilon_0| = e^{\operatorname{Re} v(L-L_*)} |G_{L_*} \circ \varepsilon_0|.$$

Суммируя все вышесказанное, получим окончательно искомый вид функционала, связывающего входной и выходной сигналы ЛБВ:

$$\varepsilon(L, \tau) = F_L(|G_L \circ \varepsilon_0(\tau)|, v(\tau)) \frac{G_L \circ \varepsilon_0(\tau)}{|G_L \circ \varepsilon_0(\tau)|},$$

$$v(\tau) = -i \frac{\partial}{\partial \tau} \ln G_L \circ \varepsilon_0(\tau).$$

Таким образом, работу ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью можно описать функциональным отображением для входного сигнала:

$$\varepsilon_0(\tau + \Theta) = q F_L(|G_L \circ \varepsilon_0(\tau)|, v(\tau)) \frac{G_L \circ \varepsilon_0(\tau)}{|G_L \circ \varepsilon_0(\tau)|}. \quad (11)$$

Функция F_L может быть задана в виде таблицы, полученной численным решением уравнений в полных производных, либо аппроксимирована какой-либо удобной для работы функцией, например, полиномом.

Прежде чем перейти к исследованию свойств данного функционального отображения, перечислим те особенности черенковского взаимодействия, которые позволили нам определить вид функционала F :

1) наличие двух пересекающихся семейств характеристик уравнений в частных производных,

2) наличие неустойчивости, приводящей к экспоненциальному росту одного из возможных решений линейной теории,

3) резонансный характер неустойчивости, т.е. зависимость пространственного инкремента неустойчивости от частоты исходного возмущения,

4) малость коэффициента обратной связи, благодаря чему длинная линейная стадия взаимодействия формирует стандартный вектор состояния.

Перечисленные условия могут быть выполнены в пучковых генераторах, основанных и на других элементарных механизмах взаимодействия волн с частицами - на нормальном и аномальном эффектах Допплера.

В заключение отметим, что к функциональному отображению приведенного типа сводится целый класс уравнений в полных производных с запаздывающим аргументом.

3. Механизмы стохастической автомодуляции

Исследуем возможные механизмы потери устойчивости монохроматических режимов работы генераторов, описываемых отображением (11). Численное решение уравнений (1) - (3) показывает, что после разрушения монохроматического режима довольно быстро (например, при увеличении тока пучка) наступает режим стохастической автомодуляции. Это указывает, как правило, на совпадение механизма разрушения монохроматического режима с механизмом его стохастизации. Поэтому определение условий и механизма потери устойчивости монохроматических решений дает хорошую оценку снизу для тока стохастической автомодуляции генератора и позволяет качественно описать основные спектральные характеристики сигнала в этом режиме.

Будем рассматривать уравнение

$$\varepsilon(\tau+\Theta) = F(|G \circ \varepsilon(\tau)|, \nu(\tau)) e^{i \arg G \circ \varepsilon(\tau)}, \quad (12)$$

к которому легко перейти от (11) с помощью очевидных переобозначений. Функционал G будем описывать его комплексной амплитудно-частотной характеристикой $a(\nu)$, задаваемой соотношением

$$G \circ e^{i\nu\tau} = a(\nu) e^{i\nu\tau}.$$

Уравнение (12) допускает монохроматические решения с частотами ν_n , удовлетворяющими условию фазового баланса

$$\Theta \nu_n = \arg a(\nu_n) + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

и амплитудами ε_n , определяемыми из уравнения

$$\varepsilon_n = F(|a(\nu_n)| \varepsilon_n, \nu_n). \quad (13)$$

Исследуем устойчивость описанных решений, для чего представим $\varepsilon(\tau)$ в виде

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_n e^{i\nu_n\tau} (1 + u(\tau)),$$

где $u(\tau)$ - малое возмущение.

Линеаризуя уравнение (12) вблизи невозмущенного монохроматического решения, получим уравнение для $u(\tau)$, решение которого в силу его линейности будем искать в виде

$$u(\tau) = e^{\gamma\tau} (u_+ e^{i\mu\tau} + u_- e^{-i\mu\tau}).$$

Опуская очевидные выкладки, приведем характеристическое уравнение системы линейных уравнений для u_+ , u_- :

$$e^{2\lambda b} - \frac{1}{2} e^{2\lambda b} \left(\frac{a_+}{a_0} + \frac{a_-^*}{a_0^*} \right) \left(1 + |a_0| \left| \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \ln F}{\partial v} \right| \right) + \frac{a_+ a_-^*}{|a_0|} \frac{\partial F}{\partial x} \left(1 + \lambda \frac{\partial \ln F}{\partial v} \right) = 0. \quad (13)$$

Здесь $\lambda = \gamma + i\mu$, $a_0 = a(v_n)$, $a_{\pm} = a(v_n \pm \mu)$, $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$ - производные по первому и второму аргументам функции F в точке $|a(v_n)|_{\epsilon_n, v_n}$.

Монохроматический режим неустойчив, если хотя бы один из корней λ характеристического уравнения расположен в правой полуплоскости.

Рассмотрим сначала простой случай, когда $\partial F / \partial v = \partial a / \partial v = 0$. При этом уравнение (13) упрощается:

$$e^{2\lambda b} - e^{2\lambda b} \left(1 + |a_0| \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \right) + |a_0| \frac{\partial F}{\partial x} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет два семейства корней:

$$\lambda_k^{(1)} = i2\pi k / \Theta + i\pi/2(1 - \text{sign} \partial F / \partial x) + \ln(|a_0| |\partial F / \partial x|) / \Theta, \\ \lambda_k^{(2)} = i2\pi k / \Theta, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Корни первого семейства обладают вещественной частью, что дает следующее условие неустойчивости монохроматического режима:

$$|a_0| \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| > 1. \quad (15)$$

Заметим, что предположение о независимости функций F и a от частоты ν превращает отображение (12) в одномерное, для которого условие (15) является, как известно [11], условием неустойчивости неподвижной точки.

Учтем теперь зависимость функций F и a от ν . Здесь в первую очередь следует обратить внимание на второе семейство корней $\lambda^{(2)}$, поскольку даже слабая зависимость упомянутых функций от ν может сдвинуть корни $\lambda_k^{(2)}$ с мнимой оси, и безразличное равновесие по соответствующему направлению будет нарушено. Семейство же $\lambda^{(1)}$ устойчиво к слабой зависимости от ν .

Рассмотрим случай, когда изменение функций F и a на соседних собственных частотах генератора невелико:

$$\left| \frac{\partial a}{\partial v} \right| \frac{1}{\Theta} \ll 1, \quad \left| \frac{\partial \ln F}{\partial v} \right| \frac{1}{\Theta} \ll 1. \quad (16)$$

Для ЛБВ-генератора первое условие, как следует из вида (9) функции Грина, эквивалентно неравенству

$$L^{1/2} / \Theta \ll 1.$$

Поскольку в безразмерных переменных, в которых записано исходное уравнение (1), $\Theta \geq L$, а $|\partial \ln F / \partial v| \sim 1$, то оба неравенства (16) эквивалентны условию $L \gg 1$, выполнение которого мы предположили ранее.

Рассмотрим сначала случай, когда от ν зависит только a . Поскольку семейство $\lambda^{(2)}$ в том приближении, в котором оно получено, не зависит от вида F , положим $F \equiv 1$. В этом случае искомое решение характеристического уравнения имеет вид

$$\lambda_k^{(2)} = i \frac{2\pi k}{\Theta} \left[1 + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \arg a(v_n)}{\partial v_n} \right] + \frac{2\pi^2 k^2}{\Theta^4} \frac{1}{|a(v_n)|} \frac{\partial^2 |a(v_n)|}{\partial v_n^2},$$

т.е. при

$$\frac{\partial^2 |a(v_n)|}{\partial v_n^2} > 0 \quad (17)$$

монохроматический режим неустойчив.

Таким образом, монохроматический режим генератора, состоящего из фильтра ($a(v)$) и идеального ограничителя ($F \equiv 1$) в качестве нелинейного элемента, неустойчив, если амплитудно-частотная характеристика фильтра локально вогнутая. Этот результат был получен еще в 50-х годах И.С. Гоноровским [12].

Следует подчеркнуть, что оба критерия - (15), (17) - получены нами из одного характеристического уравнения, т.е. функциональное отображение содержит в себе оба механизма потери устойчивости. Будем называть первый механизм потери устойчивости амплитудным, а второй - частотным, поскольку первый связан с функцией отображения амплитуды и является простым обобщением механизма потери устойчивости в точечном отображении, а второй обусловлен частотными свойствами отображения.

Учтем теперь зависимость $F(v)$, но прежде покажем, что без учета этой зависимости невозможно определение механизма потери устойчивости монохроматического режима работы ЛБВ-генератора.

Действительно, амплитудно-частотная характеристика функции Грина выпуклая в достаточно широкой области вблизи максимума, приходящегося на нулевую частоту. Это простое следствие того факта, что максимальный инкремент пучковой неустойчивости достигается при точном резонансе между волной и частицами пучка. Что же касается амплитудного механизма, то, казалось бы, падающий участок зависимости $|\epsilon_{\text{вых}}(\epsilon_{\text{вх}})|$ может при изменении параметров q и L стать достаточно крутым, чтобы выполнялось условие $|a \partial F / \partial x| > 1$. Для ЛБВ-генератора всегда, однако, выполняется обратное неравенство. Для доказательства этого утверждения определим зависимость $F(|\epsilon_0|)$, используя решения $|\epsilon(\xi)|$ уравнений в полных производных (см. рис. 2).

Зависимость $\epsilon_{\text{вых}}(\epsilon_{\text{вх}})$ может быть получена решением уравнений с различными начальными условиями $\epsilon_{\text{вх}}$ и сопоставлением соответствующих амплитуд выходного сигнала $\epsilon_{\text{вых}} = \epsilon(L)$ (рис.3). При $|q| \ll 1$ зависимости $\epsilon(\xi) = f(\xi, \epsilon_{\text{вх}})$ для различных начальных амплитуд отличаются друг от друга только сдвижкой по оси ξ , т.е. $f(\xi, \epsilon_{\text{вх}}) = f(\xi + \ln \epsilon_{\text{вх}} / \text{Re} \alpha)$ и $\epsilon_{\text{вых}} = f(L + \ln \epsilon_{\text{вх}} / \text{Re} \alpha)$.

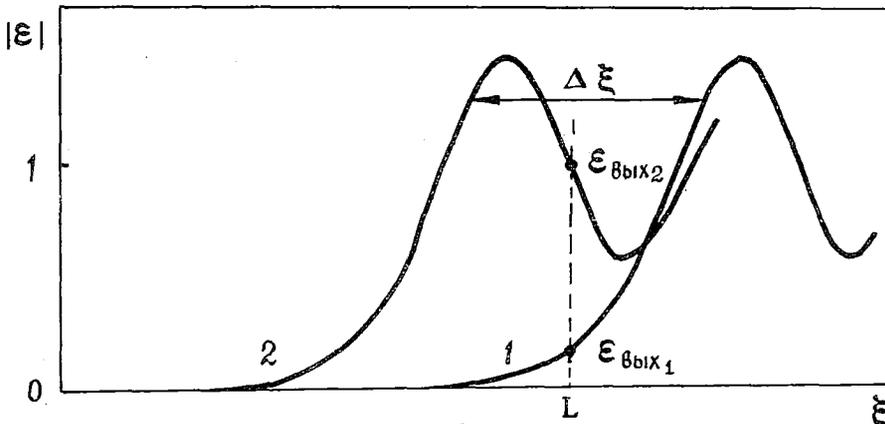


Рис.3. Построение функции отображения $\epsilon_{\text{вых}}(\epsilon_{\text{вх}})$ по зависимости $|\epsilon(\xi)|$. Кривые 1 и 2 отличаются начальной амплитудой $\epsilon_{\text{вх}1} > \epsilon_{\text{вх}2}$. Расстояние $\Delta \xi$ определяется выражением $\Delta \xi \text{Re} \alpha = \ln(\epsilon_{\text{вх}1} / \epsilon_{\text{вх}2})$

Записав теперь уравнение генератора в дискретном времени в виде отображения

$$\varepsilon_{n+1} = |q| f(L + \ln \varepsilon_n / \text{Re} \alpha), \quad (18)$$

легко получить условие неустойчивости его неподвижной точки ε_* :

$$\left| \frac{\partial \ln f}{\partial \xi} \right|_{\xi = L + \ln \varepsilon_* / \text{Re} \alpha} > \text{Re} \alpha.$$

Но $|\partial \ln \varepsilon(\xi) / \partial \xi|$ максимален на линейной стадии и равен, естественно, $\text{Re} \alpha$, а на нелинейной стадии (до максимума $\varepsilon(\xi)$) уменьшается до нуля. Падающий же участок зависимости $\varepsilon(\xi)$, как это можно убедиться по численным решениям, в высокой степени симметричен относительно максимума $\varepsilon(\xi)$, т.е. и там $|f' / f| < \text{Re} \alpha$. Итерирование отображения (18) с функцией f , построенной численным решением уравнений в полных производных, подтверждает отсутствие режимов с автомодуляцией. Таким образом, наблюдаемая при численном решении уравнений (1) - (4) автомодуляция не может быть объяснена амплитудным механизмом неустойчивости.

Прежде чем перейти к выяснению причины потери устойчивости монохроматического режима генератора, заметим следующее. Отображение (18) можно записать в виде

$$x_{n+1} = f(L + \ln |q| / \text{Re} \alpha + \ln x_n / \text{Re} \alpha), \quad (19)$$

откуда видно, что параметры L и $|q|$ входят только в комбинации $L + \ln |q| / \text{Re} \alpha$. Поскольку на нелинейной стадии функция f периодична с периодом $\approx 2\pi$, то ожидать каких-либо изменений в режиме работы генератора следует при

$$L + (1/\text{Re} \alpha) \ln |q| \approx 2\pi. \quad (20)$$

Второе замечание касается возможности реализации амплитудного механизма неустойчивости в ЛБВ-генераторе. Это может быть достигнуто введением диссипации волны в пространстве взаимодействия, поскольку отмеченная нами симметрия функции $\varepsilon(\xi)$ относительно своего максимума при этом нарушается и падающий участок зависимости $\varepsilon(\xi)$ становится более крутым. При достаточно большой диссипации нами наблюдались возникновение автомодуляции и несколько бифуркаций удвоения периода, причем оба способа - решение уравнений в частных производных и итерация соответствующего отображения - дали прекрасно согласующиеся результаты. В качестве примера на рис. 4 приведены функция отображения f и устойчивый цикл 2^3 , полученные численным решением уравнений ЛБВ с диссипацией.

Вернемся теперь к функциональному отображению (12) и определим критерий неустойчивости в случае, когда функция отображения явно зависит от частоты. Предполагая выполненными условиями (16), воспользуемся методом последовательных приближений для нахождения уточненных значений корней $\lambda_x^{(2)}$ уравнения (13). В результате простых, но довольно громоздких выкладок, получим следующий критерий неустойчивости:

$$(1/2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} |a_0| + \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} |a_0| \right)^2 + \frac{\partial}{\partial v} \ln F \frac{\partial}{\partial v} |a_0| \right] (1 - |a_0| \frac{\partial}{\partial x} F)^{-1} > 0 \quad (21)$$

являющийся обобщением условия (17).

Смысл условия (21) станет яснее, если мы его получим другим способом. Предположим, что амплитудный механизм неустойчивости отсутствует и, более того, амплитудная функция отображения сильно сжимающая. Это означает, что амплитуда гораздо быстрее приходит к своему предельному значению, чем частота ν (τ). В этом случае амплитуду можно считать функцией частоты и можно найти эту зависимость из условия

$$|\varepsilon(\nu)| = F(|a(\nu)|, |\varepsilon(\nu)|, \nu(\tau)), \quad (22)$$

которое следует из отображения (12). Теперь, когда амплитуда $|\varepsilon(\tau)|$ связана с частотой $\nu(\tau)$, отображение (12) переходит в функциональное отображение только для фазы. Таким образом, мы приходим к эффективному фазовому отображению, исследование на устойчивость неподвижных точек (монокроматических решений) которого приводит к критерию неустойчивости

$$(1/2) \frac{d^2}{d\nu^2} |a(\nu)| + \frac{d}{d\nu} |a(\nu)| \frac{d}{d\nu} \ln |\varepsilon(\nu)| > 0, \quad (23)$$

которое, если воспользоваться неявным определением (22) $|\varepsilon(\nu)|$, тождественно совпадает с (21).

Если за потерю устойчивости монокроматического режима ответственен описанный выше частотный механизм неустойчивости, то точки на плоскости $(|\varepsilon|, \nu)$, полученные итерацией отображения (12), должны группироваться вдоль линии $|\varepsilon(\nu)|$.

Перейдем теперь к результатам численного решения уравнения (12) с функцией F , описывающей ЛБВ-усилитель. Функция F строилась по численным решениям уравнений (1) с граничными условиями $\varepsilon_0(\tau) = \varepsilon_0 e^{i\nu\tau}$ с различными частотами ν .

При малых значениях параметра неравновесности $L + \ln |q| / \text{Re} \alpha$ наблюдалось самовозбуждение генератора на одной из собственных частот ν_n , значения которых хорошо согласуются с заранее вычисленными по условию фазового баланса. Следует отметить, что выбором граничного условия $\varepsilon_0(\tau)$, $\tau \in [0, \Theta + L)$ можно добиться возбуждения генератора на той или иной из собственных частот, лежащих вблизи максимума инкремента.

С ростом параметра надкритичности монокроматический режим теряет устойчивость и возникает автомодуляция. Если за потерю устойчивости ответственен описанный выше частотный механизм (условие (23)), то точки на плоскости $(|\varepsilon|, \nu)$, полученные итерацией отображения (12), должны группироваться вдоль линии $|\varepsilon(\nu)|$, определяемой решением уравнения (22). Представленные на рис.5 результаты численного решения убедительно демонстрируют это.

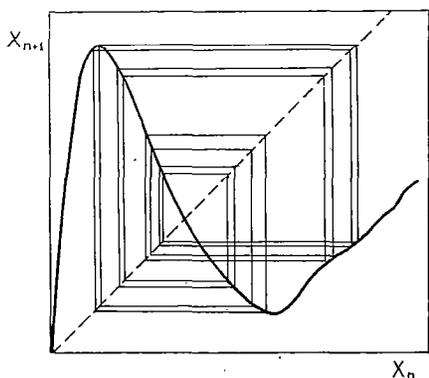


Рис.4. Цикл 2^3 и амплитудная функция отображения ЛБВ-генератора с диссипацией

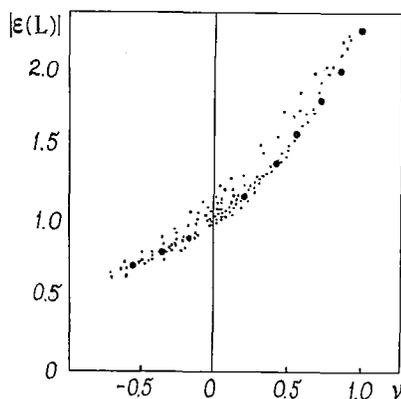
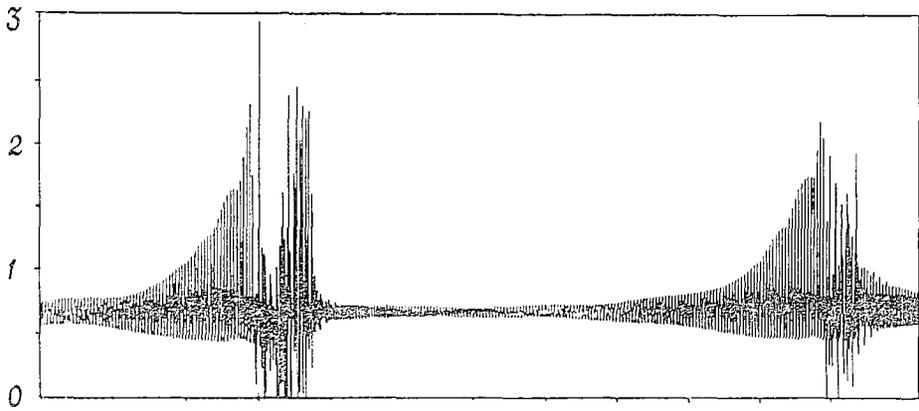
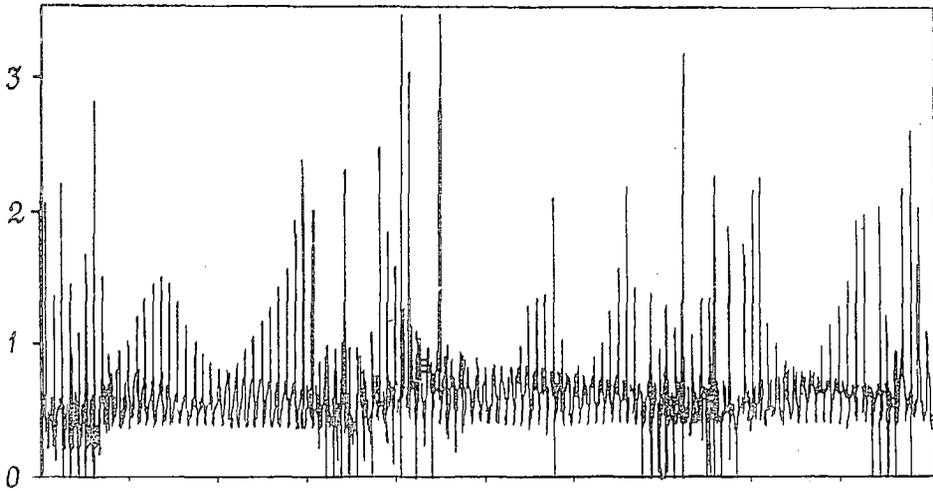


Рис.5. Результаты численного итерирования отображения (12). Крестиками отмечена функция $|\varepsilon(\nu)|$ (22)

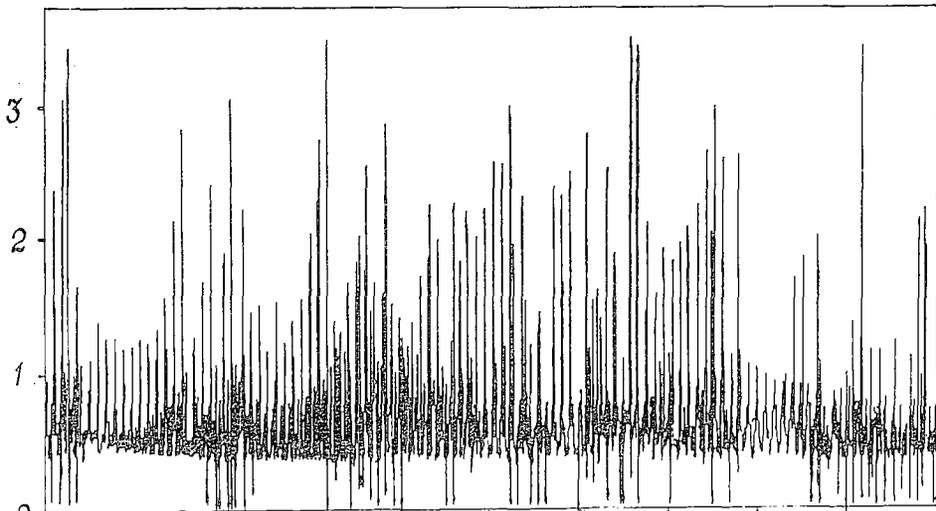
Существует еще один простой способ определения, какой из механизмов - амплитудный или частотный - приводит к автомодуляции. Для этого достаточно определить положение спутников в спектре сигнала, возникающих при превышении порога неустойчивости. В случае амплитудного механизма ближайшие



а



б



в

Рис.6. Примеры реализаций сигнала генератора при увеличении тока пучка

сателлиты расположены на расстоянии порядка π/Θ от основной частоты. В случае же частотного механизма расстояние до сателлитов в два раза больше - $2\pi/\Theta$. Это следует из вида мнимых частей корней $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)}$ характеристического уравнения.

Приведенные на рис. 6,7 примеры реализаций и характерного спектра в развитом стохастическом режиме, полученные методом функционального отображения, подтверждают, что именно частотный механизм неустойчивости приводит к возникновению нерегулярной автомодуляции выходного сигнала ЛБВ-генератора. Об этом свидетельствует как динамика формы сигнала при увеличении параметра надкритичности (отсутствие бифуркаций удвоения периода, свойственных амплитудному механизму неустойчивости), так и спектр сигнала, в котором явно подчеркнуты частоты, отстоящие друг от друга на расстоянии порядка $2\pi/\Theta$. Характерной особенностью рассматриваемой модели является переход к хаосу через перемежающуюся турбулентность, когда участки с плавноменяющейся регулярной автомодуляцией сменяются участками с нерегулярным поведением, длительность которых возрастает с увеличением параметра надкритичности (см. рис. 6,а,б,в).

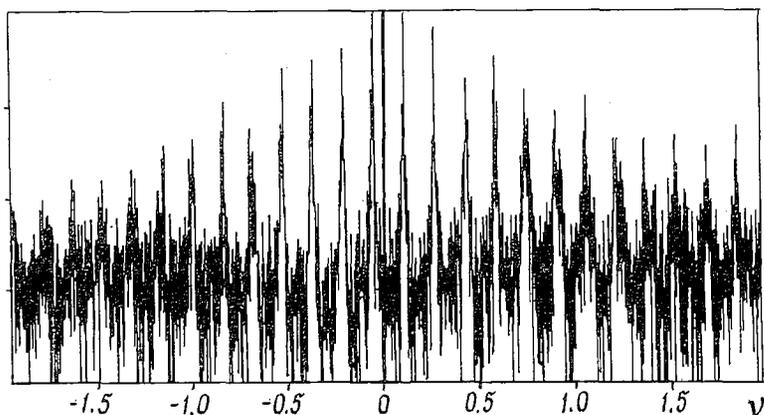


Рис.7. Характерный спектр генератора в режиме развитой стохастичности

Спектральные характеристики стохастических сигналов содержат в себе информацию о механизме неустойчивости. Для амплитудного механизма характерны однородные компактные спектры, в которых собственные частоты выделены незначительно. Частотному же механизму соответствуют спектры с хорошо выделенными собственными частотами и широкий пьедестал со сплошным спектром. Различия в ширине спектра обусловлены тем, что в первом случае сигнал модулирован, в основном, по амплитуде, а во втором случае - по частоте, и только как следствие этого - по амплитуде. Ширина же спектра при частотной модуляции всегда больше, чем при амплитудной модуляции [13].

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующий вывод о характере физических процессов, происходящих в ЛБВ-генераторе. При малом коэффициенте обратной связи даже в режиме развитой стохастической автомодуляции взаимодействие пучка с полем на своей нетривиальной -нелинейной - стадии носит одноволновой характер. Это означает, что на нелинейной стадии в любой момент времени пучок взаимодействует с монохроматической волной, но частота и амплитуда волны различны в разные моменты времени. Разумеется, в этом утверждении содержится некоторая идеализация происходящих процессов, однако такой подход является достаточно точным. Численное решение уравнений (1) - (3) в частных производных показало, что мгновенные функции распределения частиц пучка по скоростям на выходе генератора остаются узкими, как и при

одноволновом взаимодействии, даже в развитом стохастическом режиме генерации, в то время как многоволновое взаимодействие характеризуется в несколько раз более широкой функцией распределения.

Завершая анализ результатов численных решений уравнений (1) и итерацией отображения (12), отметим следующий немаловажный факт. Если сравнить значения среднего квадрата амплитуды сигнала генератора в стохастическом режиме и в режиме монохроматической генерации, то оказывается, что в первом случае он в 1,5-2 раза больше. Это означает, что коэффициент полезного действия при переходе в режим стохастической автомодуляции генератора возрастает в 1,5-2 раза. Для объяснения этого явления обратимся к рис. 5. Как уже отмечалось, при автомодуляции точка, изображающая сигнал генератора, движется вдоль кривой $|\varepsilon(\nu)|$, т.е. значения $|\varepsilon(\tau)|$ бывают как больше, так и меньше соответствующего значения для потерявшего устойчивость монохроматического режима. Однако форма кривой $|\varepsilon(\nu)|$ такова, что $|\varepsilon(\tau)|^2$ в среднем больше своего стационарного значения, в чем легко убедиться, рассмотрев характерные для начальной стадии развития неустойчивости малые гармонические колебания частоты $\nu(\tau)$ вблизи исходной собственной частоты ν_n .

* * *

Метод функционального отображения, предложенный в данной работе, хорошо описывает те особенности распределенных систем, которые теряются при использовании точечных отображений. Для ЛБВ-генератора с запаздывающей обратной связью такой особенностью является нелокальность связи выходного сигнала со входным. Благодаря этому длинная линейная часть генератора приобретает свойства узкополосного фильтра, формирующего квазимонохроматический сигнал к началу нелинейной стадии взаимодействия. Резонансный характер пучковой неустойчивости, лежащий в основе работы генератора, приводит к сильной зависимости динамики поля и частиц пучка на нелинейной стадии от мгновенной частоты сигнала. Именно эта зависимость и определяет механизм потери устойчивости монохроматического режима генерации и возникновение стохастической автомодуляции. Особо следует подчеркнуть, что функциональное отображение исследованного вида применимо для описания нестационарных процессов не только в ЛБВ-генераторе, но и в других генераторах, основанных на распределенном взаимодействии пучка заряженных частиц с собственной волной электродинамической структуры.

Библиографический список

1. Кислов В.Я. Теоретический анализ шумоподобных колебаний в электронно-волновых системах и автогенераторах с запаздыванием // Лекции по электронике СВЧ и радиофизике. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. Т.5. С.78.
2. Гинзбург Н.С., Кузнецов С.П. Периодические и стохастические автомодуляционные режимы в электронных генераторах с распределенным взаимодействием // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С.101.
3. Кузнецов С.П. Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1982. Т.25, N 12. С.1410.
4. Анщенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
5. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989.
6. Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Старобинец И.М. Динамическая модель пространственного развития турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1984. Т.39, N 12. С.561.

7. Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // Докл. АН. СССР. 1986. Т.28, N 5. С.1120.

8. Шапиро В.Д., Файнберг Я.Б. Квазилинейная теория возбуждения колебаний при инжекции электронного пучка в плазменное полупространство // ЖЭТФ. 1964. Т.47, N 4. С.1389.

9. Nordsieck A. Theory of large signal behavior of travellingwave amplifiers // Proc. IRE. 1953. Vol.5, N 5. P.630.

10. Вайнштейн Л.А. Нелинейная теория ЛБВ // Радиотехника и электроника. 1957. Т.2, N 8. С.1027.

11. Кузнецов С.П. Бифуркации удвоения в простой модели распределенной системы // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1982. Т.25, N 11. С.1364.

12. Гоноровский И.С. К теории высокочастотных автогенераторов с запаздывающей обратной связью // Радиотехника. 1958. Т.13, N 5. С.19.

13. Харкевич А.А. Спектры и анализ. М.: Физматгиз, 1962.

Харьковский физико-технический институт

THE APPLICATION OF THE FUNCTIONAL REFLECTION METHOD TO THE TWT-GENERATOR WITH DELAYED FEEDBACK

*Yu.P. Bliokh, A.V. Borodkin, M.G. Lyubarskiy,
I.N. Onischenko, Ya.B. Fainberg*

Using the functional reflection method the nonlinear dynamics of the TWT-generator with delayed feedback is considered. It is shown, that if the feedback factor is small, the region of linear stage beam-wave interaction assumes a character of narrow-band filter. So, the quasi-monochromatic signal is formed to the beginning of the nonlinear stage of interaction. The resonance character of the beam instability leads to the strong dependence of the field dynamics on the instantaneous signal frequency. It determines the origin of stochastic automodulation mechanism of the generator output signal.