

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ХАОТИЧЕСКОГО АТТРАКТОРА ПРИ ДВИЖЕНИИ ЯДЕРНЫХ СПИНОВ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

В. В. Зверев

Аналитически и численно показано, что при движении ядерных спинов в ферромагнетике возникает хаотический аттрактор, имеющий структуру канторовского множества. Для изучения случая сильного перемешивания развит статистический подход.

Введение

В последние годы получены замечательные результаты, касающиеся типичных "сценариев" поведения нелинейных динамических систем. В частности, показана возможность стохастизации движения и формирования (при наличии диссипации) хаотического ("странного") аттрактора, т.е. притягивающего множества сложной структуры в фазовом пространстве [1].

В данной работе исследован (теоретически и численно) процесс динамической стохастизации для простой трехмерной модели динамики ядерной намагниченности в магнитоупорядоченном кристалле при наличии диссипации (блоховской релаксации) и динамического сдвига частоты; предполагается, что последний обусловлен взаимодействием ядерных спинов с электронной подсистемой ферромагнетика [2] (возникновение стохастизации в аналогичной бездиссипативной модели рассматривалось в работах [3]; одномерная модель с диссипацией исследовалась в [4]).

1. Физические предположения и модельные уравнения

Рассмотрим однородную динамику ядерной намагниченности (считая последнюю классической величиной) с учетом нелинейного самовоздействия ядер, обусловленного сверхтонким взаимодействием с электронной подсистемой ферромагнетика. Запишем динамическую часть уравнения движения обычным образом (см., например, [2]), добавляя релаксационные члены блоховского типа:

$$d\vec{M}/dt = \gamma_n [\vec{M} \times \vec{H}_{\text{эфф}}] - \vec{M}_1/T_2 - (\vec{M}_1 - \vec{e}_z M_0)/T_1, \quad (1)$$

где $\vec{H}_{\text{эфф}} = -\delta W/\delta \vec{M} = A\vec{M}_{\text{эл}}$, $\vec{M}_{\text{эл}} = \vec{e}_z M_{\text{эл}}^0 + \chi(\vec{h}_\perp + A\vec{M}_1)$;

A - константа сверхтонкого взаимодействия, $M_{\text{эл}}^0$ - равновесная электронная намагниченность, χ - линейная восприимчивость электронной подсистемы, \vec{h}_\perp - внешнее (поперечное) переменное магнитное поле, $T_{1,2}$ - времена релаксации.

Мы полагаем, что ядерная спин-система находится под действием периодической последовательности РЧ-импульсов, где каждый импульс имеет прямоугольную огибающую и синусоидальное заполнение на частоте, близкой к резонансной. Также считается, что импульсы являются достаточно короткими и интенсивными, поэтому:

а) угол отклонения ядерной намагниченности от продольной оси (во вращающейся системе координат) в общем случае не мал;

б) за время $T_{\text{им}}$ воздействия одиночного импульса РЧ-поля процессы, обусловленные наличием нелинейных и релаксационных членов, порождают малое дополнительное изменение намагниченности и могут не учитываться; таким образом, во время действия импульса движение намагниченности можно описывать уравнением

$$d\vec{M}/dt = \gamma_n [\vec{M} \times (\vec{e}_z A M^0_{\text{за}} + A \chi \vec{h}_1)].$$

Интегрируя уравнение движения при этих предположениях, можно получить эволюционное отображение, имеющее вид

$$\vec{M}_{N+1} = \vec{e}_z M_{00} + R U_z (\alpha + \beta (\vec{e}_z U_{\text{им}} \vec{M}_N)) U_{\text{им}} \vec{M}_N = \vec{F}(\vec{M}_N). \quad (2)$$

Здесь

$$\vec{M}_N = \vec{M}(t_0 + (T_{\text{св}} + T_{\text{им}})N), \quad M_{00} = M_0(1 - \exp(-T_{\text{св}}/T_1));$$

$$R = \text{diag}(\alpha, \alpha, \gamma), \quad \alpha = \exp(-T_{\text{св}}/T_2), \quad \gamma = \exp(-T_{\text{св}}/T_1);$$

$$\alpha = -\Delta\omega T_{\text{св}} + A^2 \chi (M_0 T_{\text{св}} - T_1 M_{00}), \quad \beta = A^2 \chi T_1 (1 - \gamma);$$

$U_z(\cdot)$ - матрица поворота вокруг оси \vec{e}_z на угол, указанный в аргументе; $U_{\text{им}} = U(-\omega_{\text{эфф}} T_{\text{им}}, \vec{n}_0)$ - матрица поворота вокруг оси \vec{n}_0 на угол $-\omega_{\text{эфф}} T_{\text{им}}$, где $\vec{n}_0 = (\vec{e}_x + \vec{e}_z \Delta\omega) / \omega_{\text{эфф}}$, $\omega_{\text{эфф}} = [(\Delta\omega)^2 + \omega_1^2]^{1/2}$.

Путем итерирования отображения (2) можно последовательно находить положения конца вектора ядерной намагниченности, соответствующие моментам времени $t_0 + (T_{\text{св}} + T_{\text{им}})N$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Такой анализ достаточен для обнаружения хаотического (непериодического) движения.

2. Преобразование фазовой капли

Из общей теории [1] известно, что эволюционное отображение порождает хаотическое движение (при котором траектория стремится к хаотическому аттрактору), если оно определенным образом деформирует "фазовую каплю" - уменьшая объем (производя сжатие) на каждом шаге преобразования, в то же время производит растяжение по некоторым направлениям. На рис.1 показано, каким образом отображение (2) трансформирует "каплю" в пространстве намагниченностей. Сжатие "капли" обусловлено релаксацией (якобиан преобразования - $|\det(\partial M_{N+1} / \partial M_N)| = \gamma \alpha^2 < 1$), а растяжение возникает вследствие "перекручивания", связанного с наличием нелинейных членов. Таким образом, отображение (2) порождает один из вариантов "преобразования пекаря".

3. Изображения хаотических аттракторов (численные результаты)

На рис.2 изображена бифуркационная диаграмма, полученная путем итерирования отображения (2) (для каждого значения параметра βM_{00} вдоль вертикали отложены 500 значений M_x / M_{00} , соответствующих движению после

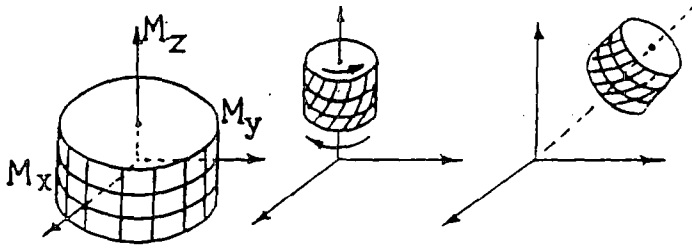


Рис.1

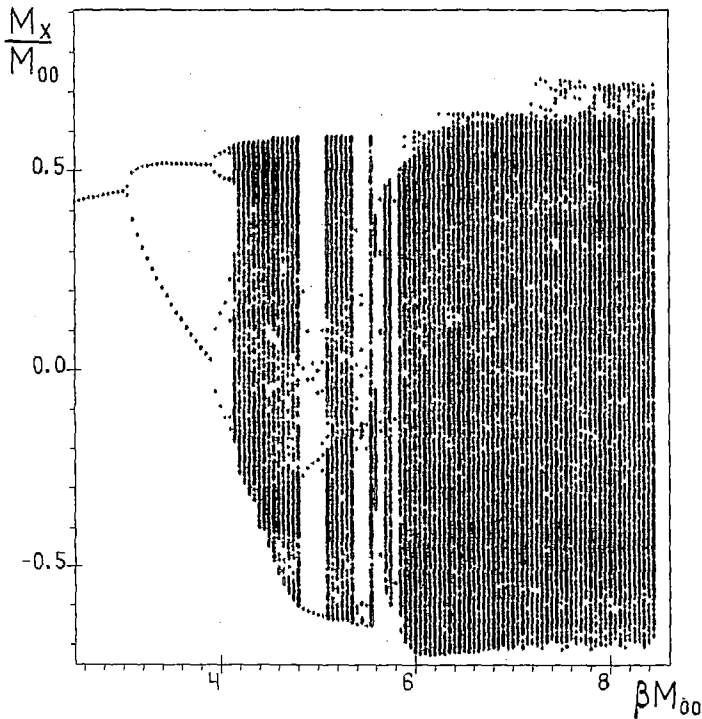
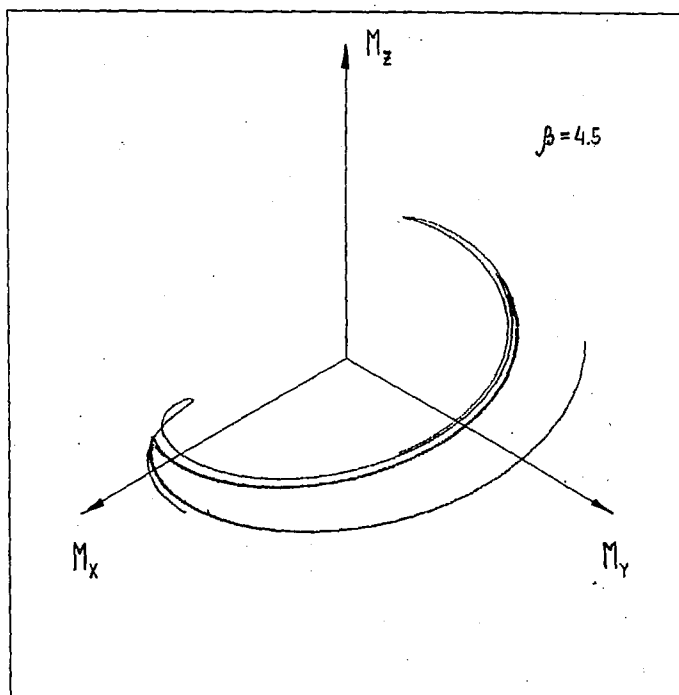
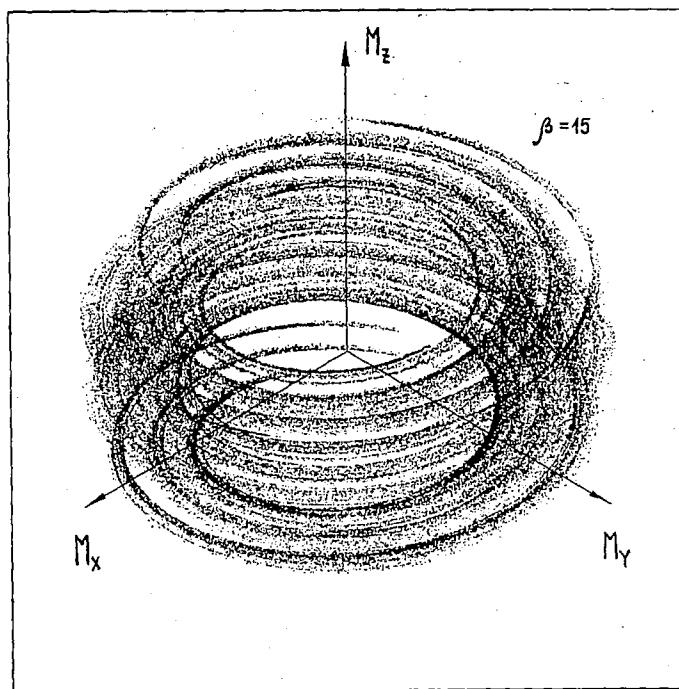


Рис.2

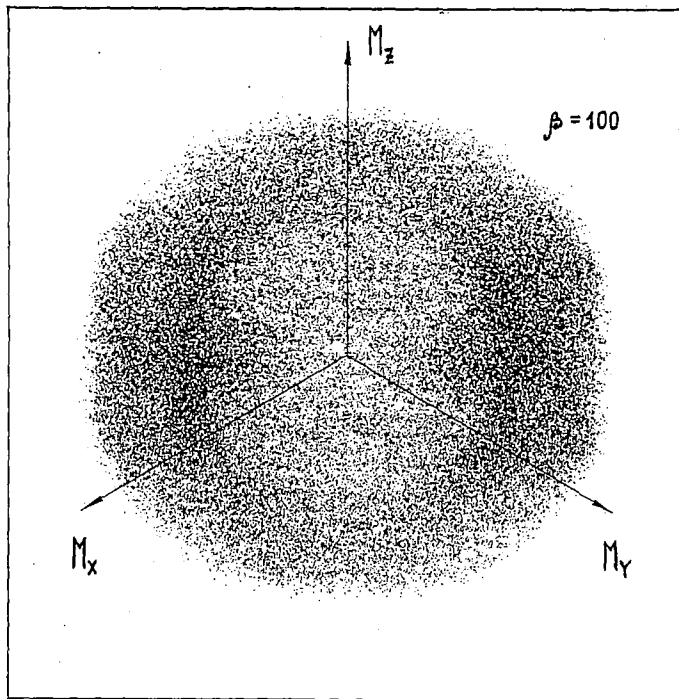
завершения переходного процесса). Очевидно, что реализуется стандартный "сценарий" перехода к хаосу через бесконечную последовательность удвоений периода ("сценарий" Фейгенбаума). Видны "окна периодичности", разрывающие хаотическую область. На рис.3 приводятся трехмерные изображения хаотических аттракторов при различных β и $M_{00}=1$. Заметим, что при малых β аттрактор имеет квазилинейную структуру (т.е. выглядит как "жирная линия"), а при больших β множество точек, формирующее изображение, выглядит как порожденное некоторым случайным процессом. Изображения при промежуточных значениях β позволяют предположить, что аттрактор является фракталом канторовского типа и обладает самоподобной структурой.



a



b



б

Рис.3

4. Аналитическое описание фрактальной структуры аттрактора

Рассмотрим метод, позволяющий описать фрактальную (самоподобную) структуру аттрактора аналитически в некотором предельном случае. Обсуждаемый метод основан на построении инвариантного множества отображения (2) в виде разложения по параметру; его различные модификации рассматривались в работах [5]. Кратко изложим идею и суть метода.

1. Основываясь на численных результатах, можно заметить, что при малых α изучаемое трехмерное отображение (2) в некотором смысле "близко" к одномерному, получающемуся из исходного в результате отбрасывания некоторых "малых" членов; последние удобно выделить, вводя формальный "параметр малости" ε . В нашем случае

$$M_{N+1}^x = \alpha (M_N^x \cos \psi + M_N^z \sin \psi) = \alpha M_{00} \sin \psi + \varepsilon \alpha (M_N^x \cos \psi + \Delta M_N^z \cos \psi), \quad (3a)$$

$$M_{N+1}^y = \alpha (-M_N^x \sin \psi + M_N^z \cos \psi) = \alpha M_{00} \cos \psi + \varepsilon \alpha (-M_N^x \sin \psi + \Delta M_N^z \sin \psi), \quad (3б)$$

$$M_{N+1}^z = M_{00} - \gamma M_N^y, \quad (3в)$$

где $\psi = \beta M_N^y - \alpha$, $\Delta M_N^z = M_N^z - M_{00}$ (для простоты взят случай точного резонанса $\Delta \omega = 0$); $\varepsilon = 1$ соответствует точному отображению, $\varepsilon = 0$ - приближенному. Если инвариантное множество точного отображения есть фрактал, имеющий вид "жирной линии" (т.е. линии с тонкой канторовской структурой), то приближенное отображение имеет инвариантом обычную линию, аппроксимирующую вышеупомянутый фрактал. С целью получения более компактной записи перепишем уравнение (3а)-(3в) в следующем виде:

$$M_{N+1}^a = \mathcal{Z}^a(M_N^x, M_N^y, M_N^z) = \mathcal{Z}_0^a + \varepsilon \mathcal{Z}_1^a, \quad a = \{x, y\}, \quad M_{N+1}^z = \mathcal{Z}^z(M_N^y). \quad (3')$$

2. Базируясь на сказанном в п.1, можно искать точные уравнения фрактала в виде, формально совпадающем с системой параметрических уравнений обычной линии (при условии, что функции в правых частях этих уравнений строятся в виде разложений по степеням ε). Некоторое упрощение возникает, если связать параметр p с одной из координат: полагаем $M^z = M_{00} + p$ и

$$M^x = \wp(p) = \wp_0(p) + \varepsilon \wp_1(p) + \dots, \quad (4a)$$

$$M^y = \Theta(p) = \Theta_0(p) + \varepsilon \Theta_1(p) + \dots \quad (4b)$$

3. Записывая параметрические уравнения (4a) с неизвестными функциями \wp, Θ и налагая условие инвариантности (т.е. требование, чтобы элемент точечного множества вновь принадлежал этому множеству после однократного действия отображения), получим систему функциональных уравнений:

$$\wp(\mathcal{Z}^z(\Theta(p)) - M_{00}) = \mathcal{Z}^x(\wp(p), \Theta(p), M_{00} + p), \quad (5a)$$

$$\Theta(\mathcal{Z}^z(\Theta(p)) - M_{00}) = \mathcal{Z}^y(\wp(p), \Theta(p), M_{00} + p). \quad (5b)$$

Ее можно решать, производя разложение по ε и приравнявая члены с одинаковыми степенями. В результате получается бесконечная система рекуррентных соотношений для последовательного отыскания $\wp_i(p), \Theta_i(p), i=0,1,2,\dots$ Существенно, что эти функции - многозначные; это и отражает тот факт, что уравнения (5a,б) описывают не обычную кривую, а канторовский фрактал с самоподобной структурой.

Приведем результаты для нулевого и первого приближения:

нулевое приближение -

$$M^x = \wp_0(p) = -\alpha \sin(\alpha + \beta p / \gamma), \quad (6a)$$

$$M^y = \Theta_0(p) = \alpha \cos(\alpha + \beta p / \gamma), \quad (6b)$$

$$M^z = M_{00} + p; \quad (6b)$$

первое приближение -

$$M^x = \wp_0(\mathcal{Z}^z(\Theta_0(p)) - M_{00}) + \mathcal{Z}_1^x(\wp_0(p), \Theta_0(p), p + M_{00}), \quad (7a)$$

$$M^y = \wp_0(\mathcal{Z}^z(\Theta_0(p)) - M_{00}) + \mathcal{Z}_1^y(\wp_0(p), \Theta_0(p), p + M_{00}), \quad (7b)$$

$$M^z = \mathcal{Z}^z(\Theta_0(p)). \quad (7b)$$

На рис.4 сравниваются результаты, полученные прямым итерированием отображения (2) (точки) и вышеизложенным методом (сплошные линии). Изображение хаотического аттрактора получено численно для $\alpha=0.05$. Аттрактор грубо аппроксимируется выражениями (6) (нулевое приближение, на рис.4 - линия из крестиков). Структура первого порядка, описываемая формулами (7), изображена сплошными линиями. Отклонения точек (получены итерированием) от этих линий обусловлены наличием структуры высших порядков.

5. Приближенная статистическая теория хаотического движения (случай сильного перемешивания)

В том случае, если параметр β , входящий в отображение (2), достаточно велик (оценки для реальных веществ дают $\beta=50-5 \cdot 10^5$), к хорошим результатам приводит другой приближенный подход, состоящий в замене угловой переменной в U_z случайным углом, имеющим равномерное распределение на $[0, 2\pi]$: $\alpha + \beta(\tilde{\varepsilon}_z U_{\text{инт}} \tilde{M}_N) \rightarrow \tilde{\Phi}$. Таким образом, нелинейное детерминистическое распределение заменяется случайным линейным. Приведем ряд строгих результатов, позволяющих обосновать этот подход.

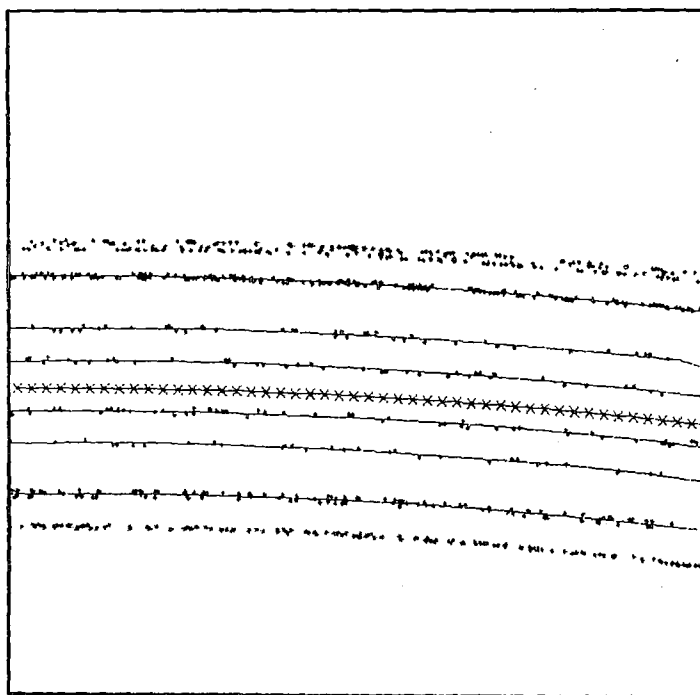


Рис.4

Асимптотическое разложение и приближение случайных фаз. Здесь вместо уравнения движения для амплитуды намагниченности удобно рассматривать уравнение для функции распределения, описывающее эволюцию этой функции в дискретной шкале времени (уравнение типа Колмогорова - Чепмена [6]):

$$P_{N+1}(\vec{x}) = \iint P_{\text{фл}}(\vec{x} - \vec{z}) W(\vec{y}, \vec{z}) P_N(\vec{z}) d\vec{y} d\vec{z}, \quad (8)$$

где ядро $W(\vec{y}, \vec{z}) = \delta(\vec{y} - \vec{F}(\vec{z}))$ ответственно за функциональное преобразование, отражающее один шаг нелинейной эволюции, определяемой уравнением (2); свертка с $P_{\text{фл}}$ позволяет учесть (в простом модельном приближении) влияние равновесных тепловых флуктуаций ядерной намагниченности (избегая строгого учета флуктуаций, мы один раз за цикл добавляем к намагниченности малую случайную величину; добавки, соответствующие различным моментам времени, считаются статистически независимыми).

От уравнения (8) удобно перейти к уравнению для характеристических функций:

$$\psi_{N+1}(\vec{u}) = \Lambda(\vec{u}) \int M(\vec{u}, \vec{v}) \psi_N(\vec{u}) d\vec{v}. \quad (9)$$

Здесь $\psi_N(\vec{u}) = (2\pi)^{-3} \int P_N(\vec{x}) \exp(-i\vec{u}\vec{x}) d\vec{x}$ и (если считать, что статистика флуктуаций описывается нормальным законом)

$$\Lambda(\vec{u}) = \int P_{\text{фл}}(\vec{x}) \exp(-i\vec{u}\vec{x}) d\vec{x} = \exp(-1/2\vec{u}^2 \sigma^2), \quad (10)$$

а также

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\vec{v}\vec{z} - i\vec{u}\vec{F}(\vec{z})) d\vec{z}. \quad (11)$$

Для простоты ограничимся рассмотрением случая точного резонанса и возбуждения последовательностью 90-градусных РЧ-импульсов (все доказательства переносятся на общий случай). Проводя интегрирование, получим:

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = [2\pi(v_1^2 + v_3^2)^{-1/2}]^{-1} \exp(-iu_3) \delta((v_1^2 + v_3^2)^{1/2} - \alpha(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}) \times \times \sum_{-\infty}^{\infty} \exp[i\theta(\alpha + \arg(u_1 + iu_2) - \arg(v_1 + iv_3))] \delta(v_2 + \gamma u_3 + \theta\beta). \quad (12)$$

Далее покажем, что при наличии флуктуаций и при $\beta \gg 1$ особую роль играет слагаемое с $\theta=0$, выделим его:

$$M(\vec{u}, \vec{v}) = \tilde{M}(\vec{u}, \vec{v}) + \Delta M(\vec{u}, \vec{v}), \quad (13)$$

где

$$\tilde{M}(\vec{u}, \vec{v}) = [2\pi(v_1^2 + v_3^2)^{-1/2}] \exp(iu_3) \delta(v_2 + \gamma u_3) \delta((v_1^2 + v_3^2)^{1/2} - \alpha(u_1^2 + u_2^2)^{1/2}). \quad (14)$$

Полагая $\psi_N(\vec{v}) = \Lambda(\vec{v}) \psi_N^{(0)}(\vec{v})$, удобно ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \psi_{N+1}^{(1)}(\vec{u}) &= \Lambda(\vec{u}) \int \tilde{M}(\vec{u}, \vec{v}) \Lambda(\vec{v}) \psi_N^{(0)}(\vec{v}) d\vec{v}, \\ \psi_{N+1}^{(2)}(\vec{u}) &= \Lambda(\vec{u}) \int \Delta M(\vec{u}, \vec{v}) \Lambda(\vec{v}) \psi_N^{(0)}(\vec{v}) d\vec{v}, \end{aligned}$$

тогда $\psi_{N+1} = \psi_{N+1}^{(1)} + \psi_{N+1}^{(2)}$. Заметим, что функции $\psi_N(\cdot)$, являющиеся фурье-образами функций распределения, обладают свойствами абсолютной интегрируемости. Таким образом, мы ищем решение в классе функций, образующих нормированное пространство Римана - Лебега $RL_1[-\infty, \infty]$:

$$\|f\|_1 = \int |f(\vec{u})| d\vec{u}.$$

В результате громоздких преобразований могут быть найдены следующие оценки по норме:

$$\|\psi_{N+1}^{(1)}\|_1 < (2\pi)^{-1/2} (\sigma^2(1+\alpha^2))^{-3/2} < \infty, \quad (15)$$

$$\|\psi_{N+1}^{(2)}\|_1 < 8\sqrt{2}\pi^{5/2}\sigma^{-3}(1+\alpha^2)^{-3/2} [\exp(1/2\sigma^2\beta^2/(1+\gamma^2)) - 1]^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } \beta \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Имеем: $\|\psi_{N+1}\|_1 < \|\psi_{N+1}^{(1)}\|_1 + \|\psi_{N+1}^{(2)}\|_1 < \infty$, если $\|\psi_N\|_1 < \infty$; таким образом, в результате итерирования получается функция, принадлежащая тому же нормированному пространству. Кроме того, поскольку $\psi_{N+1}^{(1)}$ не зависит от β , а $\|\psi_{N+1}^{(2)}\|_1$ путем выбора достаточно большого β (даже при малой интенсивности флуктуаций!) может быть сделано сколь угодно малым, мы вправе использовать приближенную замену $M \rightarrow \tilde{M}$. Можно показать, что это эквивалентно замене

$$W(\vec{y}, \vec{z}) \rightarrow \tilde{W}(\vec{y}, \vec{z}) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \delta(\vec{y} - \vec{F}_*(\vec{z}, \varphi)) d\varphi, \quad (17)$$

где $\vec{F}_*(\vec{z}, \varphi) = \vec{e}_z + RU_z(\varphi)U_{\text{ин}}\vec{z}$. Это, в свою очередь, соответствует замене нелинейного отображения (2) на линейное случайное отображение (приближение случайных фаз).

Существование и устойчивость стационарного распределения. Интересен вопрос о возможности установления стационарного вероятностного распределения при $t \rightarrow \infty$ (при $N \rightarrow \infty$) за счет хаотического движения, возмущенного шумом. Рассмотрим этот вопрос в рамках приближения случайных фаз.

Мы должны выяснить:

а) имеет ли решение уравнение

$$\psi_{cr}(\vec{u}) = \Lambda(\vec{u}) \int M(\vec{u}, \vec{v}) \psi_{cr}(\vec{v}) d\vec{v} ? \quad (18)$$

б) Если да - обладает ли решение устойчивостью? Иначе говоря, если $\psi_N = \psi_{cr} + \Delta\psi_N$ и взято произвольное начальное "малое" отклонение $\Delta\psi_0$, получим ли мы $\Delta\psi_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$?

Покажем, что ответы на оба вопроса - положительные.

Учитывая вид уравнения (12), можно заметить, что решения уравнения (18) (если они существуют) зависят только от двух переменных: $P = [u_1^2 + u_2^2]^{1/2}$ и $\Omega = u_3$; удобно объединить их в вектор $\vec{H} = (P, \Omega)$. Обозначая

$$\mathfrak{R}_N((u_1^2 + u_2^2)^{1/2}, u_3) = \psi_N(u_1, u_2, u_3),$$

можно переписать (9) в виде

$$\mathfrak{R}_{N+1}(\vec{H}) = f(\vec{H}) (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathfrak{R}_N(\vec{S}(\vec{H}, \varphi)). \quad (19)$$

Здесь $\vec{S}(\vec{H}, \varphi) = (P(P, \Omega, \varphi), Q(P, \Omega, \varphi))$ - некоторое преобразование плоскости:

$$P(P, \Omega, \varphi) = [\gamma^2 \Omega^2 + \alpha^2 P^2 \sin^2 \varphi]^{1/2}, \quad (20a)$$

$$Q(P, \Omega, \varphi) = -\alpha P \cos \varphi, \quad (20б)$$

и $f(\vec{H}) = \exp(-i\Omega)$. Применяя теорему о среднем, запишем (19) как

$$\mathfrak{R}_{N+1}(\vec{H}) = f(\vec{H}) \mathfrak{R}_N(\vec{S}(\vec{H}, \hat{\varphi})). \quad (19')$$

Условимся обозначить как $\vec{S}^{(N)}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N)$ результат N -кратного итерирования отображения плоскости $\vec{S}(\cdot)$ (на каждом шаге итерирования возникает свое "среднее" значение угла).

Можно записать формальное решение как результат бесконечного числа итераций:

$$\mathfrak{R}_\infty(\vec{H}) = \lim_{N \rightarrow \infty} f(\vec{H}) f(\vec{S}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1)) f(\vec{S}^{(2)}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)) \dots \quad (20')$$

$$\dots f(\vec{S}^{(N-1)}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_{N-1})) \mathfrak{R}_0(\vec{S}^{(N)}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N))$$

(здесь \mathfrak{R}_0 - характеристическая функция начального распределения). Существенно, что отображение (20a, б) при любом $\varphi \in [0, 2\pi]$ переводит исходную точку (P, Ω) в точку (P', Ω') , более близкую к началу координат:

$$(P')^2 + (\Omega')^2 < \max(\alpha, \gamma) (P^2 + \Omega^2), \text{ где } \max(\alpha, \gamma) < 1.$$

Как следствие, при $N \rightarrow \infty$

$$\vec{S}^{(N)}(\vec{H}, \hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_N) \rightarrow 0 \text{ и } \mathfrak{R}_0(\vec{S}^{(N)}) \rightarrow \mathfrak{R}_0(\vec{0}) = 1$$

(последнее равенство есть обычное условие нормировки для характеристической функции). Мы видим, что в пределе больших времен происходит потеря памяти о начальном распределении; сходимость бесконечного произведения в (20') очевидна ($|f|=1$). Таким образом, существует стационарное распределение $\mathfrak{R}_{cr} = \mathfrak{R}_\infty$.

Из линейности преобразования (19') следует, что то же самое уравнение описывает эволюцию приращений. Далее, повторяя все вышесказанное и учитывая, что $\Delta \mathfrak{R}_0(\vec{H}) \rightarrow 0$ при $\vec{H} \rightarrow 0$ (а это следует опять же из условия нормировки), мы легко приходим к выводу об устойчивости стационарного решения.

На рис.5,а для сравнения представлены результаты, полученные численным итерированием и накоплением статистических данных (точки) либо путем численного решения интегрального уравнения для плотности стационарного распределения (сплошные линии); здесь $\rho = [M_x^2 + M_y^2]^{1/2}$, $q = |M_z - M_{00}|$. На рис.5,б изображен также рельеф двумерного распределения в координатах ρ, q .

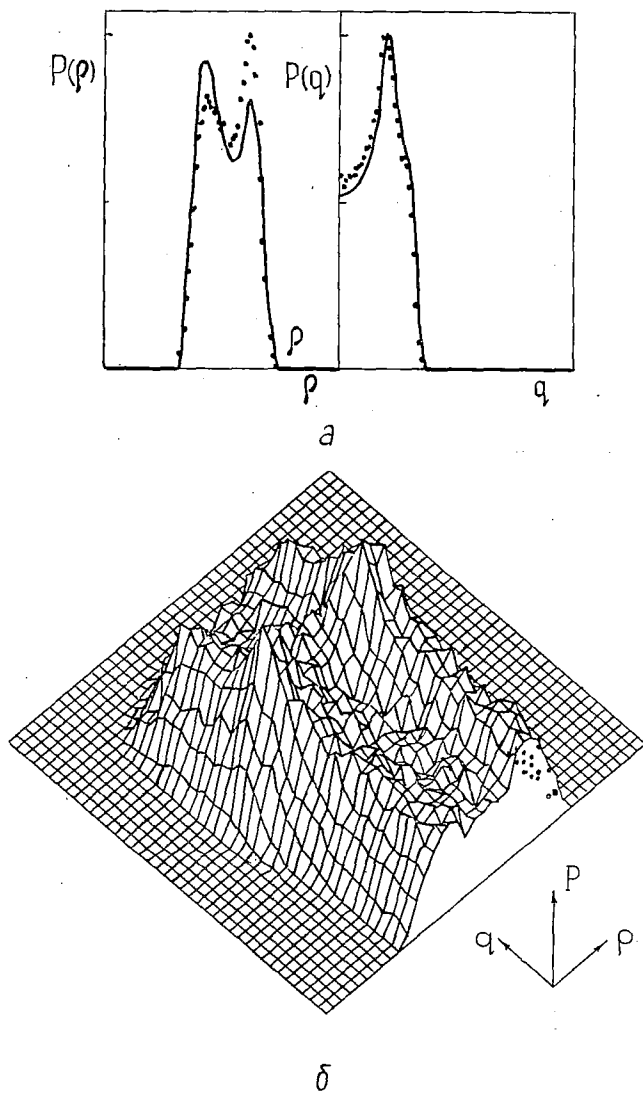


Рис.5

В заключение заметим, что уравнение (18), а также уравнение, получающееся из (8) в результате замены индексов $(N, N+1 \rightarrow \text{ст})$, являются некоторыми обобщенными формами уравнений самоподобия. Известно [7], что более простые уравнения такого типа могут иметь фрактальные решения. Хотя мы не обладаем строгим доказательством существования фрактальных решений уравнения (18), негладкость графиков функций, получающихся при численном решении этого уравнения для некоторых значений параметров, позволяет высказать такое предположение.

Библиографический список

1. Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988.
2. Туров Е.А., Куркин М.И., Николаев В.В. Движение ядерных спинов с учетом их взаимодействия по Сулу и Накамура//ЖЭТФ. 1973. Т.64. С.283.
Боровик-Романов А.С. и др. Спиновое эхо в системах со связанной ядерно-электронной прецессией//УФН. 1984. Т.142. С.537.
3. Буишвили Л.Л., Угулава А.И. Остохастическом движении вектора ядерной намагниченности//ФТТ. 1983. Т.25. С.2370.
Алексеев К.Н., Берман Г.П., Цифринович В.И.//Тр. IV Междунар. рабочей группы по нелинейным и турбулентным процессам в физике. Киев, 1989. Т.2. С.334.
Алексеев К.Н., Берман Г.П., Цифринович В.И. Хаотическая динамика в ЯМР //ЖЭТФ. 1990. Т.97. С.1277.
4. Рухлов В.С. Хаотический режим в нелинейном ЯМР//Письма в ЖЭТФ. 1991. Т.52. С.1060.
Rukhlov V.S.//Phys. Lett. 1991. Vol.160. P.131.
5. Bribges R., Rowlands G.//Phys. Lett. 1977. Vol.63A. P.189.
Yamaguchi Y., Mishima N. Structure of strange attractor and homoclinic bifurcation of two-dimensional cubic map//Phys. Lett. 1984. Vol.104A. P.179.
Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. О мультистабильности, обусловленной перестройками хаоса в кольцевом резонаторе с нелинейным элементом//Опт. и спектр. 1987. Т.62. С.872.
6. Зверев В.В., Рубинштейн Б.Я. Хаотическая автомодуляция излучения в кольцевом резонаторе. Случай сильного перемешивания//Опт. и спектр. 1988. Т.65. С.971.
Zverev V.V., Rubinstein B.Ja.//J.Stat.Phys. 1991. Vol.63. P.221.
7. Фегер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991.

Уральский политехнический институт
Екатеринбург

ON THE ORIGINATION OF THE CHAOTIC ATTRACTOR IN NUCLEAR SPIN MOTION IN FERROMAGNET

V.V. Zverev

It is shown both analytically and numerically that the chaotic attractor arises in the nuclear spin motion in ferromagnet and it has the Cantor set structure. The statistical treatment has been used for the investigation of the intense mixing case.