

## СТРУКТУРЫ ЭЛЕКТРОННОГО ТОКА В НЕОДНОРОДНЫХ СИСТЕМАХ

*А.Л. Санин, Ю.Л. Ермолаев, Д.Б. Мизандронцев*

Проведен анализ и численное решение стационарных уравнений гидродинамики и электрического поля. Для электронного тока в неоднородной системе установлены условия образования и изучены свойства резонансных пространственных структур. Если неоднородное распределение ионов случайно (спектр распределения типа белого шума), показано, что структуры обладают достаточно выраженными периодическими свойствами.

### Введение

Образование пространственных структур, чрезвычайное многообразие их форм характерно для многих распределенных систем [1,2]. В частности, оно имеет место при движении электронов в системах с неоднородным распределением нейтрализующего заряда. В таких системах при определенных условиях возможно образование пространственно-периодических резонансных структур. В статье приведены результаты численного моделирования и анализа свойств пространственных структур электронного тока для периодического и случайного распределений нейтрализующего заряда с использованием уравнений гидродинамики и электрического поля. Анализ решений простейших стационарных уравнений, их фурье-спектров позволяет изучить резонансный механизм образования пространственных структур. Более полное рассмотрение, основанное на уравнениях с частными производными по координате и времени, позволяет изучить временные переходные процессы к стационарным режимам и структурам. Резонансы на неоднородностях и формирование пространственных структур возможны и при граничных условиях, зависящих от времени [3]. Если распределение нейтрализующего заряда представляет случайный процесс типа белого шума, то и здесь возможно образование структур с достаточно выраженными периодическими свойствами.

### 1. Основные уравнения и допущения

Рассмотрим стационарное однородное движение электронов в области  $x > 0$ . В плоскости  $x = 0$  расположен эмиттер, поток электронов в плоскости эмиттера характеризуется плотностью  $n_b$  и скоростью направленного движения  $v_b$ . Полагаем, что скорость направленного движения  $v_b$  много больше тепловой  $v_T$ . Электрическое поле в плоскости эмиттера обозначим  $E_b$ . Величина  $E_b$  зависит от

пространственного распределения электронов потока и неподвижных ионов в области  $x > 0$ , а также от полей внешних источников. Если внешние источники отсутствуют, то поле  $E_b$  определяется лишь характером самосогласованного движения электронов в системе. В зависимости от параметров системы поле  $E_b$  может равняться нулю или быть отличным от нуля. Путем подбора параметров системы или включением внешних источников можно управлять полем в достаточно широких пределах и задавать необходимое значение  $E_b$ . В области  $x > 0$  распределен нейтрализующий заряд, с плотностью положительных ионов

$$n_i = n_i^{(0)} + n_i^{(1)}(x),$$

где  $n_i^{(0)}$  - однородная компонента;

$n_i^{(1)}(x)$  - компонента, характеризующая распределение ионов по длине.

Рассмотрим два вида функциональной зависимости от  $x$ :

для гармонической зависимости  $n_i^{(1)}(x) = n_i^{(1)} \cos k_0 x$ , где  $n_i^{(1)}$  - амплитуда,  $2\pi/k_0$  - масштаб неоднородности;

для случайного сигнала  $n_i^{(1)} = n_i^{(2)} f(x)$ , где  $n_i^{(2)}$  - интенсивность,  $f(x)$  - распределение типа белого шума.

Для описания движения электронов используем стационарные уравнения: непрерывности

$$n_e v = n_b v_b, \quad (1)$$

движения

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{e}{m} E - v v - \frac{v^2}{n_e} \frac{dn_e}{dx}, \quad (2)$$

электрического поля

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi e(n_e - n_i). \quad (3)$$

Здесь  $n_e$ ,  $v$  - плотность и скорость электронов в области  $x > 0$ ,  $e$ ,  $m$  - заряд и масса электрона,  $E$  - напряженность электрического поля,  $v$  - частота рассеяния.

Величины  $n_i$ ,  $n_e$ ,  $v$ ,  $E$ , а также  $v$ ,  $v_T$ ,  $x$  пронормируем при помощи  $n_b$ ,  $v_b$ . В результате получим

$$N_i = n_i/n_b, \quad N_e = n_e/n_b, \quad V = v/v_b, \quad \varepsilon = E/E_0,$$

$$V_T = v_T/v_b, \quad E_0 = 4\pi e n_b/k_p, \quad \omega_p = (4\pi e^2 n_b/m)^{1/2},$$

$$\eta = v/\omega_p, \quad k_p = \omega_p/v_b, \quad \zeta = k_p x,$$

а уравнения (1) - (3) для нормированных величин примут вид

$$N_e V = 1, \quad (4)$$

$$V \frac{dV}{d\zeta} = -\varepsilon - \eta V - V_T^2 \frac{1}{N_e} \frac{dN_e}{d\zeta}, \quad (5)$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = -N_e + N_i. \quad (6)$$

Если функция, выражающая распределение ионов, имеет неоднородную компоненту первого вида, то для нормированной плотности ионов получим  $N_i = \gamma(1+h\cos r\zeta)$ , где  $\gamma = n_i^{(0)}/n_b$  - параметр нейтрализации,  $h = n_i^{(1)}/n_i^{(0)}$ ,  $r = k_p/k_p$ .

Для второго вида функциональной зависимости неоднородной компоненты нормированная плотность запишется как  $N_i = \gamma(1+\delta f(\zeta))$ , где  $\delta = n_i^{(2)}/n_i^{(0)}$ .

Ограничимся изучением режимов движения электронов с положительными значениями  $V$ . Полагаем, что  $V_T$  зависит от свойств эмиттера и постоянна при  $\zeta > 0$ .

Если распределение ионов однородное, не зависит от координаты  $\zeta$ , тогда  $N_i = \gamma$ , а неоднородная компонента исчезает  $h = \delta = 0$ , получаем автономную систему уравнений. Кроме того, рассмотрим бесстолкновительный предел, т.е. движение при  $\eta = 0$ . Для этой системы нами было показано, что точка  $\gamma V_T = 1$  является бифуркационной [3]. Она выражает пороговое условие появления пространственно-периодических решений системы уравнений для  $N, V, \mathcal{E}$ . Если  $\gamma V_T < 1$  (в размерном виде  $(n_i^{(0)}/n_b)(\vartheta_T/\vartheta_b) < 1$ ), решения для  $N, V, \mathcal{E}$  имеют периодическую зависимость от координаты  $\zeta$ .

Интегрирование уравнений (4)-(6) при  $h = \delta = \eta = 0$ ,  $V_T = 0$  и заданном граничном поле дает

$$\gamma^{1/2}[\mathcal{E}_b + \gamma(1-\gamma^{-1})^2 - \gamma Z]^{1/2} - \arcsin \frac{\gamma^{1/2} Z}{[\mathcal{E}_b^2 + \gamma(1-\gamma^{-1})^2]^{1/2}} = \gamma^{3/2} \zeta + \mathcal{E}_b \gamma^{1/2} - \arcsin \frac{\gamma^{1/2}(1-\gamma^{-1})}{[\mathcal{E}_b^2 + \gamma(1-\gamma^{-1})^2]^{1/2}}, \quad (7)$$

где  $Z = V\gamma^{-1}$ . Выражение (7) в неявной форме определяет связь между  $V$  и  $\zeta$ . Характерный пространственный период процесса зависит от коэффициента  $\gamma^{3/2}$  перед  $\zeta$ . В размерном виде  $\gamma^{3/2} \zeta = (n_i^{(0)}/n_b)^{3/2} (\omega_p/\vartheta_b)x$ , а период равен  $2\pi / (n_i^{(0)}/n_b)^{3/2} (\omega_p/\vartheta_b)$ .

Анализ и численные решения показывают, что наряду с основной гармоникой пространственной частоты  $\gamma^{3/2}$  возбуждаются высшие составляющие. Если  $\gamma = 1$ , а  $\mathcal{E}_b = 0$ , то возможно однородное состояние. Переменные  $V, N, \mathcal{E}$  не зависят от координаты  $\zeta$ . Если при  $\gamma = 1$   $\mathcal{E}_b \neq 0$ , то возможно образование пространственно-периодической структуры. При  $\gamma \neq 1$  возможны периодические решения, как при  $\gamma < 1$ , так и  $\gamma > 1$ .

Если производные для автономной системы уравнений при указанных ограничениях приравнять к нулю, то получим равновесные значения:

$$V^{(p)} = \gamma^{-1}, \quad N_e^{(p)} = \gamma, \quad \mathcal{E}^{(p)} = 0 \quad (8)$$

Если  $\eta \neq 0$ , то

$$V^{(p)} = \gamma^{-1}, \quad N_e^{(p)} = \gamma, \quad \mathcal{E}^{(p)} = -\eta V^{(p)}, \quad (9)$$

где  $V^{(p)}, N^{(p)}, \mathcal{E}^{(p)}$  - равновесные значения.

## 2. Резонансы на периодических неоднородностях

Решения автономных уравнений характеризуют свойства электронного тока в системе с однородным распределением нейтрализующего заряда. Если распределение положительного заряда неоднородное, то появятся дополнительные механизмы образования структур - резонансные механизмы. Рассмотрим отклик электронного тока, когда плотность нейтрализующего заряда имеет гармоническую добавку  $h$ , но  $\delta = 0$ . Для малых  $h$  рассмотрим задачу в линейном приближении. Полагаем, что переменные величины  $V, N, \mathcal{E}$  можно представить в следующем виде:

$$V = V^{(p)} + V^{(1)}, \quad N = N^{(p)} + N^{(1)}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}^{(p)} + \mathcal{E}^{(1)}, \quad (10)$$

где  $V^{(1)}, N^{(1)}, \mathcal{E}^{(1)}$  являются малыми величинами, зависящими от координаты  $\zeta$ . Подставляя (9), (10) в исходную систему уравнений (4)-(6), линеаризуя ее, получаем уравнение для  $V^{(1)}$ :

$$(1 - \gamma^2 V_T^2) (d^2 V^{(1)} / d\zeta^2) + \eta \gamma dV^{(1)} / d\zeta + \gamma^3 V^{(1)} = -\gamma^2 h \cos r\zeta - \gamma^3 h V^{(1)} \cos r\zeta. \quad (11)$$

Это уравнение гармонического осциллятора с "внешним" воздействием и параметрическим изменением пространственной частоты осциллятора. "Внешнее" воздействие обусловлено свойствами самой системы и определяется амплитудой неоднородности  $h$  (пространственная частота неоднородности  $r$ , период  $2\pi/r$ ). Пространственная частота осциллятора близка к  $\gamma^{3/2}$  при  $\eta \ll 1$ ,  $V_T \ll 1$ . Характер решений исходной системы зависит от соотношения между  $\gamma^{3/2}$  и  $r$ , при этом возможны различные резонансы. Рассмотрим те из них, которые происходят при двух условиях

$$\gamma^{3/2} = r, \quad 2\gamma^{3/2} = r.$$

Для первого условия это обычный резонанс, он обусловлен первым слагаемым правой части уравнения (11). При малых  $h$  результаты численного счета системы (4)-(6) хорошо согласуются с характером решений приближенного уравнения (11), имеют выраженный линейный рост амплитуды от  $\zeta$ . С увеличением  $h$  и расстояния  $\zeta$  проявляются нелинейные свойства. При конечных  $\eta$  образуется пространственно-периодическая структура с постоянной амплитудой. Для режима с параметрами  $\gamma = 1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $V_T = 0$ ,  $h = 0.1$  и  $\mathcal{E}_b = 0$ ,  $\zeta \in [0, 30\pi]$  решения для  $N_e$  в зависимости от величины  $\zeta$  даны на рис.1,а, а фазовый портрет в плоскости  $(V, \mathcal{E})$  - на рис.1,б. Решения уравнений (4)-(6) проведены в широких пределах изменения параметров  $\gamma$ ,  $\eta$ ,  $V_T$ ,  $h$ ,  $\mathcal{E}_b$  и  $r$  [3]. Резонансные свойства образующихся пространственных структур исследованы на основе фурье-спектров решений для скорости. При расстройке  $\Delta = \gamma^{3/2} - r \neq 0$  фурье-спектры для компоненты  $F_V(q)$  состоят из отдельных спектральных линий  $F_V(r)$ ,  $F_V(2r)$ ,  $F_V(3r)$  ..., соответствующих сигналу "внешнего" воздействия, а также из спектральных линий собственной пространственной частоты  $F_V(\gamma^{3/2})$ , гармоник

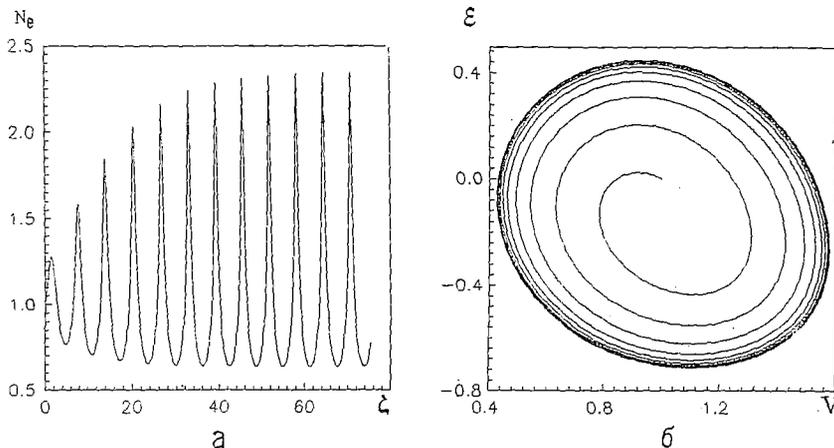


Рис.1

$F_v(2\gamma^{3/2}), \dots$  и фурье-компонент  $F_v(r - \gamma^{3/2}), F_v(r + \gamma^{3/2}) \dots$  на комбинационных пространственных частотах  $r - \gamma^{3/2}, r + \gamma^{3/2} \dots$  соответственно. По мере уменьшения  $\Delta$  увеличивается амплитуда основной гармоники  $F_v(r)$ , а также высших гармоник  $F_v(2r), F_v(3r) \dots$ . Хотя сигнал "внешнего" воздействия гармонический, образующаяся структура является периодической. Благодаря нелинейным свойствам высшие гармоники достаточно сильно возбуждены. В линейном приближении при  $\gamma V_T \ll 1$  коэффициент перед старшей производной мало отличается от единицы. В нелинейном режиме коэффициент перед старшей производной имеет вид  $(V^2 - V_T^2)V$ , в условиях резонанса  $V$  может приближаться к  $V_T$  и становится малым. Если  $V_T = 0$ , минимальные значения  $V$  могут приближаться к нулю, оставаясь положительными. В результате образуется последовательность (через пространственный период) минимумов скорости  $V$  и, соответственно, последовательность максимумов плотности электронов  $N_e$ .

Для второго условия определяющую роль начинает играть второе слагаемое в правой части (11) и наблюдается параметрический резонанс.

Для режима с параметрами  $\gamma = 1, r = 2, \eta = 0, V_T = 0, h = 0.2$  и  $\epsilon_b = -0.05, \zeta \in [0, 30\pi]$  решения для  $N_e, \epsilon$  даны на рис.2,а, а зависимость  $\epsilon(V)$  - на рис.2,б. При малых значениях  $h$  и  $\eta \neq 0$  вблизи спектральной линии  $F_v(1)$  возбуждается широкая полоса пространственных частот  $q$  (например, для режима с параметрами  $\gamma = 1, \eta = 0.1, r = 2, h = 0.2, \eta = 0.1, \epsilon_b = -0.05$ ). Спектральная линия  $F_v(1)$  выражена слабо, а  $F_v(2) > F_v(1)$ . Для режима с параметрами  $\gamma = 1, r = 2, \eta = 0.1, h = 0.2, \epsilon_b = -0.05$  амплитуда спектральной линии  $F_v(1)$  примерно в 50 раз больше, чем в предыдущем примере. При этом соблюдается обратное неравенство:  $F_v(2) < F_v(1)$ .

Другие режимы движения, когда  $\gamma^{3/2}/r \gg 1$  и является целым числом или, наоборот, много меньше единицы и представляет рациональную дробь, исследованы нами в [3].

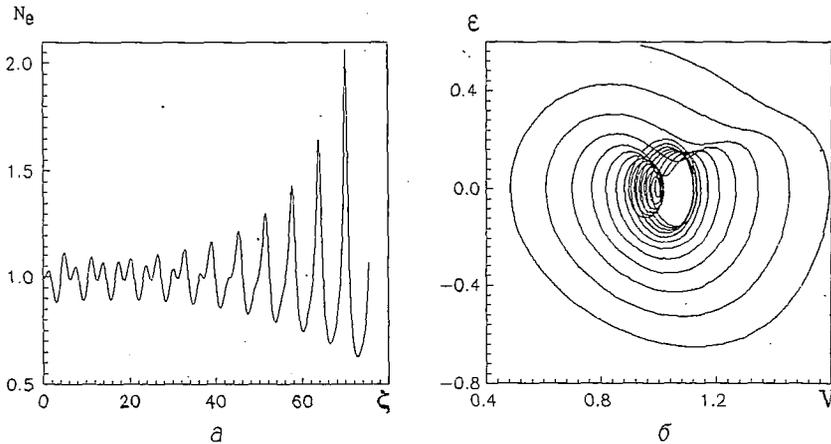


Рис.2

### 3. Моделирование шума и электронного отклика

Функция  $f(\zeta)$  моделируется как ступенчатая функция со случайной амплитудой, представляющей собой  $\delta$ -коррелированный случайный процесс с нулевым средним. Если  $h = 0$ , а  $\delta$  мало, то можно составить дифференциальное уравнение для  $V^{(1)}$  путем замены  $h \cos r \zeta$  на  $\delta f(\zeta)$  в уравнении (11). Теперь правая часть принимает вид:

$$-\gamma^2 \delta f(\zeta) - \gamma^3 \delta V^{(1)}(\zeta) f(\zeta).$$

Первое слагаемое соответствует "внешней" случайной силе, второе - параметрическому случайному изменению пространственной частоты. Для изучения вкладов каждого из слагаемых вначале рассматривалась линеаризованная система уравнений для переменных величин  $V^{(1)}, N^{(1)}, \mathcal{E}^{(1)}$  с одним из слагаемых, а затем - с обоими слагаемыми вместе. Численное решение уравнения для  $V^{(1)}, N^{(1)}, \mathcal{E}^{(1)}$  и отыскание их фурье-спектров позволяет изучить роль каждого из слагаемых. Например, для режима с параметрами  $\gamma = 1, \eta = V_T = 0, \mathcal{E}_b = 0, \delta = 0.1$  свойства решения обусловлены первым слагаемым, т.е. случайной силой. Фурье-спектр для скорости в этом режиме совпадает с фурье-спектром решения при отсутствии параметрического слагаемого. Для изучения вклада параметрического слагаемого необходимо ввести граничное поле  $\mathcal{E}_b = 0$ , причем этот вклад может быть существенным. Например, для режима с параметрами  $\gamma = 2 (\gamma^{3/2} = 2.8), \eta = V_T = 0, \delta = 0.1, \mathcal{E}_b = -0.05, \zeta \in (0, 40\pi)$  при отсутствии параметрического слагаемого величина фурье-компоненты  $F_V(2.8)$  почти в пять раз меньше, чем в случае, когда оба слагаемых присутствуют. Мы полагаем, что совместное действие имеет место, поэтому фурье-компонента увеличивается.

Рассмотрим свойства решений нелинейной системы уравнений (4)-(6) для  $\mathcal{E}_b = 0$ , когда проявляется действие первого слагаемого правой части. Численные расчеты проведены для режима с параметрами  $\gamma = 1, V_T = \eta = 0, \delta = 0.1, \mathcal{E}_b = 0, \zeta \in [0, 160\pi]$ , результаты реализации  $N_e(\zeta)$  и фурье-компоненты  $F_{N_e}(q)$  даны на рис.3. Зависимость  $N_e(\zeta)$  выражает сложный характер сигнала, она имеет крупномасштабную модуляцию (огибающую) и мелкомасштабные колебания с периодом  $2\pi$ . Огибающая состоит из отдельных фрагментов, форма, максимумы и протяженность которых могут быть различными.

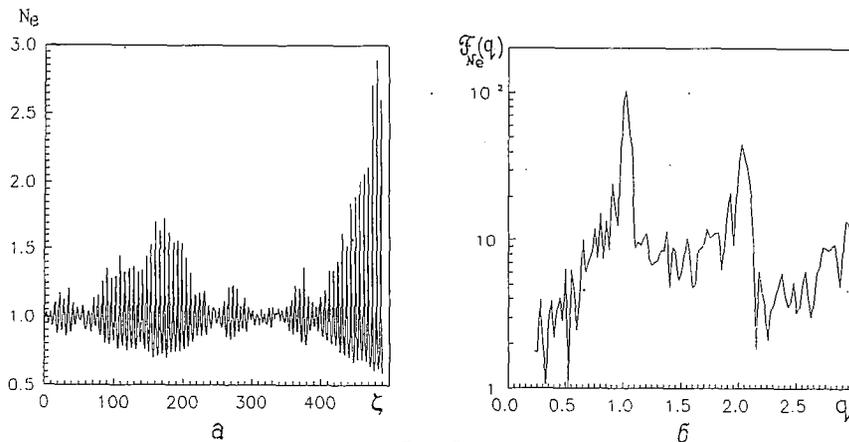


Рис.3

Если спектр возбуждающего сигнала (для  $N_i$ ) широкополосный, спектральная линия  $F_{N_i}(1)$  не выражена и имеет приблизительно такую же амплитуду, как и все другие спектральные линии (рис.4,а), то фурье-спектр отклика отличается от спектра возбуждающего сигнала. Это отличие вызвано резонансом. Как следствие резонанса в спектре отклика (см. рис.3,б) возникают отдельные спектральные линии  $F_{N_e}(1), F_{N_e}(2), \dots$ . Отношение  $F_{N_e}(1)/F_{N_i}(1), F_{N_e}(2)/F_{N_i}(2), \dots$  может быть значительным. Следовательно, структура образуется из однородного состояния, когда шум вводится. Неструктурированный шум, имеющий широкополосный спектр, наводит пространственную структуру с достаточно выраженными периодическими свойствами. Нелинейные эффекты проявляются в существовании высших гармоник  $F_{N_e}(2), F_{N_e}(3), \dots$ . Для анализа процесса образования структуры полный промежуток был разделен на четыре равные интервала:  $[0, 40\pi], [40\pi, 80\pi], [80\pi, 120\pi], [120\pi, 160\pi]$ . Для каждого из них вычислялись,

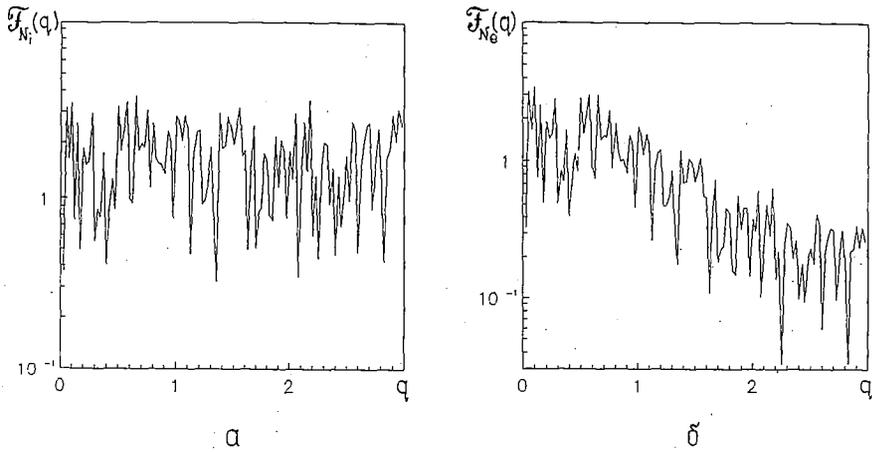


Рис.4

дисперсии скорости  $\sigma_v$  и фурье-компоненты  $F_v(q)$ . Дисперсия скорости  $\sigma_v$  определялась посредством формул

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J (V_j - \langle V \rangle)^2}{J}}, \quad \langle V \rangle = \frac{\sum_{j=1}^J V_j}{J}, \quad V_j = V(\zeta_j);$$

$J = 1024$  для каждого из интервалов и  $J = 4096$  для полного промежутка  $[0, 160\pi]$ . Представим результаты вычислений для режима с параметрами  $\gamma = 1$  ( $\gamma^{3/2} = 1$ ),  $\eta = 0$ ,  $V_T = 0$ ,  $\varepsilon_b = 0$ ,  $\delta = 0.1$ :

$J$	$[0, 40\pi]$	$[40\pi, 80\pi]$	$[80\pi, 120\pi]$	$[120\pi, 160\pi]$
$\sigma_v$	$2.77 \cdot 10^{-2}$	$9.257 \cdot 10^{-2}$	0.16	0.189
$F_v(1)$	8.25	16.61	22.153	24.01
$F_v(2)$	0.94	3.17	5.62	6.6
$F_v(3)$	0.176	0.93	2.01	2.71

С увеличением номера интервала величины  $\sigma_v$  и  $F_v(q)$  возрастают, но происходит замедление роста. Ограничение роста пространственных колебаний и стабилизация имеют место, если вводится диссипация. Для режима с параметрами  $\gamma = 1$ ,  $\eta = 0.1$ ,  $V_T = 0$ ,  $\varepsilon_b = 0$ ,  $\delta = 0.5$ ,  $\zeta \in [0, 160\pi]$  на рис. 5, а дана зависимость  $F_{N_e}(q)$ . В режиме частых столкновений при  $\eta = 1$  и  $\gamma = 1$ ,  $V_T = 0$ ,  $\varepsilon_b = 0$ ,  $\delta = 0.1$

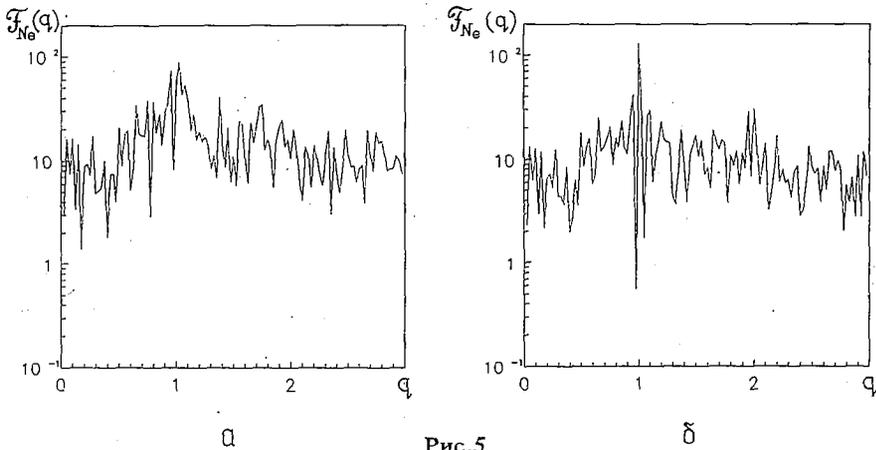


Рис.5

амплитуды пространственных колебаний становятся такими же малыми, как и амплитуды шума исходного сигнала. Фурье-спектр  $F_{N_e}(q)$  (рис.4,б) имеет сходство с фурье-спектром исходного сигнала (см. рис.4,а). Фурье-компоненты  $F_{N_e}(q)$  не выражены и распределены в широкой области. Возбуждение структур случайным сигналом менее эффективно, чем регулярным. Для сигнала возбуждения, имеющего обе составляющие -гармоническую и случайную типа белого шума ( $h < \delta$ ), в режиме с параметрами  $\gamma = 1, \eta = 0.2, \varepsilon_b = 0, h = 0.1, \delta = 0.4, \zeta \in (0, 160\pi)$  зависимость  $F_{N_e}(q)$  приведена на рис.5,б.

Если функция плотности  $N_i$  не имеет однородной компоненты, а только составляющую типа белого шума  $N_i = (n_i^{(2)}/n_b)f(\zeta)$ , то и в этом случае возможно образование структур с достаточно выраженными периодическими свойствами.

Из представленных результатов видно, что электроны тока чувствительны как к регулярным, так и случайным неоднородностям нейтрализующего заряда. Неоднородности вызывают переходы из однородных состояний в структурированные, при этом отклик электронного газа характеризуется чрезвычайным многообразием форм и свойств образующихся структур.

### Библиографический список

1. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах/Под ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Мир, 1979.
2. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
3. Ермолаев Ю.Л., Санин А.Л. Электронная синергетика. Л.: Изд-во ЛГУ, 1989.

*Государственный технический университет  
Санкт-Петербург*

## ELECTRON STREAM STRUCTURES IN INHOMOGENEOUS SYSTEMS

*A.L. Sanin, Yu.L. Ermolaev, D.B. Mizandroutsev*

Numerical modelling and detailed investigations of electron spatial stream structures induced by inhomogeneously distributed positive charge were carried out. For the random distribution charges the resonant mechanism of electron structure formations is discussed.