



## ИЗМЕРЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ РАЗМЕРНОСТИ ИЗ ВРЕМЕННЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ

*А.М. Намаюнас, А.В. Тамашевичюс*

Описано электронное устройство, предназначенное для определения корреляционной размерности странных аттракторов из временной реализации одной переменной. В отличие от компьютерных систем прибор работает в масштабе реального времени. Дано математическое описание процедуры и представлена блок-схема прибора. Проведено измерение корреляционной размерности для генератора хаотических колебаний, представляющего собой LC-автогенератор с дополнительной инерционно-нелинейной цепочкой. Отмечено хорошее согласие со значениями, полученными численными методами из соответствующей системы динамических уравнений. Для сравнения также приведены результаты анализа периодического сигнала и случайного шума.

### Введение

Хаотические колебания наблюдаются в самых различных нелинейных динамических системах [1]. В последнее время все большее внимание уделяется количественному описанию динамического хаоса с помощью таких характеристик, как размерности аттрактора, энтропии, показатели Ляпунова [2]. В частности, эти параметры позволяют отличить детерминированный динамический хаос от случайных шумов. Среди различного рода размерностей аттрактора наибольшую популярность приобрела так называемая корреляционная размерность [3]. Эта количественная мера, как правило, определяется численным методом с помощью компьютера. Для анализа экспериментальных данных дополнительно требуется аналого-цифровой преобразователь соответствующего исследуемым колебаниям быстродействия.

Имеются несколько аналоговых устройств, не требующих использования цифрового компьютерного оборудования. Например, в работе [4] описано оптическое устройство для определения корреляционной размерности из отображений Пуанкаре. Это устройство ограничено двумерными отображениями. Другой недостаток - трудоемкость и неудобство изготовления необходимых для анализа прозрачных фотографических изображений исследуемых сечений Пуанкаре.

Известен также электронный прибор [5], дающий возможность в масштабе реального времени, т.е. непосредственно в эксперименте, оценить минимальную размерность вложения аттрактора. Однако минимальная размерность вложения [1] (или число активных степеней свободы) является величиной целой и не отражает характера и плотности заполнения аттрактором фазового пространства.

В настоящей работе проведено усовершенствование ранее разработанного прибора [5] с целью обеспечения возможности определения дробной размерности аттракторов.

1. В численных алгоритмах для реконструкции фазового пространства из временной реализации одной переменной  $x(t)$  обычно используется метод задержек [6]. С помощью этого метода формируется массив  $n$ -мерных векторов  $\{\bar{x}_i^n\}$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , где

$$\bar{X}_i^n = \{x(iT), x[(i+1)T], \dots, x[(i+n-1)T]\}. \quad (1)$$

Далее рассчитывается корреляционный интеграл [3]:

$$\bar{C}^n(r) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N H(r - |\bar{X}_j^n - \bar{X}_i^n|), \quad (2)$$

где  $H(y)$  - функция Хевисайда. При малых значениях параметра  $r$  интеграл имеет степенную зависимость

$$C^n(r) \sim r^{d(n)}, \quad (3)$$

где  $d(n)$  при больших значениях размерности вложения  $n$  стремится к искомой корреляционной размерности  $\nu$ .

При аналоговой обработке сигнала удобно модифицировать эту процедуру следующим образом. Пусть задается условие

$$x(t) = c, \quad (4)$$

где  $c$  - произвольно выбранный фиксированный уровень, например, среднее значение  $x(t)$ . Условие (4) для переменного сигнала выполняется в определенные моменты времени  $t_i$ . Расстояния между соседними точками  $t_i$  и  $t_{i+1}$ , т.е. интервалы между последующими пересечениями сигналом заданного уровня, обозначим через  $T_i$ . Из этих интервалов формируются  $m$ -мерные векторы:

$$\bar{T}_i^m = \{T_i, T_{i+1}, \dots, T_{i+m-1}\}, \quad i=1, 2, \dots \quad (5)$$

Используя эти векторы, можно рассчитать аналогичный (2) корреляционный интеграл и определить корреляционную размерность  $\bar{\nu}$ . Следует обратить внимание, что вследствие использованного условия (4) размерность  $\bar{\nu}$  на единицу меньше размерности  $\nu$  (аналогично размерностям, получаемым из сечений Пуанкаре).

2. Выше описанную модифицированную процедуру определения размерности  $\bar{\nu}$  можно проводить не только численно, но и с помощью аналогового электронного устройства, блок-схема которого показана на рис.1. Устройство содержит компаратор 1, расширитель импульсов 2, блок ждущих мультивибраторов 3, схему сравнения 4 и счетчик импульсов 5.

В компараторе происходит преобразование непрерывного хаотического сигнала  $x(t)$  (рис.2, диаграмма 1) в хаотическую последовательность коротких  $d$ -импульсов, разделенных интервалами  $T_i, T_{i+1}$  и т.д. (рис.2, диаграмма 2), т.е. формируется  $m$ -мерный вектор  $\bar{T}_i^m$ . В расширителе эти импульсы преобразуются в более длинные  $r$ -импульсы (рис.2, диаграмма 3) с регулируемой длительностью  $r$ . Параметр  $r$  в этом блоке играет роль радиуса гиперсферы в корреляционном интеграле (2). Одновременно блок мультивибраторов 3 выдает последователь-

ность коротких  $d$ -импульсов с независимо регулируемыми интервалами  $T_j, T_{j+1}, \dots, T_{j+m-1}$  (рис.2, диаграмма 4), т.е. формирует  $m$ -мерный опорный вектор  $\bar{T}_j^m$  (в разработанном устройстве максимальное значение  $m$  равно 8; на рис.2 приведена иллюстрация для случая  $m=2$ ). Заметим, что первые  $d$ -импульсы блока мультивибраторов в каждом пакете  $\bar{T}_j^m$  синхронизируются от компаратора 1, а последующие  $d$ -импульсы, задающие интервалы  $T_j$ , устанавливаются независимо. Расширенные  $r$ -импульсы и короткие  $d$ -импульсы с блока мультивибраторов поступают на схему сравнения 4. Если все импульсы в соответствующих пакетах совпадают, схема выдает короткий импульс совпадения (рис.2, диаграмма 5), регистрируемый счетчиком 5. На рис.2 показаны две ситуации на временной реализации, в которых произошло такое совпадение (отмечено знаком "+"), а в третьей ситуации один из  $r$ -импульсов не совпал с соответствующим  $d$ -импульсом из опорного пакета (отмечено знаком "-") и импульс совпадения не появился.

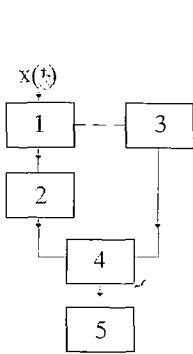


Рис.1

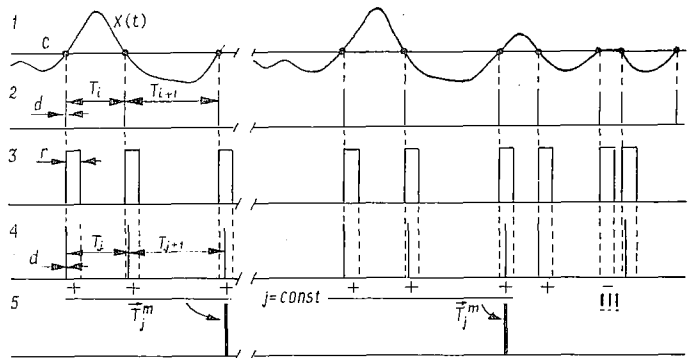


Рис.2

Совпадение происходит в тех случаях, когда

$$T_{i+k-1} < T_{j+k-1} < (T_{i+k-1} + r) \quad (6)$$

для всех  $k = 1, 2, \dots, m$ . Полное число точек, описываемых вектором (5) и попадающих в окрестность опорного вектора  $\bar{T}_j^m$ , дается выражением, аналогичным корреляционному интегралу (2):

$$M^m(r) = \sum_i \prod_k^m \{H[r - (T_{j+k-1} - T_{i+k-1})] H(T_{j+k-1} - T_{i+k-1})\}. \quad (7)$$

Это число приблизительно подчиняется степенному закону

$$M^m(r) \sim r^{-d^*(m)}, \quad (8)$$

где  $d^*(m)$  с увеличением  $m$  сходится к точечной корреляционной размерности  $\bar{\nu}^*$  ("\*" означает, что величина является локальной, поскольку в (7) суммирование производится только по индексам  $i$ , а индекс  $j$  фиксирован).

Эта процедура является локальным анализом аттрактора ( $j = \text{const}, r \ll T_j$ ). Очевидно, что другие области аттрактора могут быть исследованы соответствующим подбором опорного вектора  $\bar{T}_j^m$ . В отличие от компьютерных методов в данном устройстве легко подобрать опорные точки в наиболее "плотных"

областях на аттракторе путем поиска максимальной частоты следования импульсов совпадения. Такие точки, имеют максимальный статистический вес в случае усреднения по  $j$ .

3. Проверка работоспособности устройства производилась с помощью простого радиоэлектронного генератора хаотических колебаний [7]. Генератор представляет обычный LC-автогенератор, к колебательному контуру которого параллельно подключена инерционно-нелинейная цепочка, состоящая из последовательно соединенных полупроводникового диода и катушки индуктивности. В данном эксперименте генератор выдавал хаотический широкополосный сигнал с центральной частотой сплошного спектра вблизи 10 кГц.

Результаты анализа хаотического сигнала показаны на рис.3, 4. Частота следования импульсов совпадения была достаточно высока, например, 3 кГц при  $m = 2$  и  $r = r_0 = 1.2$  мкс, так что счетчик импульсов работал в режиме частотомера. Таким образом, значения  $M$  на рис.3 соответствуют количеству точек, набранных за 1с. По наклонам зависимостей  $M^m(r)$  в двойном логарифмическом масштабе определялась функция  $d^*(m)$  (рис.4, линия 1). Функция быстро насыщается и достигает значения 0.82 ( $\bar{v}^*$ ). Для сравнения на том же рисунке приведены результаты измерения для периодического сигнала (линия 2) и случайного шума (линия 3). Здесь результаты очевидны:  $\bar{v}^* = 0$  в случае регулярного сигнала и  $d^*(m) \sim m$ , т.е. насыщения не наблюдается в случае полностью стохастического сигнала (рис.4, сплошная линия).

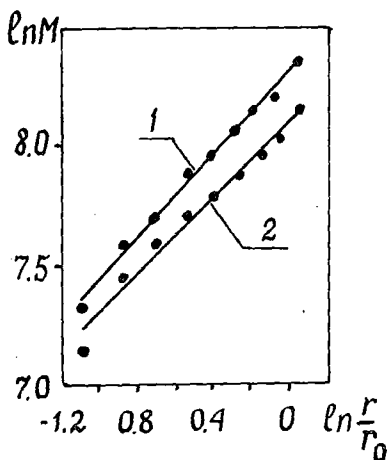


Рис.3

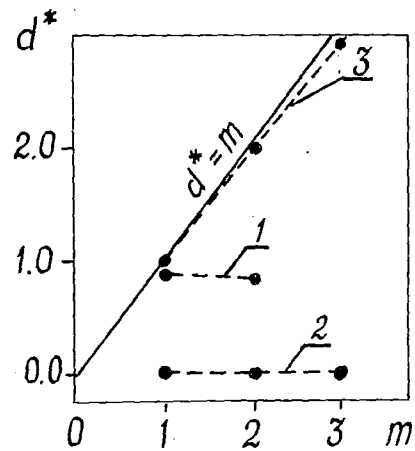


Рис.4

4. Исследованный генератор хаотических колебаний согласно результатам работы [5] имеет три степени свободы, т.е. минимальное число независимых переменных равно трем. Действительно, как показал качественный анализ, основанный на сравнении временных разверток, фазовых портретов, сечений Пуанкаре и частотных спектров, данный генератор хорошо описывается тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые в безразмерном обозначении имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax + y - z, \\ dy/dt &= -x, \\ dz/dt &= b[x - F(z)], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $F(z) = \ln(kz+1)$  при  $z > 0$  и  $F(z) = kz$  при  $z \leq 0$  есть функция, отражающая вольтамперную характеристику диода. Хаотический режим наблюдается, например, при  $a = 0.91$ ,  $b = 10$  и  $k = 500$ . Полученная путем численного интегрирования данной системы уравнений, временная реализация  $x(t)$  анализировалась тремя

способами. Согласно методу [3] по формулам (1) - (3) определена корреляционная размерность  $\nu = 1.92$ . С помощью выше описанного модифицированного метода и формул (4), (5) определена корреляционная размерность  $\tilde{\nu} = 0.92$ , т.е.  $\tilde{\nu} = \nu - 1$ . Наконец, точечная корреляционная размерность  $\tilde{\nu}^*$ , рассчитанная по алгоритму, имитирующему действие аналогового устройства, имела значение 0.95 для опорного вектора  $\vec{T}_j^* = \{1.53; 0.94; 2.70\}$ . Таким образом, все эти величины, а также экспериментальное значение  $\tilde{\nu}^* = 0.82$  достаточно хорошо, если иметь в виду неоднородность аттрактора, согласуются между собой.

Обращает внимание довольно низкое значение корреляционной размерности  $\nu = 1.92$ , т.е.  $\nu < 2$  (соответственно  $\tilde{\nu} < 1$  и  $\tilde{\nu}^* < 1$ ), что может показаться неожиданным в случае трехмерного хаотического потока. Данный вопрос заслуживает отдельного рассмотрения. Отметим лишь, что величины  $\nu < 2$  встречаются и для других систем. Это, по-видимому, связано с особенностями топологии аттракторов (например, для трехмерного аттрактора Ресслера получено значение фрактальной размерности 1.548 [8]).

#### Библиографический список

1. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.
2. Dimensions and entropies in chaotic systems/Ed. G.Mayer-Kress. Berlin: Springer, 1981.
3. Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors//Phys.Rev.Lett. 1983. Vol.50. N 5. P.346.
4. Lee C.-K., Moon F.C. An optical technique for measuring fractal dimensions of planar Poincare maps//Phys. Lett. A. 1986. Vol.114. N 5. P.222.
5. Namajūnas A., Pozela J., Tamaševičius A. An electronic technique for measuring phase space dimension from chaotic time series//Phys. Lett.A. 1988. Vol.131. N 2. P.85.
6. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series//Phys. Rev. Lett. 1980. Vol.45. N 9. P.712.
7. Пикирис Р.А., Пирагас К.А., Тамашевичус А.В. Схемы преобразования LC-автогенератора в генератор шума//Радиотехника, 1986. N 9. С.43.
8. Agarwal A.K., Banerjee K., Bhattacharjee J.K.// Phys. Lett. A. 1986. Vol.119. N.6. P.280.

*Вильнюсский институт физики полупроводников*

## MEASUREMENT OF CORRELATION DIMENSION FROM TIME SERIES

*A.M. Namajūnas, A.V. Tamaševičius*

An electronic technique for determining the correlation dimension of strange attractors from a single observable is described. In contrast to the conventional computer methods the elaborated electronic instrument operates on a real time scale. Mathematical description of the procedure as well as the block diagram of the instrument are presented. The correlation dimension is measured for a chaotic oscillator which is a standard LC-oscillator containing an additional nonlinear inertial chain. There is a good agreement of the experimental result with the numerical calculations carried out for the corresponding dynamical equations. In addition, the periodic oscillations and random noise are analyzed electronically for comparison.