



## ПОСТРОЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПО ДАННОЙ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

*С. В. Сочнев*

Предложен способ построения одномерного отображения с заданной плотностью распределения случайной величины (инвариантной мерой) и заданной корреляционной функцией (временем корреляции). Указанная процедура может оказаться полезной в тех приложениях, где приходится моделировать псевдослучайные процессы с заданными свойствами или сопоставлять сложному случайному процессу более простой (одномерное отображение), совпадающий с ним по ряду параметров.

В задачах машинного моделирования часто возникает необходимость построения генераторов шума с заданными свойствами. Имеющиеся стандартные подпрограммы позволяют получать последовательности  $\delta$ -коррелированных псевдослучайных чисел, равномерно распределенных на некотором отрезке. Развито множество способов получения случайных чисел с заданной плотностью распределения. Например, подвергая некоторую случайную величину нелинейному преобразованию, можно получить любую требуемую плотность распределения. Для получения требуемой функции автокорреляции процесса его подвергают линейной фильтрации, но это нарушает исходную плотность распределения. Таким образом, надежных методов получения последовательностей псевдослучайных чисел с заданной функцией плотности распределения и заданной автокорреляционной функцией не существует. Постоянный интерес в области получения генераторов шума с заданными свойствами рождает много интересных алгоритмов. В частности, не новой является идея использования для этой цели простейших динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение, - одномерных отображений.

Рассмотрим и обоснуем построение кусочно-гладкого унимодального отображения отрезка  $[0,1]$  в себя,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n=0, 1, \dots,$$

обладающего следующими свойствами:

- 1) величина  $x$  имеет заданную плотность распределения (инвариантную меру) на отрезке  $[0,1]$ , не обращающуюся нигде на нем в ноль;
- 2) время корреляции и последовательности  $x_n$  равно заданной величине  $\tau$ .

Введем обозначения, которые понадобятся в дальнейшем:

$R(x)$  - функция симметрии отображения такая, что

$$f(x) = f(R(x)) \text{ и } R(R(x)) \equiv x, \quad \forall x \in [0,1];$$

$X_c$  - координата вершины отображения,  $f(X_c) = 1$ ;  $M(x)$  - первообразная инвариантной меры;  $M(x) = \int_x^1 \mu(y)dy$  - вероятность попадания в  $[x, 1]$ .

Графически эти обозначения поясняются на рис.1.

После одной итерации на отрезок  $[f(x), 1]$  отобразятся точки, расположенные на отрезках  $[x, X_c]$  и  $[X_c, R(x)]$ . Вероятность найти точку на одном из двух последних отрезков определяется как

$$P = \left| \int_x^{X_c} \mu(y)dy + \int_{X_c}^{R(x)} \mu(y)dy \right| = |M(x) - M(R(x))|;$$

модуль взят, чтобы учесть случай  $x > X_c$ . Вероятность найти точку на отрезке  $[f(x), 1]$  есть

$$P_1 = \int_{f(x)}^1 \mu(y)dy = M(f(x)).$$

Поскольку предполагается, что плотность распределения инвариантна относительно итераций, то эти вероятности должны совпадать:  $M(f(x)) = |M(x) - M(R(x))|$ . Отсюда получается искомое отображение:

$$f(x) = M^{-1}(|M(x) - M(R(x))|). \quad (1)$$

(Подробнее получение этой формулы рассмотрено в [1]).

Из формулы (1) видно, что при постоянной инвариантной мере (т.е. постоянной  $\mu(x)$ ) отображение можно изменять, изменяя  $R(x)$  - функцию симметрии. Это обстоятельство можно использовать, чтобы получить требуемую корреляционную функцию процесса  $x_n$ .

Отметим следующий факт: если инвариантная мера  $\mu(x)$  симметрична относительно середины отрезка  $[0, 1]$  (т.е.  $\mu(x) = \mu(1-x)$ ) и функция отображения зеркально симметрична (т.е.  $R(x) = 1-x$ ,  $x \in [0, 1]$ ), то процесс  $x_n$  будет  $\delta$ -коррелирован (см. [2]).

Для равномерного распределения в классе функций симметрии

$$R_{X_c}(x) = 1 - \frac{1 - X_c}{X_c} x, \quad x \in [0, X_c]$$

(линейно отображающих  $[0, X_c]$  на отрезок  $[X_c, 1]$ ) там было аналитически показано, что

$$C(\tau) = \begin{cases} C_0 e^{-\tau/\tau_c}, & X_c > 1/2 \\ C_0 \delta(\tau), & X_c = 1/2, \\ C_0 e^{-\tau/\tau_c} (-1)^\tau, & X_c < 1/2, \end{cases}$$

с временем экспоненциального спада

$$\tau_c = \left| \frac{1}{\ln |2X_c - 1|} \right|. \quad (2)$$

Качественно этот результат можно понять, рассмотрев предельные случаи  $X_c \rightarrow 1$  и  $X_c \rightarrow 0$ . В случае  $X_c \rightarrow 1$  (рис.2) основная величина корреляционного интеграла будет набираться на отрезке  $[0, X_c^{(1)}]$ . А на этом отрезке отображение слабо отличается от биссектрисы  $y=x$ , т.е.  $x_{n+1} = x_n \operatorname{tg} \alpha \approx x_n (1+\epsilon)$ , где  $\epsilon \ll 1$ ; это и означает медленный спад корреляций. Причем спад будет тем длительней, чем ближе  $X_c$  к 1. В противоположном случае ( $X_c \rightarrow 0$ ) основная величина корреляционного интеграла набирается на отрезке  $[X_c^{(2)}, 1]$ . На этом отрезке функция последования близка к прямой  $y = 1 - x$ , т.е.

$$x_{n+1} = (1 - x_n) \operatorname{tg} \beta \approx (1 - x_n) (1 + \delta),$$

где  $\delta \ll 1$ ; это означает, что корреляции медленно затухают, меняя знак на каждой следующей итерации. Время затухания тем больше, чем ближе  $X_c$  к 0. Приведенное рассуждение позволяет предположить, что качественно этот результат остается в силе для любого (не только равномерного) распределения, симметричного относительно середины отрезка  $[0,1]$ .

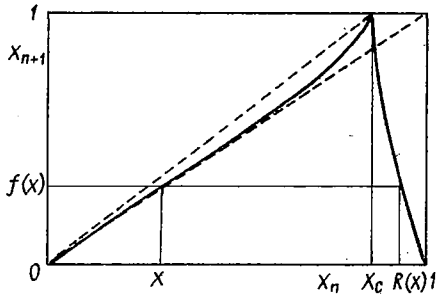


Рис.1. Сгенерированная функция последования для  $\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right]$  при  $\sigma = 0.2$  и  $X_c = 0.85$

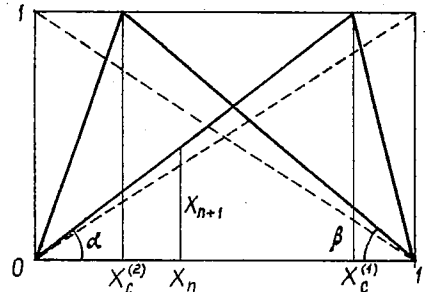


Рис.2. Поведение функции последования в асимптотическом случае при  $X_c \rightarrow 1$  и  $X_c \rightarrow 0$

Оценим функцию корреляции  $C(\tau)$  процесса  $x_n$  в асимптотическом случае  $X_c \rightarrow 1$ . Можно сделать два следующих предположения.

1. Пусть вычисляется функция корреляции от аргумента  $\tau_0$ , тогда точками со значениями  $x > \beta$ , где  $\beta$  определяется из условия

$$f^{\tau_0-1}(\beta) = X_c,$$

в корреляционном интеграле можно пренебречь. В самом деле, в силу монотонности отображения для любого  $x$  из указанной области найдется такое  $\tau \leq \tau_0 - 1$ , что  $f^{\tau}(x) > X_c$ , т.е. точка попадает на отрезок  $[X_c, 1]$  через  $\tau$  итераций. Поскольку якобиан отображения, переводящего асимптотически малый отрезок  $[X_c, 1]$  в отрезок  $[1, 0]$ , асимптотически велик, то за одну такую итерацию точка случайным образом распределится на отрезке  $[0, 1]$ , т.е. "забудет свою предысторию". Такие точки не будут давать вклада в корреляционный интеграл.

Проверим справедливость этого предположения в случае равномерного распределения и

$$R_{X_c}(x) = 1 - \frac{1 - X_c}{X_c} x, \quad x \in [0, X_c]$$

Из [2] (или по формуле (1)) отображение в этом случае есть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{X_c}, & 0 \leq x \leq X_c \\ \frac{1-x}{1-X_c}, & X_c < x \leq 1. \end{cases}$$

Согласно сделанному предположению из корреляционного интеграла  $C(\tau)$  выпадут все точки, кроме  $x \in [0, \beta]$ , где  $f^{\tau}(\beta) = 1$ ,  $\beta = X_c^{\tau}$ . Если  $x \in [0, \beta]$ , то  $f^{\tau}(x) = x/\beta$ . Поэтому

$$C(\tau) = \int_0^{\beta} \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{\beta} - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{\beta^2}{12} = \frac{X_c^{2\tau}}{12}.$$

Это - экспоненциально затухающая корреляционная функция со временем экспоненциального спада  $\tau_c = \left| \frac{1}{2 \ln X_c} \right|$ . В асимптотическом случае  $X_c = 1 - \alpha$ ,  $\alpha$  - мало, получаем  $\tau_c = \frac{1}{2\alpha}$ . Точная формула (2) в этом случае дает тот же результат:

$$\tau_c = \left| \frac{1}{\ln(2(1-\alpha) - 1)} \right| = \frac{1}{2\alpha},$$

т.е. предположение 1 приводит к асимптотически верной формуле. При изменении инвариантной плотности картина качественно измениться не должна.

2. Пусть величина  $\beta$ , о которой говорилось выше, определена. Для вычисления корреляционного интеграла необходимо знать, как ведет себя функция  $f^{[n]}(x)$  на отрезке  $[0, \beta]$ . Известно при этом, что  $f^{[1]}(0) = 0$ ,  $f^{[1]}(\beta) = 1$  и функция  $f^{[1]}(x)$  монотонно возрастает. Предположим, что для ее оценки можно воспользоваться линейной аппроксимацией:

$$f^{[1]}(x) = x/\beta, \quad x \in [0, \beta].$$

Справедливость такой оценки еще будет обсуждена, пока же отметим, что для большинства сгенерированных отображений отличие функции последования от прямой на интересующем участке не сказывалось радикально на результатах вычислений. Для примера на рис.1 приведена сгенерированная  $f(x)$  для

$$\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[ -\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2} \right] \text{ при } \sigma = 0.2 \text{ и } X_c = 0.85.$$

Заметим, что существует отрезок  $[R(\beta), 1]$ , симметричный отрезку  $[0, \beta]$ . Его точки "помнят свою предысторию", как и точки отрезка  $[0, \beta]$ . Для увеличения точности аппроксимации  $C(\tau)$  в случае, промежуточном между асимптотикой  $X_c \rightarrow 1$  и  $X_c = 1/2$ , отрезок  $[R(\beta), 1]$  надо включить в корреляционный интеграл. С учетом сказанного этот интеграл принимает следующий вид:

$$C_1(\beta) = \int_0^\beta dx \left( \frac{x}{\beta} - \frac{1}{2} \right) \left\{ \left( x - \frac{1}{2} \right) \mu(x) + \left( R(x) - \frac{1}{2} \right) \mu(R(x)) \right\} |R_x(x)|. \quad (3)$$

Если теперь в этом интеграле вместо  $\beta$  подставим  $\beta(\tau)$ , то получим явную зависимость функции корреляции от времени.

Для определения  $\beta(\tau)$  обратимся к функции последования в форме (1). В асимптотическом случае  $X_c \rightarrow 1$  обращает на себя внимание тот факт, что  $f(x)$  не сильно отличается от биссектрисы  $y=x$ . Поэтому разложим (1) в ряд Тейлора, удержав первые два члена. Учитывая равенства  $M_x = -\mu(x)$  и  $M_{x^{-1}}(x) = -\frac{1}{\mu(M^{-1}(x))}$ , получим следующую аппроксимацию для функции последования:

$$f(x) = x + \frac{M(R(x))}{\mu(x)} = x \left[ 1 + \frac{\delta(x)}{x} \right]. \quad (4)$$

Чтобы было удобней проследить за динамикой системы, перейдем от функции последования (4) к дифференциальному уравнению, описывающему поведение  $x$ . Это можно сделать в силу малости члена  $\frac{\delta(x)}{x}$ , что соответствует асимптотическому приближению. Для отображения в виде прямой  $f(x) = \frac{x}{X_c}$ ,  $x(\tau) = \frac{x}{X_c^\tau}$ ,

где  $\bar{X}_c$  - постоянная координата вершины отображения. Отсюда  $\frac{dx(\tau)}{d\tau} = -\frac{x}{\bar{X}_c} \ln \bar{X}_c = -x(\tau) \ln \bar{X}_c$ . При условии, что для отображения (4) модуль растяжения в каждой точке  $[1 + \frac{\delta(x)}{x}]$  слабо меняется на расстояниях порядка  $\delta(x)$ , движение будет аналогично выше рассмотренному, если положить  $\frac{1}{\bar{X}_c} = 1 + \frac{\delta(x)}{x}$ . Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\dot{x} = x \ln(1 + \frac{\delta(x)}{x}). \quad (5)$$

Интегрируя, получаем время движения из точки  $z$  в 1:

$$\tau = \int_z^1 \frac{dx}{x \ln(1 + \frac{\delta(x)}{x})}, \quad (6)$$

где  $\delta(x) = \frac{M(R(x))}{\mu(x)}$ .

Если в (6) подставить вместо  $z$  величину  $\beta$ , то получим функцию  $\tau(\beta)$ . Искомая зависимость  $\beta(\tau)$  является функцией, обратной к (6). Для практического определения времени корреляции можно (предполагая экспоненциальное затухание корреляционной функции) определить такое  $\beta^*$ , что

$$C_1(\beta^*) = C_0/e. \quad (7)$$

Время движения из данного  $\beta^*$  в 1 и будет временем корреляции:

$$\tau_c = \int_{\beta^*}^1 \frac{dx}{x \ln(1 + \frac{M(R(x))}{x\mu(x)})}. \quad (8)$$

Получим соответствующие формулы в случае противоположной асимптотики  $X_c \rightarrow 0$ . Рассуждения в этом случае аналогичны (необходимо лишь учесть тот факт, что  $C(\tau)$  - знакопеременная функция). Введем следующие вспомогательные величины:

$X_0$  - неподвижная точка отображения такая, что  $f(X_0) = X_0$ ,  $x = X_0 + \alpha$ ,  $\alpha^*$  - величина аналогичная  $\beta^*$  такая, что  $f^{[\tau_0-1]}(X_0 + \alpha^*) = X_c$ . Она позволяет свести область интегрирования в корреляционном интеграле к отрезку  $[X_0 - \alpha^*, X_0 + \alpha^*]$ . Действительно, остальные точки отрезка  $[0, 1]$  в течение серии из  $\tau_0$  итераций хотя бы один раз попадут на ветвь отображения, переводящую асимптотически малый отрезок  $[0, X_c]$  в отрезок  $[1, 0]$ . Якобиан такого отображения асимптотически велик, и точка случайно распределится на  $[0, 1]$ , т.е. "забудет свою предысторию" и не даст вклада в корреляционный интеграл. Аппроксимируя функцию последования на интересующем нас участке прямой, получаем для корреляционного интеграла:

$$\begin{aligned} |C_2(\alpha^*)| &= \int_{X_0 - \alpha^*}^{X_0 + \alpha^*} d\alpha (X_0 + \alpha - \frac{1}{2}) \{ (X_0 + \alpha - \frac{1}{2}) \mu(X_0 + \alpha) + \\ &+ (R(X_0 + \alpha) - \frac{1}{2}) \mu R(X_0 + \alpha) |R_x(X_0 + \alpha)| \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Закон движения  $\alpha$  аналогичен закону движения  $x$  в предыдущем случае. Время движения из  $\alpha$  в  $1 - X_0$  дается формулой

$$\tau(x^*) = \int_{x^*}^{1-x_0} \frac{2d\alpha}{\alpha(\ln K_1 + \ln K_2)}, \quad (10)$$

где  $K_1 = 1 + \frac{\delta_2(x)}{\alpha}$ ,  $K_2 = 1 - \frac{\delta_2(-x)}{\alpha}$ ,

$$\delta_2(x) = 2X_0 - 1 - \frac{1 - M(R(X_0+x))}{\mu(X_0+x)}. \quad (11)$$

Эти формулы аналогичны формулам (3), (8) для случая  $X_c \rightarrow 1$ . Скорость движения является усреднением скоростей в точках  $x$  и  $-x$  (эти точки лежат симметрично относительно неподвижной точки  $X_0$ ), что является следствием знакопеременности движения. Если теперь найти функцию, обратную к (10)  $x^*(\tau)$ , и подставить в выражение (9), то получим явную зависимость  $C_2(\tau)$ .

Итоговая функция корреляции равна сумме двух найденных:

$$C(\tau) = C_1(\tau) + C_2(\tau). \quad (12)$$

Причем поведение результирующей функции в случае  $X_c \rightarrow 1$  определяется членом  $C_1$ , а в случае  $X_c \rightarrow 0$  - членом  $C_2$ .

Итак, по заданной инвариантной мере  $\mu(x)$  на отрезке  $[0,1]$  и заданной функции симметрии  $R(x)$  произведено построение функции последования одномерного отображения  $f(x)$  согласно формуле (1). При этом первообразная  $M(x)$  инвариантной меры определялась численным интегрированием, а затем аппроксимировалась линейными сплайнами по своим значениям в  $N_M \sim 100$  точках (это было вызвано необходимостью вычислять функцию  $M^{-1}$ , что делало прямые вычисления недопустимо долгими). Функция симметрии  $R(x)$  задавалась на отрезке  $[0, X_c]$  и продолжалась на отрезок  $[X_c, 1]$  из условия  $R(R(x)) \equiv x$ , т.е.  $R(x) = R^{-1}(x)$  при  $x \in [X_c, 1]$ ,  $R^{-1}(x) \in [X_c, 0]$ . Полученная функция последования интерполировалась сплайнами (линейными или кубическими) по своим значениям в  $N_f \sim 20 \div 400$  точках в зависимости от требуемой точности. В основном рассматривались "гауссовы" законы распределения,

$$\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left\{-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

A - нормировочная константа,

хотя возможности численного алгоритма позволяли генерировать широкий спектр законов распределения. Предел варьированию инвариантной меры ставило следующее обстоятельство. Возникала неподвижная точка отображения  $f^{[1]}(x)$

при некотором  $\tau$ , в которой производная  $\left| \frac{df^{[1]}(x)}{dx} \right|$  становилась меньше 1, т.е.

рождался устойчивый предельный цикл, соответствующий данному  $\tau$ ; инвариантная мера при этом разрушалась. Происходило это, как правило, если на некотором отрезке  $I_1$  заданная инвариантная мера принимала нулевое (или очень малое) значение, т.е. эффективный носитель  $\mu(x)$  сжимался. Например, в приведенном выше классе инвариантных мер указанный эффект наступал при  $\sigma \leq 0.1$ . Однако даже при  $\sigma = 0.01$  устранить его можно было, добавив к основному пику  $\mu_\sigma(x)$  небольшой "пьедестал"  $\mu_1(x) = \mu_\sigma^{(1/2)}/1000$ , который, будучи незаметным на фоне  $\mu_\sigma$ , расширял эффективный носитель  $\mu(x)$  до всего отрезка  $[0,1]$  и тем самым восстанавливал инвариантную меру.

Для различных функций последования, построенных таким образом, производилось непосредственное вычисление корреляционной функции с помощью итераций. По случайному заданному начальному значению  $x_0$  строилась последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Функция корреляции вычислялась по формуле

$$C(\tau) = \frac{1}{k-\tau+1} \sum_{i=0}^{k-\tau} x_i x_{i+\tau} - \frac{1}{4}.$$

Следует отметить, что подобные вычисления требуют существенных затрат машинного времени, ибо ошибка  $\varepsilon$  определения  $C(\tau)$  пропорциональна  $K^{1/2}$ , где  $K$  - количество точек, по которым проводится усреднение. По полученной таким образом  $C(\tau)$  методом наименьших квадратов строилась прямая через точки  $(\tau, \ln \frac{C(0)}{C(\tau)})$ , обратный наклон прямой принимался равным временем корреляции  $\tau_c$ .

Для тех же функций последования строились аналогичные графики  $(\tau, \ln \frac{C(0)}{C(\tau)})$ , где  $C(\tau)$  определялось по формуле (12). Из них определялось время корреляции  $\tau_c$ . Графики, приведенные на рис.3, иллюстрируют характерное поведение указанных временных кривых.

Зависимость времени корреляции от  $X_0$  для различных  $\sigma$  представлена на рис.4.

Рассмотрим вопрос о справедливости предположения 2, позволяющего аппроксимировать на отрезке  $[0, \beta]$  функцию  $f^{(1)}(x)$  прямой линией. Для этого оценим поведение функции последования вблизи  $X_c$ . Воспользовавшись значением производной, получим:

$$f_x(X_c) = \frac{\mu(X_c)}{\mu(1)} (1 + |R_x(X_c - 0)|).$$

Отношение  $\frac{\mu(X_c)}{\mu(1)}$  показывает, что если инвариантная мера имеет максимум в центре отрезка и спадает до нуля к краям, то производная функции последования вблизи  $X_c$  будет нарастать до бесконечности при приближении к  $X_c$ , т.е. поведение  $f$  вблизи  $X_c$  будет качественно похоже на изображенное на рис.1. При этом разность между аппроксимирующей линейной функцией  $f^{(1)}(x)$  будет тем больше, чем меньше будет дисперсия  $\sigma^2$  у инвариантной меры. Именно этой разностью определяется ошибка в аналитическом выражении для функции корреляции.

На рис.5. приведена зависимость относительной ошибки  $\varepsilon$  определения времени корреляции  $\tau_c$  от значения среднеквадратичного отклонения  $\sigma$ . Для получения более точной аппроксимации  $f^{(1)}(x)$  можно попытаться интегрировать уравнение  $dx/V(x) = dy/V(y)$ , где  $V(x) = x \ln(1 + \frac{\delta(x)}{x})$  с начальными условиями  $y=1$  при  $x=\beta$ . Полученная таким образом зависимость  $y(x)$  будет хорошим приближением для  $f^{(1)}(x)$ .

При практическом построении генераторов случайных чисел по данному алгоритму следует задать требуемую инвариантную меру (плотность распределения) и по желаемому времени корреляции подобрать  $X_c$ . Причем, для знакопеременного поведения функции корреляции необходимо брать  $X_c < 1/2$ . Конкретную величину  $X_c$  подбирают, исходя из заранее известных зависимостей  $\tau_c(X_c)$  (которые можно получить по формуле (12) или экспериментально).

Преимущество аналитического определения  $C(\tau)$  по формуле (12) состоит в том, что в эту формулу функция  $f(x)$  (которую необходимо построить) не входит явно; там присутствуют лишь заданные  $\mu(x)$ ,  $R(x)$  и определяемая по  $\mu(x)$  первообразная  $M(x)$ .

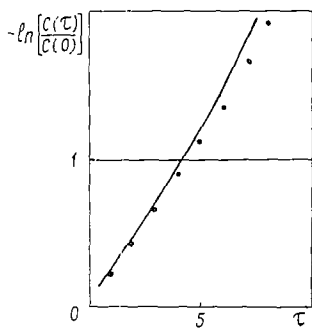


Рис.3. Зависимость логарифма функции корреляции от времени при  $\sigma=0.3, X_c=0.85$ : сплошная линия - результат расчета по формуле (12); точки - результаты вычислений с помощью итераций

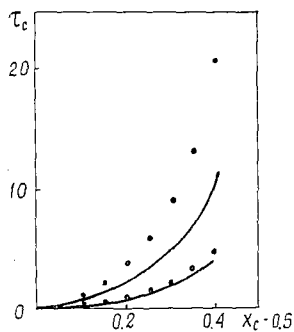


Рис.4. Зависимость времени корреляции от  $X_c$  для различных  $\sigma$ : сплошные линии - результаты аналитических вычислений по формулам (3), (6); точки - результаты вычислений с помощью итераций

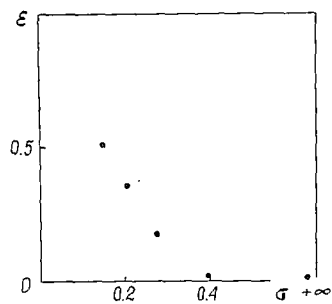


Рис.5. Зависимость относительной ошибки определения времени корреляции  $\varepsilon = \frac{\tau_c - \tau_c^*}{\tau_c^*}$  от значения среднеквадратичного отклонения  $\sigma = (\langle (x - 1/2)^2 \rangle)^{1/2}$  ( $\tau_c$  вычисляется по формуле (12))

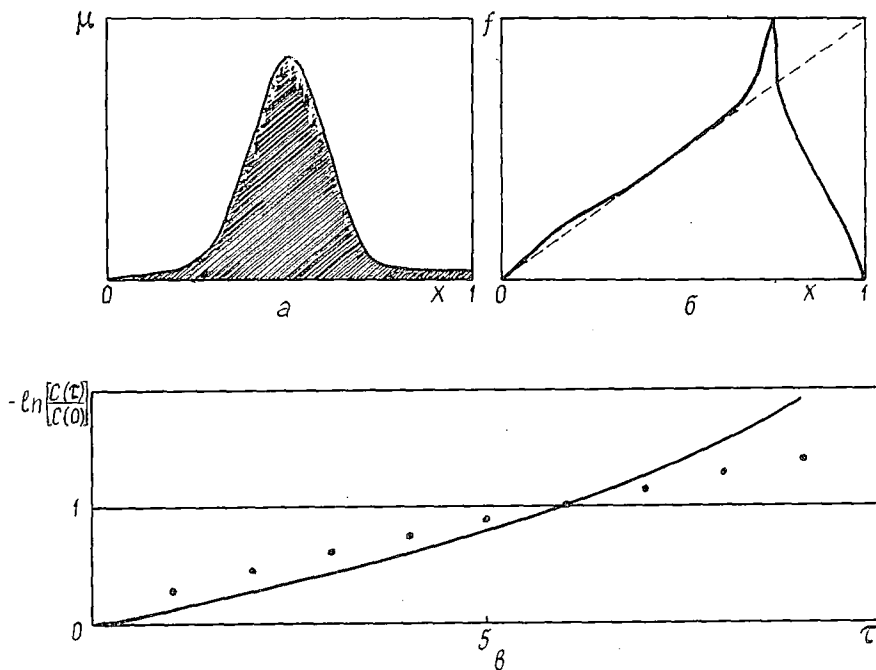


Рис.6. Результаты моделирования для  $\mu(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}]$  при  $\sigma = 0.1, X_c=0.75$ :

а - плотность распределения с гистограммой после 20 000 итераций, б - соответствующее отображение, в - зависимость функции корреляции от времени (масштаб по вертикали - логарифмический); сплошная линия - результат расчета по формуле (12), точки - результаты вычисления с помощью итераций



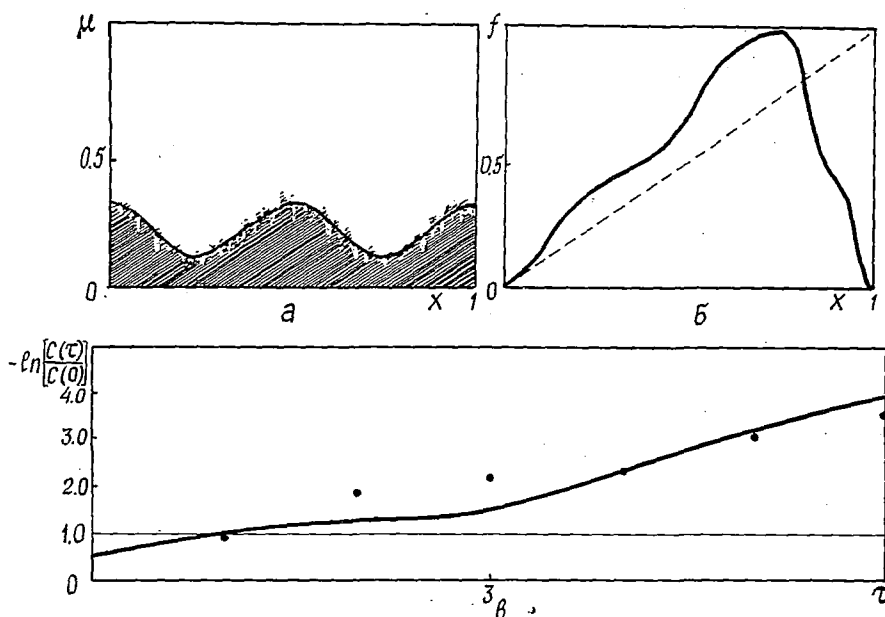


Рис.7. Зависимости, аналогичные приведенным на рис.6, полученные для  $\mu_2(x) = A(1 + \frac{1}{2} \cos(4\pi x))$

Для примера на рис.6 и 7 приведены результаты моделирования с плотностью распределения

$$\mu_1(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp[-\frac{(x-1/2)^2}{2\sigma^2}] \text{ и } \mu_2(x) = A(1 + \frac{1}{2} \cos(4\pi x))$$

соответственно при  $\sigma = 0.1, X = 0.75$ .

Автор благодарен В.В. Рождественскому за стимулирующие дискуссии и ряд ценных замечаний.

#### Библиографический список

1. Ершов С.В., Малинецкий Г.Г.//ЖВМ и МФ. 1988. Т.28. N 10. С.1491.
2. Grossman S., Tomae S.//Z. Naturforsch. 1977. Vol. 32a. P.1353.

Московский физико-технический институт  
Долгопрудный

### THE CONSTRUCTION OF ONE-DIMENSIONAL MAPS WITH GIVEN STOCHASTIC PROPERTIES

S.V. Sochnev

The way of the construction of one-dimensional maps with a given distribution function (invariant measure) and a given correlation function (correlation time) is presented in this work. The above procedure may be useful in such applications where one must model quasi-random processes with given properties or compare a complex chaotic system with a more simple one coinciding in some parameters.