

Статья профессора Леона О. Чуа открывает в нашем журнале серию публикаций работ зарубежных коллег. То, что эту серию открывает профессор Чуа, в известной степени закономерно. Профессор Чуа неоднократно посещал нашу страну, участвуя в научных конференциях. У себя на родине он был гостеприимным хозяином для многих ученых из России и Украины. Наши специалисты в области нелинейной динамики публикуют свои работы в издаваемом им журнале.

Редакционная коллегия надеется, что статья профессора Чуа – первая ласточка, и его примеру последуют другие зарубежные коллеги.

*Редакционная коллегия*

#### **PREFACE: CHUA'S CIRCUIT: TEN YEARS LATER**

It is with great pleasure and humility that I accept this journal's invitation to comment on the simple chaotic circuit I designed in 1983, as an exercise for Professor Matsumoto from Waseda University to grapple with, having been frustrated in two years of futile attempt to build a chaotic circuit. Thanks to the creativity of many brilliant researchers from Russia and Ukraine, an explosive amount of new knowledge on Chua's Circuit has been reaped over the past two years, as evidenced by the content of two recent Special Issues of the Journal of Circuits, Systems, and Computers (March and June, 1993) entitled «CHUA'S CIRCUIT: A PARADIGM FOR CHAOS» (see also the expanded version in a book edited by Dr. N. Madan and published by World Scientific Publishers in 1993). Their contributions during the past two years have already eclipsed the many years of dedicated but brute-force hardwork led by Matsumoto, who had been groping in the dark, unaware of the many powerful analytical and conceptual tools of nonlinear dynamics that had been developed in the former Soviet Union. While the current state of the art on the nonlinear dynamics of Chua's Circuit is quite advanced and comprehensive, much research remains to be done on the control, synchronization, and harnessing of chaos, as well as on the spatio-temporal structures, patterns, and waves of arrays of Chua's circuits – which can now be built as a monolithic VLSI silicon chip. It is with this vision of future challenge and breakthroughs that I salute the editorial board of this well-conceived journal for their scientific dedication to the advancements of research on nonlinear dynamics. In spite of the difficult economic times, I have no doubt that creative ideas will triumph, and that years from now, scholars will look back and concur that the 1993 launching of this new journal is both timely and visionary.

*Leon O. Chua*

#### **СХЕМА ЧУА. ДЕСЯТЬ ЛЕТ СПУСТЯ**

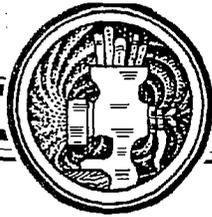
С большим удовольствием и смущением я принял приглашение журнала прокомментировать простую хаотическую схему, придуманную мной в 1983 году в качестве предмета исследования для профессора Т. Матсумото из университета Васеда, после его двухлетних бесплодных попыток создать схему, которая демонстрировала бы хаотическое поведение.

Благодаря творческим усилиям многих известных ученых из России и Украины было собрано огромное количество новых сведений о схеме Чуа. Об этом свидетельствует содержание двух специальных номеров журнала «Цепи, системы и компьютеры» (март, июнь 1993 г.), озаглавленных «Схема Чуа: парадигма хаоса» (расширенную версию можно найти в книге под редакцией доктора Р. Н. Мадан, опубликованной издательством «Мир науки» в 1993 году). Вклад российских и украинских ученых за последние два года был столь значителен, что почти затмил многолетнюю самоотверженную работу профессора Т. Матсумото, который использовал достаточно грубые методы и продвигался в своих поисках как бы наощупь, не подозревая о многих мощных аналитических и концептуальных подходах, развитых в бывшем СССР.

Исследования нелинейной динамики в схеме Чуа носят всеобъемлющий характер и в них достигнут значительный прогресс, тем не менее остается еще большее поле для разработок в области управления, синхронизации и использования хаоса, а также пространственно-временных структур и волн в решетках из схем Чуа, которые теперь могут быть изготовлены в виде одного кристалла СБИС. Именно в связи с новыми сложными проблемами и грядущими прорывами я приветствую редакционную коллегия замечательно задуманного журнала за научную убежденность в перспективности исследований в области нелинейной динамики. Я не сомневаюсь, что, несмотря на трудные для России времена, научное творчество восторжествует, а годы спустя ученые оглянутся назад и согласятся – издание в 1993 году нового журнала было и своевременным, и прозорливым.

*Leon O. Chua*

*Перевод И. Р. Сатаева*



## ГЕНЕЗИС СХЕМЫ ЧУА

*Леон О. Чуа*

Статья представляет собой систематическое изложение последовательности технических этапов, пройденных автором при разработке схемы, генерирующей хаос. Процедура разработки, хотя и ясная по своей природе, не могла быть изобретена без использования некоторых важных свойств нелинейных схем и их физических реализаций.

### 1. Воспоминания: экскурс в историю

Событие, которое привело к открытию схемы Чуа, произошло в лаборатории профессора Т.Матсумото в университете Васеда поздним октябрьским днем 1983 года, на следующий день после моего приезда в Токио по приглашению JSPS (Японское общество содействия науке). Здесь, в хорошо оснащенном и заставленном приборами углу в лаборатории Матсумото, я должен был стать свидетелем живой демонстрации предположительно первой в мире удачной электротехнической реализации уравнений Лоренца, над которой исследовательская группа профессора Матсумото трудилась больше года. Это был действительно замечательный образец электронной схмотехники. Он был тщательно, почти идеально смакетирован, включал более чем дюжину интегральных схем и был украшен приблизительно таким же количеством потенциометров и других подстроечных элементов для тонкой перестройки и точной настройки. Не было бы необходимости придумывать более ясную хаотическую схему, если бы схема Лоренца–Матсумото работала. Но она не работала. Виной тому был не недостаток мастерства экспериментатора у Матсумото, а скорее нехватка интегральных компонентов с хорошими характеристиками и достаточно большим динамическим диапазоном, а именно – интегральных умножителей. К несчастью, именно этот компонент был ключевым при построении автономной электронной хаотической схемы в 1983 году. В то время общепризнанными были только две автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, демонстрирующие хаос. Это были уравнения Лоренца

$$\dot{x} = -\alpha(x - y),$$

$$\dot{y} = \beta x - y - xz,$$

$$\dot{z} = xy - yz,$$

и уравнения Ресслера

$$\dot{x} = -y - z,$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x + \alpha y, \\ \dot{z} &= \beta + z(x - \gamma),\end{aligned}$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – параметры. Заметим, что нелинейность в обеих системах является функцией двух переменных, точнее, произведением этих переменных.

К 1983 году, бросающееся в глаза отсутствие воспроизводимости в работе хаотических схем или систем вело, казалось, к предположению, что хаос является патологическим явлением, которое может существовать лишь в математических абстракциях и в компьютерных экспериментах с придуманными уравнениями. Поэтому радиоэлектронщики вообще и теоретики, занимающиеся нелинейными цепями, в частности, уделяли мало внимания феноменам, которые многими рассматривались как мистическая диковина. Таким было состояние умов в среде теоретиков нелинейной схемотехники в 1983 году. Схема Лоренца – Матсумото должна была изменить это состояние равнодушия, царившее среди теоретиков.

Увиденное в такой исторической перспективе, полное разочарование, постигшее нас в тот октябрьский день, выглядит совершенно понятным. Неудача была настолько велика, что это отвратительное ощущение сохранялось в моем подсознании до самого вечера, когда я уже собирался лечь спать. Внезапно до меня дошло, что, поскольку основным механизмом, приводящим к появлению хаоса и в уравнениях Лоренца и в уравнениях Ресслера, является наличие в них как минимум двух неустойчивых положений равновесия (трех для Лоренца и двух для Ресслера) то разумно придумать более простую и ясную схему, которая обладала бы этими свойствами.

После того как этот альтернативный подход и стратегия были осознаны, систематический перебор всех подобных возможных схем был уже простым упражнением в элементарной теории нелинейных цепей [2]. Из выявленных восьми типов затем были исключены схемы, которые по той или иной причине не могли быть хаотическими. Это простое упражнение быстро привело к двум подходящим вариантам, из которых я, после применения некоторой интуиции, выработанной за два десятилетия ежедневного общения с нелинейными явлениями в электрических цепях, остановился в конце концов на схеме, приведенной на рис. 1. Весь процесс перечисления и исключения занял меньше часа и заключался в серии почти неразборчивых схемных диаграмм, которые я царапал на салфетках и чистых сторонах использованных конвертов. Я был вынужден прибегнуть к подручным материалам, поскольку не мог в столь поздний час найти другой бумаги в общежитии, где поселился днем раньше.

На следующее утро я показал предполагаемую схему Матсумото, указав, что значение  $R$  нужно выбирать

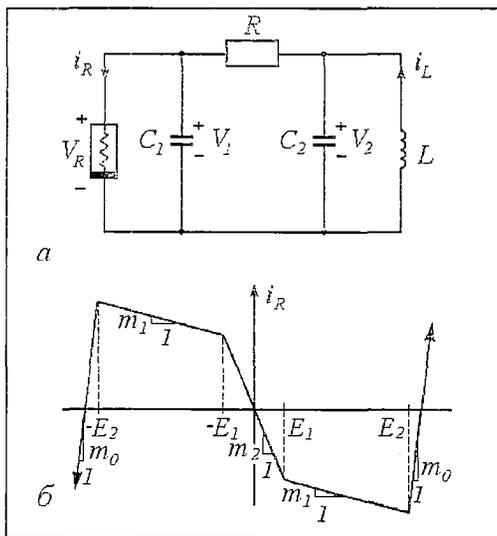


Рис. 1. Схема Чуа (а) и пятиsegmentная вольтамперная характеристика  $v_R - i_R$  (б) для нелинейного резистора  $r$ . При компьютерном моделировании хаос может наблюдаться и при наличии только трех внутренних сегментов с отрицательной крутизной. Эквивалентная схема в приближении малого параметра в точке равновесия, лежащей на любом из этих трех сегментов, представляет собой отрицательное сопротивление

таким образом, чтобы его нагрузочная прямая пересекала внутренние три сегмента, имеющие *отрицательную крутизну* нарис. 1, б.

Матсумото немедленно запрограммировал уравнения цепи на своем компьютере. Вскоре он прибежал ко мне, сильно возбужденный, и ликующе объявил, что обнаружил странный аттрактор. Его чрезвычайное волнение в это мгновение не отличалось от волнения ребенка, впервые прыгнувшего в бассейн, поскольку он никогда не сталкивался ни с кусочно-линейными цепями, ни с нелинейными колебаниями, не говоря уж о странных аттракторах.

В течение нескольких месяцев после этого эпизода Матсумото продолжал вычислительные эксперименты с моей схемой в широком диапазоне параметров, подвергая двойной проверке свои компьютерные данные. Он хотел убедиться, что наблюдаемый им странный аттрактор не является в действительности артефактом, порожденным его достаточно незамысловатой программой, написанной на Бэйсике. Несмотря на мои многочисленные подталкивания, он воздерживался от макетирования моей схемы, поскольку его исследовательская группа никогда ранее не занималась синтезом заданных немонотонных вольтамперных характеристик. Поэтому я написал Зонгу Гуо Кину (Zhong Guo Qin) и Фархаду Айрому (Farhad Ayrom), которые были членами моей Лаборатории Нелинейной Электроники в Беркли, и предложил им применить разработанную нами ранее процедуру синтеза для реализации этой схемы. Их макет работал практически без точной подстройки. Итак, Зонг и Айром стали первыми исследователями, которые документально зафиксировали экспериментально наблюдаемый хаос в системе Чуа [17].

Следующий раздел посвящен технической версии эпизода разработки схемы, упоминаемого в предшествующем повествовании.

## 2. Теория нелинейных цепей, стоящая за схемой Чуа

**2.1 Требования к схеме.** Поскольку наша цель состоит в создании автономной электронной схемы, которая демонстрировала бы естественное, с точки зрения электроники, хаотическое поведение, мы можем сформулировать следующие требования к схеме:

схема должна быть физически реализуема, автономна и иметь только два или три неустойчивых положения равновесия;

схема должна содержать наименьшее возможное число двухполюсных линейных сопротивлений, индуктивностей и емкостей, а также только одно двухполюсное нелинейное сопротивление, которое обладало бы *кусочно-линейной, пассивной при больших значениях переменных (eventually passive), управляемой напряжением вольтамперной характеристикой (ВАХ)*.

Ясно, что нелинейное сопротивление должно быть *активным* для того, чтобы схема стала хаотической. Другими словами, вольтамперная характеристика должна проходить через второй и/или четвертый квадранты. Однако, для того, чтобы быть физически реализуемой, она должна быть *пассивной при больших значениях переменных*, то есть вне некоторого круга произвольно большого, но конечного радиуса, она должна располагаться полностью в первом и третьем квадрантах.

Заметим: мы потребовали, чтобы вольтамперная характеристика была *кусочно-линейной*, по двум стратегическим причинам. Во-первых, мы имели большой опыт по синтезированию кусочно-линейных характеристик (см., например, наши работы по этому вопросу [3] и [4]). Во-вторых, мы имели немалый опыт по анализу динамики кусочно-линейных схем, сводя его к изучению нескольких линейных, точнее, аффинных систем (см. [2, 8, 9]).

Мы также потребовали, чтобы нелинейный резистор был *управляемым по напряжению*, так как такие элементы легче синтезировать, используя в качестве строительных блоков операционные усилители и диоды на *pn*-переходах [5, 10].

**2.2. Процедура разработки.** Как и при разработке любой схемы, которая должна удовлетворять заданному набору требований, при создании схемы Чуа была использована систематическая процедура синтеза, состоящая из нескольких последовательно проходимых шагов.

*Определение минимального числа элементов схемы.* Автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с числом переменных состояния меньше трех не может быть хаотической [13]. Поэтому выберем для нашей схемы три пассивных линейных, накапливающих энергию (energy storage), элемента. Поскольку мы потребовали, чтобы схема включала только одно нелинейное двухполюсное сопротивление, остальные элементы должны быть линейными пассивными сопротивлениями. Нам не нужны другие независимые источники, поскольку нелинейный резистор в активном состоянии уже имеет внутренний источник мощности. Число линейных резисторов может быть минимизировано применением стандартного метода эквивалентных цепей к окончательной схемной топологии, которую мы выведем ниже.

*Определение топологии схемы.* Вычленим три линейных запасующих энергию элемента и двухполюсный нелинейный резистор  $r$ , и соединим их через выводы многополюсника  $N_R$ , составленного из линейных пассивных сопротивлений. В зависимости от выбора энергозапасующих элементов существуют 4 различные конфигурации цепей, как показано на рис. 2. Мы можем сразу исключить  $RC$  (рис. 2, а) и  $RL$  (рис. 2, б) конфигурации, так как двухэлементные цепочки такого типа не способны осциллировать, не говоря уже о том, чтобы становиться хаотическими [6]. Две оставшиеся конфигурации на рис. 2, в, г дуальны друг другу и поэтому являются равноправными кандидатами. Отдадим предпочтение последней схеме на рис. 2, г, поскольку точные перестраиваемые индуктивности высокого качества намного дороже, чем конденсаторы.

В выбранной схеме нелинейный резистор  $r$  управляется напряжением согласно предъявленным требованиям к схеме. В соответствии со стандартной методикой моделирования схем [7], мы получаем схему, в которой один из конденсаторов замкнут через  $r$ , (за исключением негибкого варианта с двумя конденсаторами, образующими контур с  $r$ ). Итак, схема может быть упрощена до конфигурации, изображенной на рис. 3, а, где  $N_R$  состоит исключительно из двухполюсных линейных пассивных сопротивлений.

В стационарном состоянии емкость может быть заменена разрывом цепи, а индуктивность — замкнутой цепью, как показано на рис. 3, б. Поскольку получившийся двухполюсник  $N_0$  содержит только двухполюсные линейные пассивные сопротивления, он может быть заменен эквивалентным сопротивлением Тевенина (Thevenin)  $R_0 > 0$ , как показано на рис. 3, в. Каждое

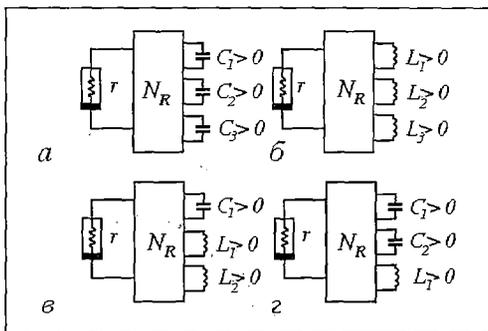


Рис. 2. Четыре различные конфигурации, включающие три реактивных элемента. Элемент  $N_R$  с четырьмя входами состоит из двухполюсных линейных пассивных сопротивлений

пересечение нагрузочной прямой  $v_R = -R_0 i_R$  с вольтамперной характеристикой  $v_R - i_R$  элемента  $r$  (которую еще нужно определить) дает состояние равновесия цепи. Поскольку требуется, чтобы использовалось минимальное количество линейных сопротивлений, сделаем предположение, что  $N_R$  содержит только одно линейное сопротивление  $R > 0$ . При таком упрощающем предположении для конфигурации схемы на рис. 3, а, можно предположить только 8 различных топологий, как показано на рис. 4. Наша следующая задача состоит в выборе наиболее перспективного варианта.

Схемы, соответствующие стационарным состояниям для цепей, изображенных на рис. 4, приведены на рис. 5. Изучение этих конфигураций показывает, что схемы на рис. 5, а и б могут быть исключены из дальнейшего рассмотрения, поскольку эквивалентное линейное сопротивление  $R_0$  в этих случаях замкнуто. Схемы на рис. 5, в и г также могут быть исключены, так как  $R_0$  в этих случаях представляет собой разомкнутую цепь. Из оставшихся четырех схем можно исключить также изображенную на рис. 5, д топологию, поскольку сопротивление  $R$  включено параллельно  $r$  и может быть им «поглощено», давая таким образом разомкнутую цепь вместо  $R_0$ . Аналогичным образом можно исключить схему на рис. 5, е вследствие того, что две параллельные емкости можно заменить эквивалентной емкостью, а это дает в результате схему второго порядка, которая не может быть хаотической. В конце концов у нас осталось только два кандидата, каждый из которых имеет  $R_0 = R > 0$ .

Нет никакой явной причины предпочесть одного кандидата другому. Однако наличие резонансной цепочки  $L_1 C_2$  в правой части схемы, приведенной на рис. 4, з на самом деле является преимуществом, поскольку осцилляторный механизм является часто предвестником хаоса. Поэтому давайте выберем эту схему в качестве наиболее вероятного кандидата для получения хаоса.

*Определение вольтамперной характеристики  $v_R - i_R$ .* Наконец нам осталось найти подходящую нелинейность для  $r$ , чтобы удовлетворить требование, которое гласит, что схема должна иметь только два или три неустойчивых положения равновесия.

Поскольку, за исключением нелинейного сопротивления  $r$ , все элементы схемы являются пассивными, отсюда следует, что для удовлетворения условия неустойчивости каждая точка равновесия должна лежать на участке кусочно-линейной вольтамперной характеристики  $v_R - i_R$  с отрицательной крутизной. Это

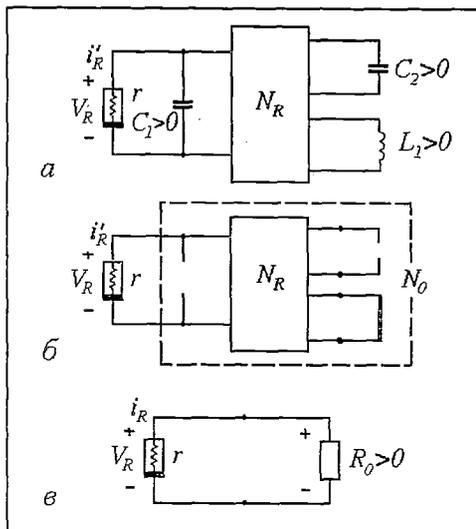


Рис. 3. а – конфигурация, которая задает схему, содержащую две линейные емкости, одну линейную индуктивность, двухполюсное немотонотное управляемое напряжением сопротивление и линейные пассивные сопротивления; б – эквивалентная схема для стационарного состояния, соответствующая схеме, приведенной на рис. 3, а; в – элемент  $N_0$  с одним входом (см. рис. 3, б), эквивалентный одному линейному пассивному сопротивлению  $R_0$ . Поскольку  $R_0 > 0$ , нагрузочная прямая имеет отрицательный наклон на  $v_R - i_R$  плоскости

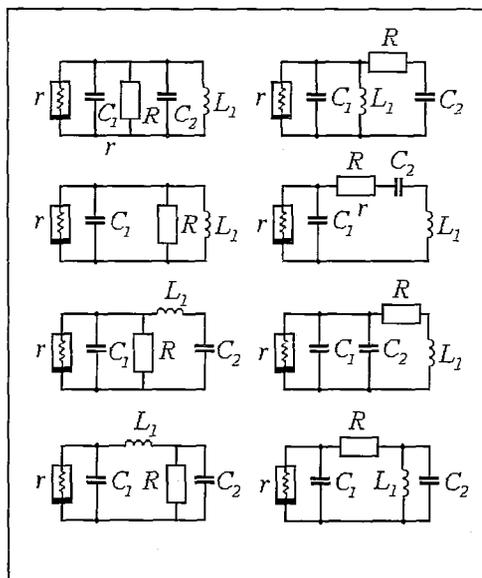


Рис. 4. Восемь различных топологий схем, существующих в предположении, что элемент с тремя входами  $N_R$  (см. рис. 3, а) состоит из одного линейного положительного сопротивления

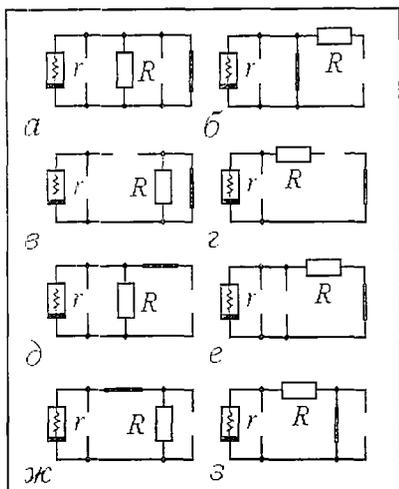


Рис. 5. Эквивалентные схемы для стационарного состояния, соответствующие «кандидатам» на хаотическую схему с рис. 4.

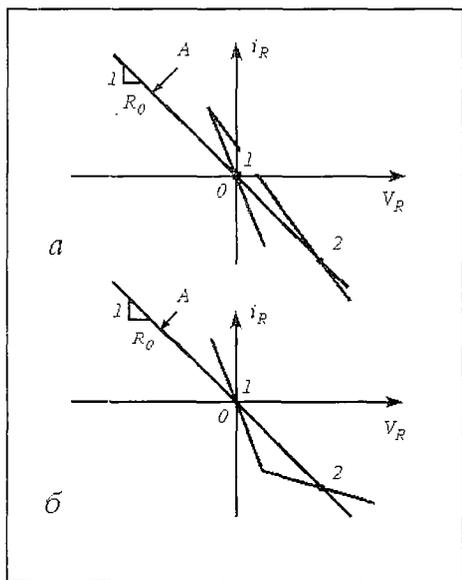


Рис. 6. Две (из четырех возможных) кусочно-линейные кривые, состоящие из двух сегментов с отрицательной крутизной и пересекающиеся в двух точках с нагрузочной прямой, имеющей также отрицательный наклон. Характеристика (а) является двужаночной функцией и  $v_R$  и  $i_R$ . Характеристика (б) — однозначная функция, но ее нижний сегмент, если его продолжить до бесконечности, останется в пределах четвертого квадранта, и, следовательно, она физически нереализуема. Здесь и далее А — нагрузочная характеристика

условие отрицательной крутизны равносильно тому, что эквивалентная цепочка при малом уровне возмущений вблизи каждого положения равновесия является отрицательным сопротивлением, а это существенно для наличия неустойчивости [11].

Поскольку  $R_0 > 0$ , нагрузочная прямая проходит через начало координат и имеет отрицательную крутизну  $G = -1/R_0 < 0$ . Для того, чтобы получалось два неустойчивых положения равновесия, существуют только 4 различных типа непрерывных двухсегментных кусочно-линейных характеристик, которые имеют отрицательную крутизну на обоих участках, и которые пересекаются с нагрузочной прямой в двух точках, включая начало координат, как показано на рис. 6 и рис. 7. Характеристики, представленные на рис. 6, а и рис. 7, а могут быть исключены, поскольку не соответствуют требованию управляемости напряжением. Две оставшиеся характеристики на рис. 6, б и рис. 7, б, дуальные друг другу, являются жизнеспособными кандидатами. К сожалению, они не пассивны при больших значениях переменных.

Простейшие характеристики, которые удовлетворяют всем требованиям и содержат характеристики, приведенные на рис. 6, б и рис. 7, б, в качестве подмножества, показаны на рис. 8, а и рис. 8, б соответственно. Поскольку они дуальны друг другу, можно выбрать любую из них. Каждая такая схема имеет только две неустойчивых точки равновесия, и мы можем ожидать, что любой странный аттрактор в этой системе будет иметь структуру, напоминающую аттрактор Ресслера [1].

Для того чтобы получить три неустойчивых положения равновесия, как это имеет место в уравнениях Лоренца, существуют только два различных типа непрерывных, трехсегментных, кусочно-линейных характеристик, обладающих отрицательной крутизной на каждом сегменте для удовлетворения требования неустойчивости, как это показано на рис. 9, а и рис. 9, б соответственно. Первая характеристика может быть исключена, так как она не соответствует требованию управляемости напряжением.

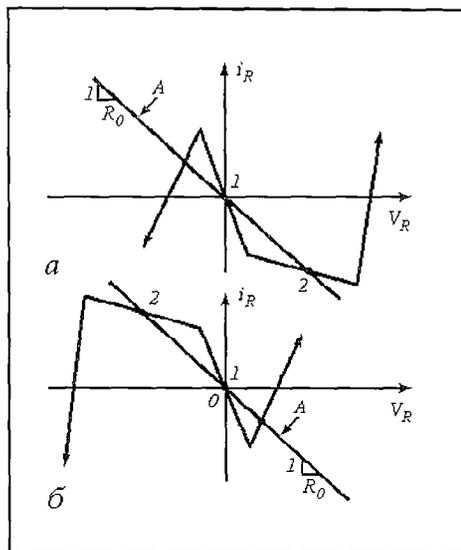
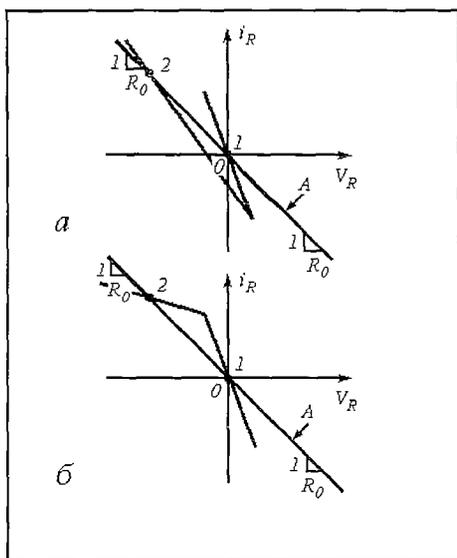


Рис. 7. Следующие две (из четырех возможных), кусочно-линейные характеристики, дуальные к приведенным на рис. 6.

Характеристика (а) также является двузначной функцией  $v_R$  и  $i_R$ . Характеристика (б) – однозначная функция; ее верхний сегмент, если его продолжить до бесконечности, останется в пределах второго квадранта, и, следовательно, она физически также нереализуема

Рис. 8. Две дуальные четырехсегментные характеристики (а) и (б). При больших значениях переменных они являются простейшими пассивными и, следовательно, физически реализуемыми, вольтамперными характеристиками, включающими характеристики, приведенные на рис. 6, б и рис. 7, б в качестве подмножества

В то же время вторая – полностью подходит, пока речь идет о требованиях неустойчивости и управляемости напряжением. Однако она не является пассивной при больших значениях переменных. Простейшая характеристика, которая удовлетворяет и этому требованию и включает рис. 9, б в качестве подмножества, является пятисегментной и изображена на рис. 10.

Вольтамперные характеристики, представленные на рис. 8 и рис. 10, а удовлетворяют требованиям неустойчивости и пассивности при больших значениях, сформулированным в наших технических условиях. Тем не менее, выберем для рассмотрения характеристику, приведенную на рис. 10, а, по трем причинам.

1. Эта характеристика включает обе характеристики, представленные на рис. 8, в, в качестве подмножества, и, следовательно, если схема, соответствующая либо рис. 8, а, либо рис. 8, б обладает странным аттрактором, то и выбранная нами характеристика также будет обеспечивать существование такого аттрактора. Более того, наличие третьей неустойчивой точки равновесия на рис. 10, а обеспечивает большую вероятность существования других типов странных аттракторов, что делает, таким образом, эту схему более богатой в отношении хаотической динамики.

2. Вольтамперную характеристику (см. рис. 10, а) легче реализовать, поскольку она четная: существуют простые методы синтеза четных вольт-амперных характеристик [2]. Кроме того, так как соответствующие уравнения состояния будут также обладать четностью, анализ такой схемы не будет более сложным, чем анализ схемы, соответствующей рис. 8.

3. Хотя кусочно-линейная характеристика на рис. 8 имеет два неустойчивых положения равновесия, нечаянно мы получили еще одну, на этот раз устойчивую, точку равновесия, которая попадает на сегмент, добавленный для того, чтобы добиться пассивности при больших значениях переменных.

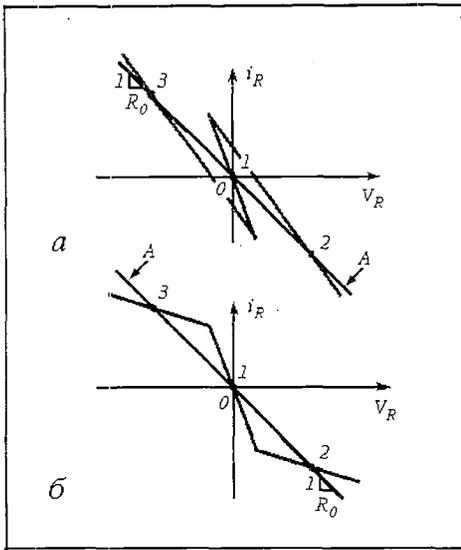


Рис. 9. Две единственные различные кусочно-линейные кривые, состоящие из трех сегментов с отрицательной крутизной и пересекающиеся с нагрузочной прямой, имеющей также отрицательный наклон, только в трех точках. Характеристика (а) является двужаночной функцией  $v_R$  и  $i_R$ . Характеристика (б) – однозначная функция, но ее внешние сегменты, если их продолжить до бесконечности, останутся в пределах второго и четвертого квадрантов соответственно, и, следовательно, она физически нереализуема

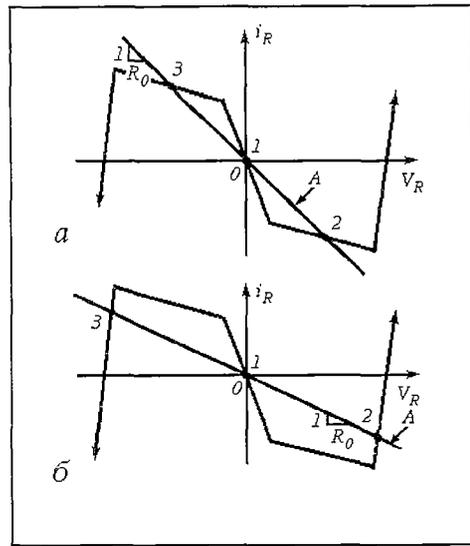


Рис. 10. Простейшая пятисегментная характеристика, являющаяся пассивной при больших значениях переменных и, следовательно, физически реализуемой. Она включает трехсегментную характеристику, приведенную на рис. 9, б в качестве подмножества. а – нагрузочная прямая пересекает характеристику в трех точках на участках с отрицательным наклоном, как это и требуется согласно спецификации ; б – для очень больших значений  $R_0$  две внешние точки равновесия попадают на сегменты с положительным наклоном и становятся устойчивыми, что нарушает спецификацию

Теоретически возможно отодвинуть точку излома этого сегмента так далеко вправо, насколько это необходимо для того, чтобы она не влияла на первоначально задуманную динамику. Однако на практике это может оказаться затруднительным вследствие ограниченности открывающего напряжения (cut-in voltage) диодного  $p-n$ -перехода и напряжения насыщения операционного усилителя.

Итак, приходим к выводу, что нам следует выбрать четную, пятисегментную, кусочно-линейную функцию на рис. 10, а в качестве вольтамперной характеристики для нелинейного резистора  $r$ . Заметим, что два сегмента, добавленные нами для достижения пассивности при больших значениях переменных, не приведут к появлению новых точек равновесия, при условии, что величина сопротивления  $R$  не очень велика, так что нагрузочная прямая не заходит за крайние точки излома, как показано на рис. 10, б. Сделав этот выбор, мы получаем схему Чуа на рис. 1.

### Заключение

Хаотическая схема на рис. 1 впервые была опубликована в [15], где Матсумото назвал ее Схемой Чуа. Однако, поскольку эта основополагающая статья по Схеме Чуа содержала лишь результаты компьютерного моделирования, при котором несущественны внешние два сегмента,

необходимые для физической реализации, то Матсумото использовал только три сегмента с отрицательной крутизной (см. рис. 9, б) и называл эту характеристику в своей статье "упрощенной версией" моей исходной схемы. Это утверждение Матсумото вводило в заблуждение, так как схема оставалась прежней: только вольтамперная  $v_R - i_R$  характеристика была обрезана таким образом, что состояла лишь из сегментов с отрицательной крутизной, — это очевидно, если исходить из вышеприведенной процедуры синтеза. Однако, для более практически ориентированных читателей необходимо подчеркнуть, что любая электронно-схемная реализация этой трехсегментной характеристики — а таких реализаций много — с необходимостью будет иметь плавно или резко *заворачивающую* (*rolling off*) характеристику, так что при больших значениях переменных она, в конечном счете, будет лежать в первом и третьем квадрантах. В простейших случаях, каждый из внешних участков вольтамперной характеристики будет приближаться к прямой линии с *положительным* наклоном. И действительно, характеристики, измеренные для всех электронно-схемных реализаций [14, 15, 17] трехсегментной вольтамперной характеристики на рис. 9, б, практически идентичны пятисегментной характеристике, изображенной на рис. 1, б.

В качестве последнего замечания мы хотели бы указать, что схема, приведенная на рис. 4, отвергнутая в пользу схемы Чуа, по-своему интересна.

В частности, если мы добавим линейное пассивное сопротивление последовательно с индуктивностью  $L$  на рис. 4, ж, то получим каноническую реализацию [12] семейства Схем Чуа [16]. Более 30 различных странных аттракторов было открыто на сегодняшний день в этой канонической схеме!

Перевод И.П.Сатаева

## Хронологическая библиография по схеме Чуа

*Matsumoto T.* A chaotic attractor from Chua's circuit // IEEE Trans. 1984. Vol. CAS-31, № 12. P. 1055.

*Zhong G.Q., Ayrom F.* Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit // Int. J. Circuit Theory Appl. 1985. Vol. 13, № 11. P. 93.

*Zhong G.Q., Ayrom F.* Periodicity and chaos in Chua's circuit // IEEE Trans. 1985. Vol. CAS-32, № 5. P. 501.

*Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The Double Scroll // IEEE Trans. 1985. Vol. CAS-32, № 8. P. 797.

*Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* The Double Scroll bifurcations // Int. J. Circuit Theory Appl. 1986. Vol. 14, № 1. P. 117.

*Matsumoto T., Chua L.O., Tokumasu K.* Double Scroll via a two-transistor circuit // IEEE Trans. 1986. Vol. CAS-33, № 8. P. 828.

*Ayrom F., Zhong G.Q.* Chaos in Chua's circuit // IEEE Proceeding. 1986. Vol. 33, № 6. P. 307.

*Chua L.O., Komuro M., Matsumoto T.* The Double Scroll family, part I and II // IEEE Trans. 1986. Vol. CAS-33, № 11. P. 1073.

*Kahlert C., Chua L.O.* Transfer maps and return maps for piecewise-linear and three-region dynamical systems // Int. J. Circuit Theory Appl. 1987. Vol. 15, № 1. P. 23.

*Matsumoto T., Chua L.O., Komuro M.* Birth and death of the Double Scroll // Physica 1987. Vol. 24D. P. 97.

*Ogorzalek M.J.* Chaotic regions from Double Scroll // IEEE Trans. 1987. Vol. CAS-34, № 2. P. 201.

*Broucke M.E.* One-parameter bifurcation diagram for Chua's circuit // IEEE Trans. 1987. Vol. CAS-34, № 3. P. 208.

*Matsumoto T., Chua L.O., Tokunaga R.* Chaos via torus breakdown // IEEE Trans. 1987. Vol CAS-34, № 3. P. 240.

*Wu S.* Chua's circuit family. Proceedings IEEE. 1987. Vol 75, № 8. P. 1022.

*Parker T.S., Chua L.O.* The dual Double Scroll equation // IEEE Trans. 1987. Vol CAS-34, № 9. P. 1059.

*Mees A.I., Chapman P.B.* Homoclinic and heteroclinic orbits in the Double Scroll attractor // IEEE Trans. 1987. Vol CAS-34, № 9. P. 1115.

*Kahlert C.* The range of transfer and return maps in tree-region piecewise-linear dynamical systems // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 1. P. 11.

*Kahlert C.* Dynamics of the inclusions appearing in the return maps of Chua's circuit-1. The creation mechanism // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 1. P. 29.

*Komuro M.* Normal forms of continuous piecewise-linear vector field and chaotic attractors: Part I // Japan. J. Appl. 1988. Vol. 5, № 2. P. 257.

*Komuro M.* Normal forms of continuous piecewise-linear vector field and chaotic attractors: Part II // Japan. J. Appl. 1988. Vol. 5, № 3. P. 503.

*Kahlert C.* The chaos producing mechanism in Chua's circuit // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 2. P. 227.

*Matsumoto T., Chua L.O., Ayaki K.* Reality of chaos in the Double Scroll circuit: A computer-assisted proof // IEEE Trans. 1988. Vol. CAS-35, № 7. P. 909.

*Silva C.P., Chua L.O.* The overdamped Double Scroll family // Int. J. Circuit Theory Appl. 1988. Vol 16, № 3. P. 233.

*Bartissol P., Chua L.O.* The Double Hook. // IEEE Trans. 1988. Vol CAS-35, № 12. P. 1512.

*Huang A.* A study of the chaotic phenomena in Chua's circuit. In: Proceedings of the ISCAS. Helsinki, 1988. P. 273.

*Tokunaga R., Matsumoto T., Komuro M., Chua L.O., Miya K.* Homoclinic linkage: A new bifurcation mechanism // Proceedings ISCAS. Seattle, 1989. P. 826.

*Tokunaga R., Matsumoto T., Ida T., Miya K.* Homoclinic linkage in the Double Scroll circuit and the cusp-constrained circuit. The study of Dynamical Systems / Ed. N. Aoki. Singapore: World Scientific, 1989, P. 192.

*Chua L.O., Lin G.N.* Intermittency in a piecewise-linear circuit // IEEE Trans. 1990. Vol. CAS-38, № 5. P. 510.

*Blazquez C.M., Tuma E.* Dynamics of the Double Scroll circuit. IEEE Trans. Vol CAS-37, № 5. P. 589.

*Chua L.O., Lin G.N.* Canonical realization of Chua's circuit family // IEEE Trans. 1990. Vol CAS-37, № 7. P. 885.

*Spany V., Pivka L.* Boundary surfaces in sequential circuits // Int. J. Circuit Theory Appl. 1990. Vol. 18, № 4. P. 349.

*Komuro M.* Bifurcation equations of 3-dimensional piecewise-linear vector fields. Bifurcation Phenomena in Nonlinear Systems and Theory of Dynamical Systems / Ed. H. Kawakami. Singapore: World Scientific, 1990. P. 113.

*Lozi R., Ushiki S.* Confiners and bounded-time patterns in Chua's circuit and the Double Scroll family // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol. 1, № 1. P. 119.

*Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the Double Scroll circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol 1, № 1. P. 139.

*Murali K., Lakshmanan M.* Bifurcation and chaos of the sinusoidally-driven Chua's circuit. // Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol 1, № 2. P. 369.

*Lozi R., Ushiki S.* Co-existing chaotic attractors in Chua's circuit. Int. J. Bifurcation and Chaos. 1991. Vol 1, № 4. P. 923.

*Kahlert C.* Heteroclinic orbits and scaled similar structures in the parameter space of the Chua's oscillator // Chaotic Hierarchy / Eds. G. Baier and M. Klein. Singapore: World Scientific, 1991. P. 209.

*Dabby D.S.* The buffalo horn and strange behavior in third order autonomous circuits. Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology, Electrical Engineering and Computer Science.

*Cruz J., Chua L.O.* A CMOS IC nonlinear resistor for Chua's circuit. Memorandum, Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley. Memo № M92/16, February 1992.

*Genesio R., Tesi A.* Harmonic balance approach for chaos prediction: the Chua's circuit // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. 1992. Vol. 2, № 1.

*Kennedy M.P.* Robust OP Amp realization of Chua's Circuit. *Frequenz* // 1992. Vol. 46, № 3–4. P. 66.

*Madan R.* (Guest editor): Special issue on Chua's circuit: A paradigm for chaos. Part I // *J. Circuit, Systems, and Computers*. 1993. Vol 2, № 1.

*Madan R.* (Guest editor): Special issue on Chua's circuit: A paradigm for chaos. Part II // *J. Circuit, Systems, and Computers*. 1993. Vol.2, № 2.

### Библиографический список

1. *Abraham R.H., Show, C.D.* Dynamics – The geometry of behavior. Santa Cruz: Aerial Press, 1981.

2. *Chua L.O.* Introduction to nonlinear circuit theory. New York: McGraw–Hill, 1969.

3. *Chua L.O.* Analysis and synthesis of multivalued memoryless nonlinear networks // *IEEE Trans.* 1967. Vol. CT–15. P.192.

4. *Chua L.O.* Synthesis of new nonlinear network elements// *Proc. IEEE*. 1968. Vol.56.P. 1325.

5. *Chua L.O., Wong S.* Synthesis of piecewise–linear networks// *Electronic Circuits and Systems*. 1978. Vol. 2. P. 102.

6. *Chua L.O.* Dynamic nonlinear networks: state–of–the–art// *IEEE Trans.* 1980. Vol. CAS–27. P. 1059.

7. *Chua L.O.* Device modeling via basic nonlinear circuit elements//*IEEE Trans.* 1980. Vol. CAS–27. P.1014.

8. *Chua L.O., Ying R.* Finding all solutions of piecewise– linear circuits//*Int. J. Circuit Theory and Appl.* 1982. Vol. 10. P. 201.

9. *Chua L.O., Hasler M., Neiryneck J., Verburgh P.* Dynamics of a piecewise–linear resonant circuit // *IEEE Trans.* 1982. Vol. CAS–29. P. 535.

10. *Chua L.O., Ayrom F.* Designing nonlinear single op–amp circuits: a cook–book approach // *Int. J. Circuit Theory and Appl.* 1985. Vol.13, P. 235.

11. *Chua L.O., Desoer C.A., Kuh E.S.* Linear and nonlinear circuits. New York: McGraw–Hill, 1985.

12. *Chua L.O., Lin G.N.* Canonical realization of Chua's circuit family // *IEEE Trans.* 1990. Vol CAS–37. P. 885.

13. *Guckenheimer J., Holmes P.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New–York: Springer Verlag, 1983.

14. *Kennedy P.* Experimental chaos via Chua's circuit / Eds. S.Vohra, M.Spano, M.Shlesinger, L.Pecora, W. Ditto // *Proc. of the 1st Experimental Chaos Conference*. World Scientific, 1992. P. 340.

15. *Matsumoto T.* A chaotic attractor from Chua's circuit//*IEEE Trans.* 1984. Vol. CAS–31. P. 1055.

16. *Wu S.* Chua's circuit family // *Proc. IEEE*. 1987. Vol 75. P. 1022.

17. *Zhong G.Q., Ayrom F.* Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit//*Int. J. Circuit Theory and Appl.* 1985. Vol.13. P. 93.

Беркли, Калифорнийский университет,  
факультет радиоэлектроники  
и компьютерных исследований

Поступила в редакцию 5.04.93 г.



Леон О. Чуа получил степень магистра в Массачусетском Технологическом институте в 1961 г. и степень доктора философии в Иллинойском университете, Урбана, в 1964 г. Федеральной Политехнической Школой Лозанны (Швейцария) 1983 г. ему было присвоено звание Доктор Honoris Causa, а в 1984 г. Университетом Токусима (Япония) – звание Почетного Доктора. В настоящее время он является профессором кафедры электротехники и компьютерных наук в Калифорнийском университете в Беркли. Научные интересы Чуа – общая теория нелинейных сетей и систем. Он является консультантом различных электронных фирм по вопросам анализа нелинейных сетей, моделирования и компьютерного дизайна. Профессор Чуа автор книги «Introduction to Nonlinear Network theory» (New York: McGraw Hill, 1969), и соавтор книг: «Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques» (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975), «Linear and Nonlinear Circuits», (New York: McGraw Hill, 1987), и «Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems» (New York: Springer Verlag, 1989). Им опубликовано много исследовательских работ по нелинейным сетям и системам.

В 1974 г. профессор Чуа избран членом общества IEEE. С 1973 по 1975 г. он выполняет обязанности редактора журнала «IEEE Transactions Circuits and Systems», а с 1976 г. – обязанности президента одноименного общества. В настоящее время он редактор международного журнала «Bifurcation and Chaos» и заместитель редактора международного журнала «Circuit Theory and Applications».

Профессор Чуа автор пяти патентов США. Ему присуждены награды и премии, в частности: премии IEEE имени Томсона (1967) и Бейкера (1973), награда Термана (1974), почетные звания (Миллеровским институтом в 1976 г. и Кэмбриджским университетом в 1982 г.), премия Гумбольта для американских ученых (Техническим университетом Мюнхена за 1982/83 гг.), премия университета Васеда в Токио от Японского общества Содействия науки (за 1983/84 гг.), юбилейная медаль IEEE (1985), премия Рида за лучшую публикацию (1985), премии IEEE Джиллимина–Кауэра (1985, 1989).

Осенью 1986 г. в Парижском университете профессор Чуа был удостоен международной премии французского Министерства образования.