



КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЧАСТЬ II. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПЕРЕХОД К ХАОСУ

А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, И.Р.Сатаев

Обсуждаются особенности сложной динамики отображений, характеризующихся двумя параметрами. Дан обзор известных результатов. Основное внимание уделено трикритической динамике, для анализа которой привлекается методология Фейгенбаума и его последователей. Приводится приближенный и строгий ренормгрупповой анализ. Даны иллюстрации скейлинга и рассмотрены физические примеры. Введены основные понятия теории мультипараметрической критичности, использующей классификацию «сценариев» перехода к хаосу в духе движения по коразмерности.

1. Бимодальные отображения

В первой части статьи мы обсудили закономерности, наблюдаемые при переходе к хаосу через удвоения периода в системах, описываемых одномерными отображениями с одним квадратичным экстремумом. Естественное направление развития теории состоит в том, чтобы обратиться к рассмотрению перехода к хаосу в бимодальных отображениях, имеющих два экстремума. Такие отображения стали предметом интенсивных исследований начиная с середины 80-х годов. Предполагается, что результаты анализа будут полезны для понимания поведения многих реальных нелинейных систем. Например, кубическое отображение (cubic map)

$$x_{n+1} = a - b x_n + x_n^3, \quad (1)$$

может моделировать феномены нелинейного резонанса в возбуждаемом нелинейном осцилляторе (Holmes, 1979 [1]). Существование множества экстремумов характерно для отображения окружности, описывающего синхронизацию автоколебаний внешним сигналом

$$x_{n+1} = x_n + \Omega + \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi x_n, \quad (\text{mod } 1). \quad (2)$$

Здесь K – нормированная амплитуда воздействия, Ω – параметр, определяемый отношением собственной частоты и частоты внешнего воздействия. Ясно, что можно реализовать такой режим колебаний, когда изображающая точка будет посещать окрестности двух соседних экстремумов (Glass и Peres, 1982 [2]; Schell, Fraser и Karpat, 1983 [3]). Далее мы укажем и другие примеры.

Существование двух экстремумов – «грубое» свойство отображений, которое легко диагностируется исследователем-эмпириком по виду «портрета» аттрактора в сечении Пуанкаре на экране осциллографа или дисплея. Поэтому важно установить, какие особенности сложной динамики связаны с такой топологией отображения. При исследовании бимодальных отображений естественно прибегнуть к двухпараметрическому анализу. Всю качественную информацию о свойствах движения тогда несет карта динамических режимов – плоскость параметров, на которой отмечены возможные бифуркации и типы динамики.

В первых же работах, посвященных бимодальным отображениям, авторы отмечали наличие жестких переходов между различными динамическими режимами [2–5]. В этом случае карту динамических режимов полезно представлять состоящей из частично перекрывающихся листов (рис. 1). Для того, чтобы сделать эту особенность топографии карты более наглядной, рис. 1 придана некоторая воображаемая перспектива в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка. Область перекрытия листов – это область бистабильности. На краях листов происходят жесткие переходы, сопровождающиеся гистерезисом. Такая топология карты связана с существованием катастрофы сборки – бифуркации, типичной на плоскости параметров. Катастрофа сборки обнаруживается, например, при исследовании резонанса в нелинейном осцилляторе.

Анализ сложной динамики различных двухпараметрических систем привел исследователей к выводу о том, что полезно не просто искать возможные типичные бифуркации, а выделять некоторые области пространства параметров, где располагаются определенным образом друг относительно друга бифуркации разной коразмерности. На рис. 2 показана одна из самых простых композиций такого рода, которую Carcases и др. [6] назвали crossroad area – «перепутье». В этой ситуации область устойчивости некоторого цикла располагается на двух частично перекрывающихся листах, с чем и связан выбор термина. На плоскости параметров имеется точка сборки с отходящими от нее двумя линиями складок, две линии удвоений, уходящие по берегам линий складок, и линия «предыдущего» удвоения. Выделение подобных «композиций»

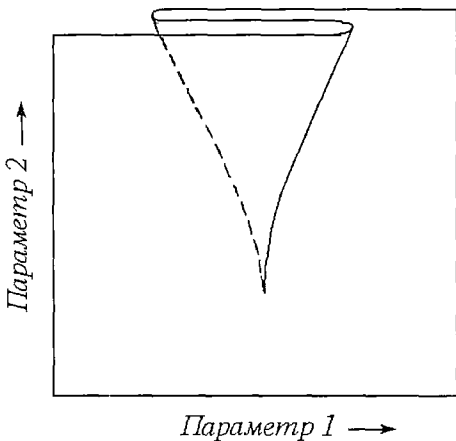


Рис. 1. Катастрофа сборки на плоскости параметров нелинейной системы. Рисунок придана некоторая воображаемая перспектива, что делает наглядным существование трех листов в некоторой области плоскости параметров. Конфигурация плоскости параметров напоминает сборку на ткани

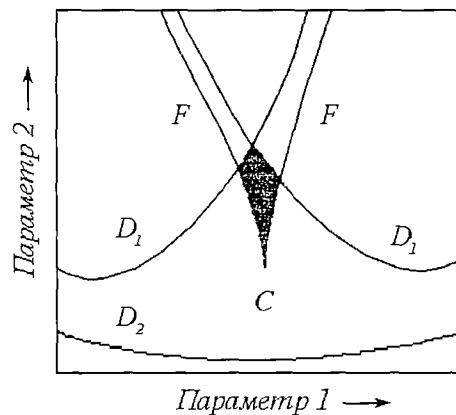


Рис. 2. Простейшая «композиция» локальных бифуркаций – ситуация crossroad area. C – точка сборки, D_1 – линии удвоений периода, D_2 – линия «предыдущего» удвоения, F – линии складок (линии жестких переходов). Штриховкой показана область бистабильности, в которой сосуществуют два различных устойчивых цикла

не соответствует принципам традиционной теории бифуркаций, которая основывается на локальном анализе в пространстве параметров. Поэтому с формальной точки зрения локальной теории бифуркаций ситуации типа crossroad area (и другие подобные ситуации: spring area [6], saddle area [7]), не подлежат классификации. Они, однако, наблюдаются во множестве реальных нелинейных систем и играют важную роль в двухпараметрическом сценарии перехода к хаосу. По-видимому, необходима некая нелокальная теория, объясняющая природу типичности таких композиций.

Изучая бимодальные отображения, исследователи столкнулись с необычайным богатством динамических режимов. В области существования долгопериодических циклов обнаруживаются все новые и новые сборки. Таким образом, при все более детальном исследовании конкретной нелинейной системы, карта динамических режимов представляется все более «гофрированной» (рис. 3). При этом число листов карты стремительно растет, растет и компьютерное время, которое необходимо затратить на создание полного топографического «портрета» сложной динамики.

Тем не менее, карту динамических режимов можно мыслить как некий единый объект. Путешествуя по такой многолистной поверхности по различным сложным маршрутам, можно получить представление о взаимосвязи различных динамических режимов.

На плоскости параметров бимодальных отображений обнаруживаются определенные закономерности накопления мультистабильных состояний. Исследуя двухпараметрическое «квартичное» отображение (quartic map)

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4, \quad (3)$$

Chang, Wortis и Wright [9] обнаружили иерархию ситуаций типа crossroad area на базе циклов удваивающихся периодов, накапливающиеся к некоторым

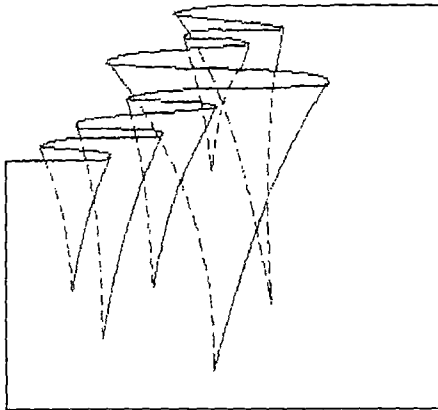


Рис. 3. Многолистная структура карты динамических режимов некоторой гипотетической динамической системы в области долго периодических циклов. На каждом листе карты реализуется своя структура областей

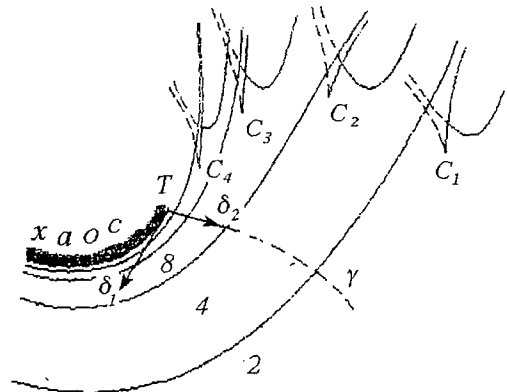


Рис. 4. Качественная картина мелкомасштабной структуры плоскости параметров в окрестности трикритической точки T . Штриховкой показана фейгенбаумовская критическая линия, являющаяся границей хаоса, C_n – последовательность точек сборки, накапливающиеся к трикритической точке, γ – линия, вдоль которой наблюдается нефейгенбаумовский каскад удвоений. Стрелками показаны два собственных направления скейлинга

характерным точкам на плоскости параметров a, b (рис.4). Такие точки представляют собой концы гладких фейгенбаумовских линий. Они получили название *трикритических*. (Термин заимствован из теории фазовых переходов. Трикритической называют точку, в которой сходятся линии фазовых переходов первого и второго рода, ассоциирующихся соответственно с мягким рождением хаоса по сценарию Фейгенбаума и с жесткими скачками [10].)

В пределах одного листа карты динамических режимов существуют линии γ , двигаясь вдоль которых по направлению к трикритической точке можно наблюдать *нефейгенбаумовский каскад удвоений периода*. Закон накопления точек бифуркации вдоль линии γ такой же, как в отображении $x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^4$, и характеризуется скейлинговой константой $\delta_1 = 7,284686217$. Chang с соавторами провели довольно подробное исследование трикритических точек четвертичного отображения, включая ренормгрупповой анализ. Была исследована мелкомасштабная структура плоскости параметров в окрестности трикритических точек. Эта структура обладает свойством *универсальности*, т.е. одинакова с точностью до линейной замены параметров для всех трикритических точек.

Представления о трикритичности приводят к новой концепции универсальности. Эта концепция относится к двухпараметрическим феноменам на пороге хаоса и может рассматриваться как развитие методологии Фейгенбаума. Разумно предположить, что возможны и более сложные типы критических явлений.

Существование множества классов универсальности динамических систем позволяет ввести представление об их *типичности*, понимаемой в том же смысле, как в теории бифуркаций и теории катастроф. Можно сказать, что на проведенной в пространстве параметров некоторого отображения линии «скорее всего» существуют точки, в окрестности которых реализуется фейгенбаумовский сценарий. В свою очередь, на пересекающей пространство параметров этого отображения поверхности должны существовать точки, в окрестности которых имеется характерная универсальная мелкомасштабная структура областей, соответствующая трикритичности. Используя терминологию теории бифуркаций, можно сказать, что для одномерных отображений коразмерность фейгенбаумовского сценария равна единице, а трикритичности – два. Коразмерность каждого критического состояния может быть определена строго – по числу существенных скейлинговых констант, которые находятся из решения ренормгрупповых уравнений. (Для «сценария Фейгенбаума» такая константа всего одна: $\delta_F = 4,6692$.)

Математическое определение типичности, однако, отнюдь не гарантирует, что в реальных системах можно без проблем наблюдать ту или иную разновидность критического поведения. Типичность для физика хотя и менее строгое, но, пожалуй, более емкое понятие. В физике «типичность» связана и с уровнем развития техники эксперимента, и с мощностью компьютеров, и с тем, какие конкретные физические системы интересны для исследователей в данное время. Такие моменты, когда обрушивается лавина физических иллюстраций (предельные циклы в нелинейной теории колебаний в 50-ые годы, странные аттракторы в 70-е), определяются и общим уровнем развития науки. По-видимому, современные методы компьютерной обработки (Котико и др., 1991 [11]; Markus, 1990 [12]) позволяющие строить эффектные цветные карты динамических режимов, для получения любого «среза» пространства параметров, подготовили почву для более широкого внедрения в арсенал исследователей некоторых результатов теории критических явлений.

2. Квартичное отображение. Иллюстрации скейлинга и трикритический аттрактор

В классификационной схеме критических явлений в одномерных отображениях трикритичность занимает «вторую строчку» после сценария Фейгенбаума. «Эталонной» моделью для анализа трикритичности может служить квартичное отображение (3). Обсудим его свойства подробнее.

Квартичное отображение имеет простейшую трикритическую точку T_1 : $a_c = 0$, $b_c = 1,5949013562288$. Линия γ , вдоль которой наблюдается нефейгенбаумов-ский каскад удвоений, накапливающихся к этой точке – это просто ось b . Вдоль этой оси функция $f(x)$ имеет экстремум четвертого порядка.

Другие трикритические точки квартичного отображения порождаются ситуацией отображения экстремум в экстремум. Например, условие $b = -a^2/4$ задает на плоскости параметров кривую γ , на которой экстремум $x_1 = \sqrt{-a/2b}$ отображается в экстремум $x_2 = 0$. На этой кривой расположена трикритическая точка T_2 : $a_c = 3,18980271246$, $b_c = -2,5437103361$.

Ситуация отображения экстремума в экстремум является удобным эмпирическим признаком принадлежности отображения к классу универсальности, ассоциирующемуся с трикритичностью. Действительно, пусть функция $f(x)$ имеет два квадратичных экстремума

$$f(x) = f(x_1) + c_1(x-x_1)^2 + \dots, \quad f(x) = f(x_2) + c_2(x-x_2)^2 + \dots$$

Наложим условие отображения экстремума в экстремум:

$$x_2 = f(x_1). \quad (5)$$

Выполним отображение в окрестности точки x_1 два раза:

$$f(f(x)) = f(f(x_1) + c_1(x-x_1)^2) = f(f(x_1)) + c_2 c_1^2 (x-x_1)^4 + \dots$$

Итак, двукратно выполненное отображение на линии γ (5) имеет экстремум четвертой степени. Это делает понятным фундаментальную роль квартичного отображения для понимания двухпараметрической критичности на пороге хаоса.

Дадим теперь иллюстрации скейлинга в квартичном отображении. Первое собственное направление скейлинга в трикритической точке идет по касательной к линии γ , а второе – по касательной к фейгенбаумовской критической линии [9]. В окрестности трикритической точки T_2 скейлинговые координаты (ξ, η) определяются с помощью соотношений

$$a = a_c + 0,950\xi + 0,627\eta, \quad b = b_c - \xi - \eta.$$

На рис. 5 приведена карта динамических режимов отображения (3) в скейлинговых координатах. Трикритическая точка T находится точно в центре графика. Различной штриховкой обозначены области существования притягивающих циклов различного периода. Внутренность маленького прямоугольника воспроизведена в увеличенном виде на картинке внизу, причем факторы пересчета масштабов по горизонтальной и вертикальной осям равны $\delta_1 = 7,284686217$ и $\delta_2 = 2,8571241351$, соответственно. Видно, что исходная и увеличенная картинки хорошо согласуются.

На рис.6 показано бифуркационное дерево квартичного отображения, дающее зависимость значений переменной x в установившемся режиме от управляющего параметра b вблизи трикритической точки $a_c = 0$, $b_c = 1,5949013562288$ вдоль направления, отвечающего максимальному

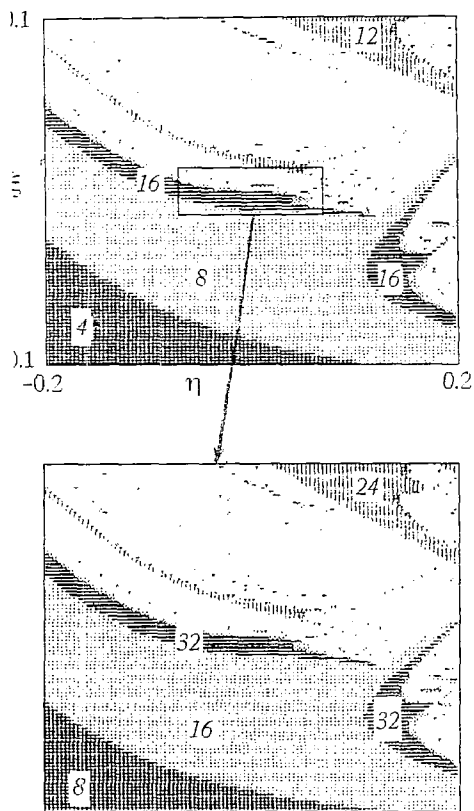


Рис. 5. Скейлинг в квартичном отображении. Маленький фрагмент плоскости параметров превращается сам в себя при соответствующем увеличении

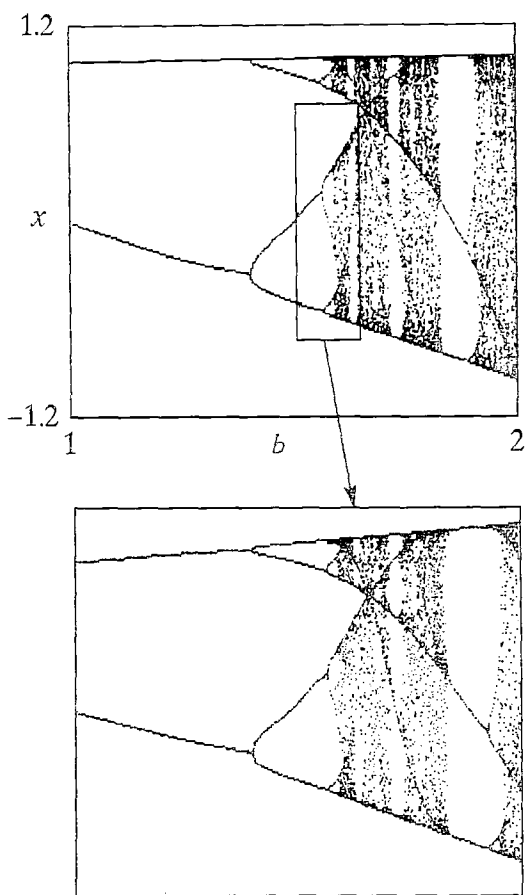


Рис. 6. Бифуркационное «трикритическое» дерево. Маленький фрагмент дерева при соответствующем увеличении превращается сам в себя – еще одна иллюстрация скейлинга

собственному числу. Характерной особенностью этого графика по сравнению с фейгенбаумовской ситуацией является наличие существенно более широких окон устойчивости. Это прямое следствие того, что экстремум отображения четвертой степени более «плоский», чем у квадратичного отображения. Рисунок (см. рис. 6) иллюстрирует скейлинг на бифуркационном дереве. Растяжение фрагмента картинки осуществляется с константами δ_1 по оси b относительно точки $b_c = 1,594901$ и $a_T = 1,6903029714$ по оси x относительно точки $x = 0$. Константа a_T – масштабный фактор, характеризующий трикритичность.

На рис. 7 приведен график зависимости от параметра b ляпуновского показателя вдоль собственного направления, отвечающего максимальному собственному числу. Этот график тоже обладает свойством самоподобия. В частности, огибающая зависимости ляпуновского показателя от параметра подчиняется скейлинговому закону

$$\Lambda \cong (b - b_c)^\chi, \quad (6)$$

где b_c – критическое значение параметра, а $\chi = \ln 2 / \ln \delta_1 = 0,3491$ – новый универсальный критический индекс.

На рис. 8 показан спектр колебаний в трикритической точке. Как и фейгенбаумовский спектр, он также имеет иерархическую организацию по уровням амплитуд субгармоник, которая описывается приближенным соотношением

$$\frac{1 + a_T^6 \pm 2a_T^3 \cos(\pi\omega/2)}{4a_T^8} S_n(\omega) \rightarrow \begin{cases} S_{n+1}(\omega/2), \text{ знак "+"}, \\ S_{n+1}(1-\omega/2), \text{ знак "-"}. \end{cases} \quad (7)$$

Это соотношение позволяет определить новый критический индекс $\gamma = 10 \lg(1/4a_T^8 + 1/4a_T^2) = 10,40$ дБ, характеризующий средний перепад между соседними уровнями субгармоник, и коэффициент $\alpha = |2a_T^3/(1 + a_T^6)| = 0,40$, характеризующий степень неравномерности распределения амплитуд субгармоник внутри определенного уровня.

На рис. 9 показан трикритический аттрактор кватерного отображения в ситуации, когда реализуется отображение «экстремум в экстремум». Трикритический аттрактор имеет фрактальную организацию и характеризуется величиной хаусдорфовой размерности $D_T = 0,64258$. Этот аттрактор может быть описан с помощью скейлинг-спектра, σ -функции и спектра обобщенных размерностей.

На рис. 10 приведен график σ -функции. Она определена известным соотношением Фейгенбаума [13]

$$\sigma(m/2^{n+1}) = \frac{x'_m - x'_{m+2^n}}{x_m - x_{m+2^{n-1}}},$$

но в качестве величин x_m фигурируют элементы 2^n циклов отображения (3) в трикритической точке. Для «трикритической» σ -функции справедливы предельные соотношения, аналогичные [13]:

$$\sigma(+0) \rightarrow 1/a_T^4, \quad \sigma(1/2-0) \rightarrow 1/|a_T|. \quad (8)$$

Эти две величины задают максимальный и минимальный масштабы расщепления на бифуркационном дереве. На рис. 11 показан скейлинг-спектр. По его максимуму можно определить величину хаусдорфовой размерности трикритического аттрактора $D_T = 0,642575$. График обобщенной размерности $D(q)$ приведен на рис. 12.

Итак, мы привели основные критические индексы и описали совокупность основных иллюстраций критичности – составили своего рода «визитную карточку» трикритической динамики. Такую работу надо было проделать всего один раз. Благодаря универсальности любое отображение, демонстрирующее трикритичность, «предъявит» именно эту «визитную карточку».

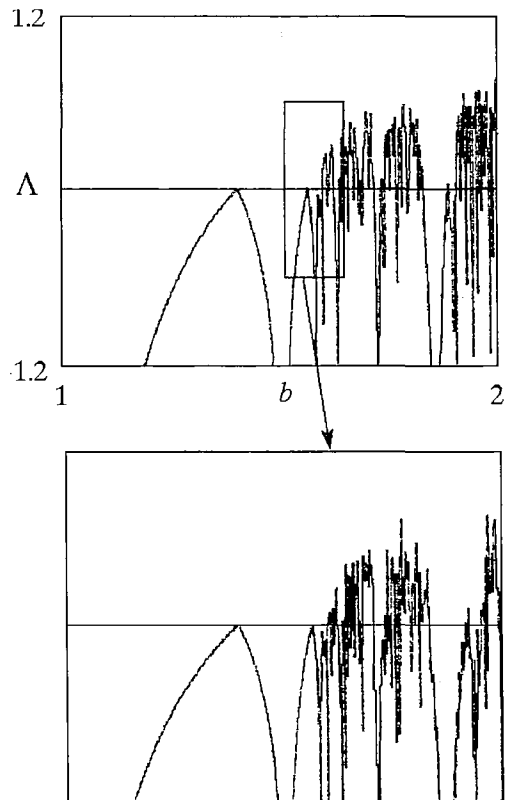


Рис. 7. График зависимости ляпуновского показателя от параметра b для отображения $x_{n+1} = 1 - bx_n^4$. Огибающая графика определяет критический индекс χ

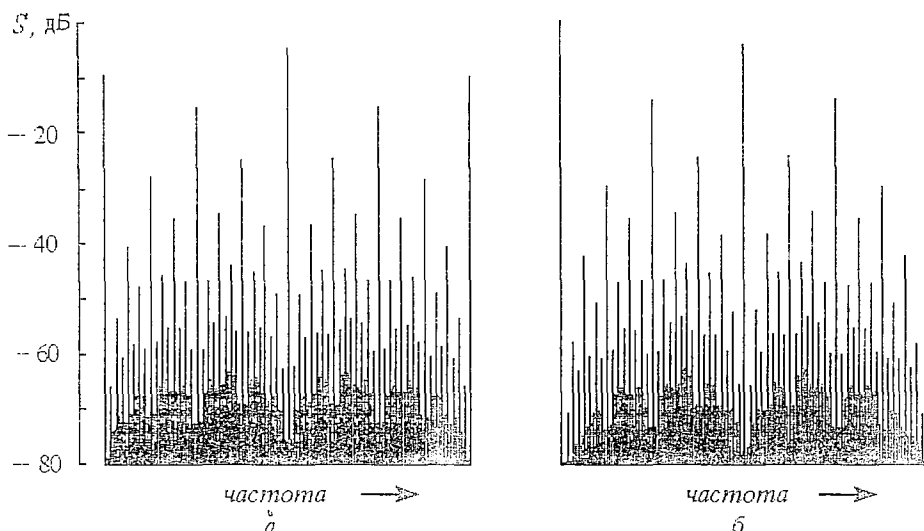


Рис. 8. Спектры колебаний в трикритических точках для четверичного отображения (а) и для системы Чуа (б). Они похожи на спектр логистического отображения в фейгенбаумовской критической точке, но количественные характеристики спектра другие. Например, перепад между субгармониками соседних уровней 10,4 дБ, а не 13,3 дБ

3. Приближенный ренормгрупповой анализ трикритической динамики

Перейдем к обоснованию универсальности трикритической динамики, для чего обратимся к ренормгрупповому (РГ) анализу. Как показывает исследование фейгенбаумовской ситуации, приближенный РГ анализ дает ценную информацию о свойствах критичности [14–16]. Проведем поэтому сначала приближенный РГ анализ трикритического поведения.

Следуя общей идее РГ анализа, выполним отображение (3) дважды. Отбросим далее в полученном выражении члены порядка λ^6 и выше:

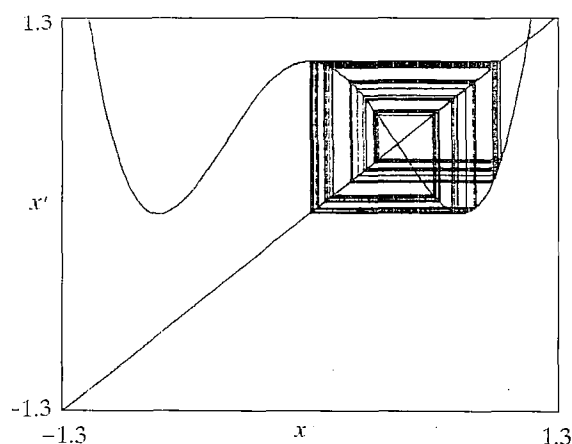


Рис. 9. Трикритический аттрактор в четверичном отображении на диаграмме Ламерея. Аттрактор опирается одновременно на два квадратичных экстремума функции $f(x)$

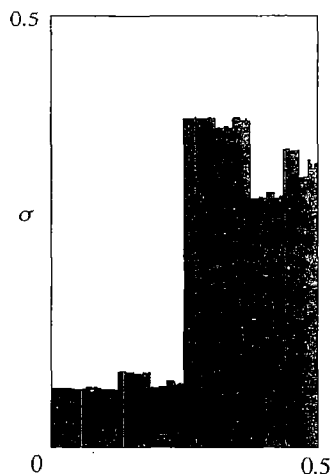


Рис. 10. График трикритической σ -функции

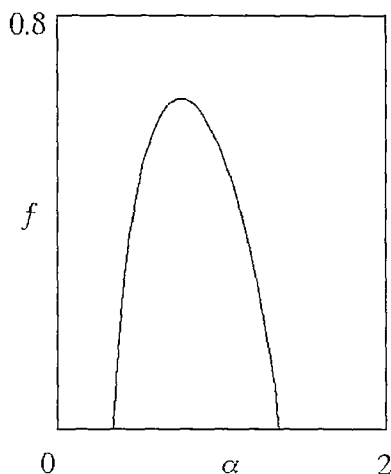


Рис. 11. Скейлинг-спектр для трикритичности

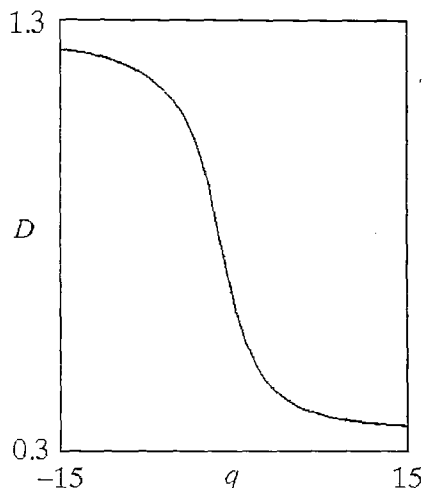


Рис. 12. График обобщенной размерности для трикритичности

$$x_{n+2} = 1 - a - b + 2a(a + 2b)x_n^2 + (2ab - a^3 - 6a^2b + 4b^2)x_n^4 + \dots \quad (9)$$

Выполним теперь замену переменной $x \rightarrow X(1 - a - b)$ и параметров

$$\begin{aligned} a' &= 2a(a + b - 1)(a + 2b), \\ b' &= (a + b - 1)^3(2ab - a^3 - 6a^2b + 4b^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Подобная замена приводит к следующему отображению

$$X = 1 - a' X_n^2 - b' X_n^4. \quad (11)$$

Итак, оператор эволюции системы (3) на удвоенном временном интервале приводится приближенной перенормировкой к исходному виду. Поскольку описанную процедуру можно повторить многократно, строя оператор эволюции на увеличивающихся по закону 2^n временных интервалах, мы имеем рецепт описания динамики на любых, сколь угодно больших промежутках времени.

Будем рассматривать рекуррентное соотношение (10) как уравнение *ренормдинамики*, связывающее значения переменных a и b в предыдущий и последующий моменты «*ренормвремени*». Параметры a и b мы можем интерпретировать тогда как *ренормпеременные*. Обсудим свойства фазового пространства, в котором протекает ренормдинамика отображения (10). На плоскости a, b отображение (10) имеет две существенные неподвижные точки. Первая – это фейгенбаумовская точка с координатами $(1,522242, -0,127613)$, характеризующаяся собственными числами $\delta_{F1} = 4,48958$ и $\delta_{F2} = -0,130948$. Первое собственное число представляет собой приближенное значение константы Фейгенбаума $\delta_F = 4,6692$. Поскольку $\delta_{F1} > 1$, а $|\delta_{F2}| < 1$, то фейгенбаумовская неподвижная точка является *седловой*. Вторая неподвижная точка имеет координаты $(0, 1,544933)$ и характеризуется собственными числами $\delta_{T1} = 10,50523$ и $\delta_{T2} = 3,36754$. Ее естественно ассоциировать с трикритической точкой. Поскольку оба собственных числа, связанных с трикритической точкой, больше единицы, то она является *неустойчивым узлом*. Полный «фазовый портрет» отображения (10) на плоскости a, b представлен на рис. 13.

На этом рисунке показаны фейгенбаумовская F и трикритическая T неподвижные точки.

Обсудим теперь, как происходит ренормдинамика на плоскости a, b . Фактически, для этого достаточно иметь построенный нами фазовый портрет. Как было отмечено в Части I данной работы [16], удвоениям временных интервалов соответствуют итерации РГ уравнения в обратном «ренормвремени». Такие итерации в конечном итоге приводят в критическое состояние. Как видно из рис.14, по мере эволюции в обратном ренормвремени, центр маленького отрезка линии удвоения периода приближается к фейгенбаумовской неподвижной точке, а сам отрезок растягивается вдоль устойчивого многообразия этой точки. Таким образом, устойчивое многообразие фейгенбаумовской точки дает приближенное положение критической фейгенбаумовской линии на плоскости a, b . Фейгенбаумовская универсальность обусловлена тем, что исходный отрезок бесконечно мал и лежит фактически на неустойчивом многообразии, вдоль которого ренормдинамика описывается одномерным отображением и которому отвечает собственное число δ_F .

Эта картина нарушается вблизи трикритической точки. В качестве «стартовой» ситуации для построения мелкомасштабной структуры плоскости параметров в ее окрестности возьмем фрагмент плоскости, содержащий ситуацию типа crossroad area. Итерации с помощью отображения (10) фрагмента crossroad area порождают характерную иерархию точек сборки циклов возрастающих периодов, накапливающихся к трикритической точке (см.рис.4). При этом точки сборки быстро приближаются ко второму собственному направлению трикритической точки, а затем более медленно перемещаются вдоль него, поскольку $\delta_{T1} \gg \delta_{T2}$. В результате линия накопления точек сборки оказывается естественным продолжением фейгенбаумовской критической линии. При этом возникает и типичное для бимодальных отображений расположение линий удвоения – вдали от трикритической точки они сходятся к фейгенбаумовской критической линии, а в ее окрестности веерообразно расходятся.

Оценим теперь с помощью приближенного ренормгруппового анализа

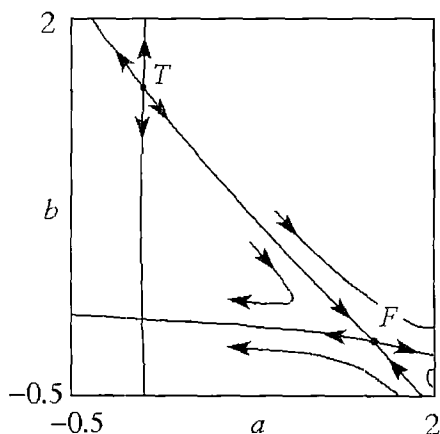


Рис. 13. «Фазовый портрет» уравнения ренормдинамики. Он демонстрирует сосуществование двух неподвижных точек РГ уравнений – фейгенбаумовской F и трикритической T . Показанные на рисунке устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек определяют законы скейлинга

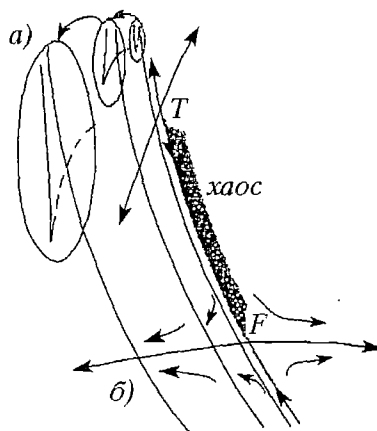


Рис. 14. «Фазовый портрет» уравнения ренормдинамики и характерные элементы структуры плоскости параметров: (а) иерархия ситуаций типа crossroad area, накапливающихся к трикритической точке, (б) линии удвоения периода, накапливающиеся к критической линии – устойчивому многообразию фейгенбаумовской неподвижной точки РГ уравнения

остальные универсальные константы. Из правила перенормировки динамической переменной x (10) получаем масштабный фактор $a_T \equiv 1/(1-b_c) = -1,83509$, где $b_c = 1,544933$. Решая уравнение $x_0 = 1-b_c x_0^4$, находим неподвижную точку $x_0 = 0,67647$ в критической ситуации и, соответственно, универсальное значение мультипликатора $\mu_c = -4b_c x_0^3 = -1,91303$. В таблице приведены точные и приближенные значения критических параметров.

Мы обсудили двумерную ренормдинамику, соответствующую трикритичности. Но достаточно ли именно двух параметров для описания трикритичности в произвольных нелинейных системах?

Для ответа на этот вопрос введем в квартичное отображение простейшую нечетную добавку – линейный член:

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cx_n. \quad (12)$$

Таблица

Ясно, что возмущенное отображение не приводится заменой переменной типа сдвига и изменения масштаба к исходному квартичному отображению (в теории Фейгенбаума нечетное возмущение, отвечающее собственному числу $\delta = a_T$, устраняется только благодаря возможности замены типа сдвига [13]). Применим процедуру приближенного РГ анализа к отображению (12). Выполним это отображение дважды, считая возмущение малым и пренебрегая членами порядка cx^3 и c^2x :

Критические параметры	Приближенно	Точно
a_c	0	0
b_c	1,5449	1,5949
δ_1	10,5052	7,2847
δ_2	3,3675	2,8571
a_T	1,8351	-1,6903
μ_c	-1,9130	-2,0509

$$x_{n+2} = 1 - a - b - c + a[2(a + 2b) + c]x_n^2 + (2ab - a^3 - 6a^2b + 4b^2 + cb)x_n^4 + (2a + 4b)cx_n + \dots \quad (13)$$

С помощью перенормировки переменной $x \rightarrow X(1-a-b-c)$ и параметров

$$\begin{aligned} a' &= a(a + b + c - 1)(2a + 4b + c), \\ b' &= (a + b + c - 1)^3(2ab - a^3 - 6a^2b + 4b^2 + cb), \\ c' &= -(2a + 4b)c, \end{aligned} \quad (14)$$

мы приходим к отображению (12):

$$X_{n+2} = 1 - a'X_n^2 - b'X_n^4 - c'X_n. \quad (15)$$

«Фазовое пространство» РГ уравнения (14) трехмерно. В плоскости $c = 0$ в этом пространстве расположена невозмущенная неподвижная трикритическая точка $a_c = 0, b_c = 1,544933$. Два неустойчивых собственных направления этой точки лежат в плоскости $c = 0$, и им соответствуют найденные выше собственные числа $\delta_{T1} = 3,36754$ и $\delta_{T2} = 10,50523$. Третий собственный вектор направлен трансверсально к плоскости a, b и характеризуется новым собственным числом $\delta_{T3} = -4b_c = aT^3$. Поскольку $|\delta_{T3}| > 1$, то это неустойчивое направление должно быть существенным.

Для квартичного отображения собственное число δ_{T3} заведомо не играет роли, поскольку это отображение содержит лишь четные степени x . Однако

другие бимодальные отображения (кубическое, отображение окружности и др.) содержат нечетную компоненту. Более того, если нелинейная система описывается многомерным отображением или дифференциальным уравнением, то более естественно ожидать динамики, характерной скорее для произвольной функции $f(x)$, нежели для функции, содержащей в своем разложении лишь четные члены. Поэтому вопрос о числе существенных скейлинговых констант, т.е. вопрос о коразмерности трикритической динамики оказывается нетривиальным.

Чтобы более глубоко и корректно разобраться в возникшей парадоксальной ситуации, обратимся к строгому РГ анализу, а затем к примерам физических систем, демонстрирующих трикритичность.

4. Строгий ренормгрупповой анализ трикритической динамики

Точное РГ уравнение для анализа трикритичности совпадает с уравнением Фейгенбаума:

$$G(x) = aG(G(x/a)). \quad (16)$$

При этом решение уравнения (16) следует искать в виде полинома, содержащего только степени x^4 [9]. Численно можно получить следующую аппроксимацию функции $G(x)$:

$$\begin{aligned} G(x) = & 1 - 1.83410790700x^4 + 0.01296222601x^8 + 0.31190173945x^{12} - \\ & - 0.06201465160x^{16} - 0.03753928670x^{20} + 0.01764731251x^{24} + \\ & + 0.00193826520x^{28} - 0.00282047096x^{32} + 0.00011545666x^{36} + \\ & + 0.00039947082x^{40} - 0.00002479251x^{44} - 0.00012164143x^{48} + \\ & + 0.00007043385x^{52} - 0.00001797963x^{56} + 0.00000190870x^{60}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из соотношения (17) находим значение масштабной константы, отвечающей за пересчет динамической переменной x : $a_T = (G(1))^{-1} = -1,6903029714$.

Точно в трикритической точке динамика описывается универсальным отображением $x_{n+1} = G(x_n)$. Это отображение имеет неподвижную точку $x_0 = 0,6581992533$ и всевозможные 2^n -циклы с ближайшими к экстремуму элементами $x_0/a_T, x_0/a_T^2, \dots$. Мультипликатор неподвижной точки равен $\mu_c = -2,0509404903$ и представляет собой универсальный мультипликатор всех 2^n -циклов, реализующихся в трикритическом состоянии.

По аналогии с анализом Фейгенбаума запишем уравнение для возмущений, выводящих систему из критической точки:

$$\delta H(x) = a_T (G'(G(x/a_T))H(x/a_T) + H(G(x/a_T))). \quad (18)$$

Используя в качестве функции $G(x)$ представление (17), из (18) получаем три существенных решения. Собственным функциям

$$H_1(x) = 1 - 0.15923939932x^4 - 0.54051878383x^8 + \dots,$$

$$H_2(x) = 1 + 5.70497840590x^2 - 1.69077845264x^4 + \dots$$

отвечают значения констант δ_1 и δ_2 , приведенные выше. Третья собственная функция

$$H_3(x) = 1 + 9.281558421x + \dots$$

содержит в своем разложении нечетные степени x и характеризуется собственным числом $\delta_3 = a_T^3 = -4,82938$. Итак, и строгий РГ анализ обнаруживает третье собственное число, превышающее по модулю единицу.

Тем не менее одномерные отображения будут демонстрировать двухпараметрический скейлинг. Это связано с существованием для одномерных отображений ситуации, когда один квадратичный экстремум отображается непосредственно в другой квадратичный экстремум. Покажем, что в этом случае третье собственное направление скейлинга «не включено».

Пусть функция $f(x)$ имеет два квадратичных экстремума в точках $x_1=0$ и $x_2=1$:

$$f'(0)=0, f'(1)=0, \quad (20)$$

причем $f(0)=1$. Пусть имеется малое возмущение этой функции

$$F(x)=f(x)+\varepsilon h(x). \quad (21)$$

Тогда двукратно выполненное отображение имеет структуру $F(F(x))=f(f(x))+\varepsilon H(x)$, где

$$H(x)=f'(f(x))h(x)+h(f(x)). \quad (22)$$

В силу соотношений (20), разложение в ряд и первого, и второго членов в формуле (22) начинается с x^2 . Члены первой степени x отсутствуют. Следовательно, собственная функция $H_3(x)$, содержащая линейные по x члены, не вносит вклада в эволюцию малого возмущения. Можно сказать, что одномерные отображения в ситуации «отображения экстремум в экстремум» характеризуются *скрытой симметрией*.

Но если мы имеем произвольную нелинейную систему, описываемую хотя бы двумерным отображением или дифференциальным уравнением, то для существования такой скрытой симметрии нет оснований. Действительно, для нелинейных систем общего вида невозможно точно определить экстремум в сечении Пуанкаре – соответствующее одномерное отображение работает всегда лишь приближенно. Поэтому можно утверждать следующее.

1. Трикритическое поведение является типичным в одномерных отображениях при двухпараметрическом анализе перехода к хаосу.

2. Для нелинейных систем общего вида трикритическая динамика имеет коразмерность три.

Мы в первый раз сталкиваемся с ситуацией, когда для разных классов нелинейных систем одно и тоже критическое состояние имеет разную коразмерность. В случае фейгенбаумовского критического поведения это не так – коразмерность всегда равна единице. Фейгенбаумовская универсальность является *асимптотически точной*, даже если портрет нелинейной системы в сечении Пуанкаре описывается одномерной функцией приближенно. Мы привыкли к этому факту и считаем его очевидной аксиомой, забывая, что применимость одномерного РГ уравнения Фейгенбаума к многомерным нелинейным системам и системам с непрерывным временем, требует специального обоснования (теорема, доказанная Collet, Eckmann, Koch в 1981 г. [17]). Как нетрудно понять, для трикритичности коразмерности два аналогичная теорема невозможна.

5. Примеры нелинейных систем, демонстрирующих трикритическую динамику

Обратимся теперь к примерам. Сначала рассмотрим **отображение окружности** (2), моделирующее синхронизацию автоколебаний при внешнем воздействии. На рис. 15 показана плоскость параметров Ω, K этого отображения. Можно видеть характерные языки синхронизации, соответствующие движениям с рациональным числом вращения $\omega = \lim (\varphi/n) = p/q$,

где p и q целые числа. На рис. 15, *a* показаны пять самых широких языков, которым отвечают числа вращения $\omega = 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1$, на рис. 15, *б* – в увеличенном виде язык синхронизации, отвечающий $\omega = 0$, а на рис. 15, *в* $\omega = 3/5$. На самом деле число языков бесконечно – из каждой рациональной точки оси Ω выходит соответствующий язык.

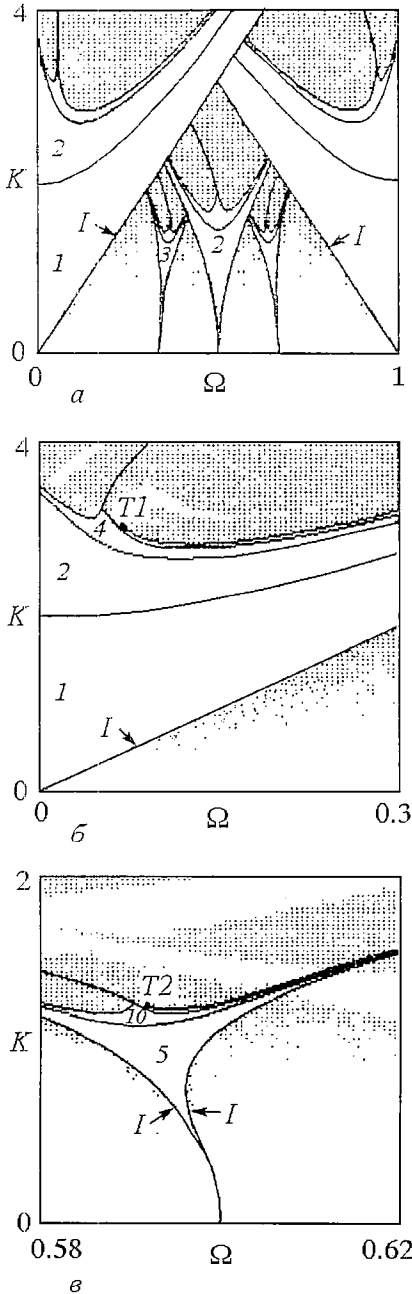


Рис. 15. (а) плоскость амплитуда воздействия K , частота воздействия Ω для отображения окружности, (б) и (в) – фрагменты плоскости параметров, T – трикритические точки, I – края языков синхронизации

Между языками реализуются режимы с иррациональными числами вращения. Внутри языков, как известно, наблюдается каскад удвоений периода [2]. Двухпараметрический анализ вскрывает более тонкую картину внутреннего устройства каждого языка (Schell, Fraser и Kapral, 1983 [3]). Характерны ситуации типа crossroad, можно выделить иерархию точек сборки, а фейгенбаумовские линии могут обрываться в трикритических точках. Трикритические точки, показанные на рисунке, имеют координаты T_1 : $\Omega = 0,0681926, K = 3,07470161$ и T_2 : $\Omega = 0,5924511, K = 1,2412698$.

Еще один пример – **система Chua** («double scroll» system). Это простое электронное устройство, содержащее линейные элементы: один резистор, одну индуктивность и две емкости, а также нелинейный элемент с кусочно-линейной вольтамперной характеристикой. Нелинейный элемент может быть сконструирован несколькими способами, например, из двух транзисторов и двух диодов. Система Chua хорошо изучена, для нее имеется как строгое математическое доказательство существования хаоса, так и экспериментальные и компьютерные результаты [11,18]. Она описывается системой трех дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \alpha(y-h(x)), \dot{y} = x-y+z, \dot{z} = -\beta y. \quad (23)$$

Здесь α, β – параметры, $h(x)$ – кусочно-линейная функция следующего вида:

$$h(x) = \begin{cases} (2x-3)/7, & x \geq 1, \\ x/7, & |x| \leq 1, \\ (2x+3)/7, & x \leq -1. \end{cases} \quad (24)$$

При некоторых предположениях система (24) приводит в сечении Пуанкаре приближенно, но с высокой точностью, к одномерному отображению (Chua map) [18]. Это одномерное

отображение получается лишь в неявной форме, но принципиальную роль играет сам факт его существования.

Варьируя параметры α, β , можно добиться реализации условия отображения экстремума в экстремум. Двигаясь вдоль соответствующих линий, мы приходим в трикритические точки. Укажем одну из них: $\alpha = 3,42646401, \beta = 4,11924613$. Трикритический аттрактор системы Чуа на диаграмме Ламерея показан на рис.16. Спектр колебаний в трикритической точке для системы Чуа представлен на рис. 8, справа. Вид спектра квартичного отображения и системы Чуа качественно совпадает, что свидетельствует в пользу гипотезы универсальности.

Еще один пример системы, демонстрирующей трикритическую динамику это **логистическое отображение под периодическим воздействием**. В случае периода два имеем

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2, \quad x_{n+2} = 1 - \mu x_{n+1}^2. \quad (25)$$

Выполним отображение (25) дважды:

$$x_{n+2} = 1 - \mu + 2\lambda\mu x_n^2 - \lambda^2\mu x_n^4. \quad (26)$$

Заменой переменной $X \rightarrow x(1-\mu)$ и параметров

$$a = -2(1-\mu)\lambda\mu, \quad b = \lambda^2\mu(1-\mu)^3, \quad (27)$$

соотношение (27) приводится к квартичному отображению. Поэтому трикритические точки можно найти с помощью простого пересчета. Например, трикритическая точка с координатами $(-2,81403, 1,40701)$ на плоскости a, b располагается на плоскости λ, μ в точке $(5,79372, 0,58455)$. В случае воздействий с другими периодами такая замена переменной и параметров, разумеется, не работает. Однако, трикритические точки по-прежнему существуют [19,20].

Поскольку логистическое отображение является эталонной моделью при описании перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения, то разумно ожидать, что трикритическая динамика может наблюдаться в любой нелинейной системе, демонстрирующей такой переход при наличии внешнего воздействия. Необходимо лишь, чтобы нелинейная система достаточно хорошо описывалась одномерным отображением. В качестве возможного варианта укажем систему **двух односторонне связанных возбуждаемых контуров с нелинейными диодами**. В каждом отдельном контуре наблюдается фейгенбаумовский каскад удвоений, причем в качестве параметра нелинейности выступает амплитуда возбуждения. Когда в первом контуре реализуется периодический режим, то на плоскости величина связи – параметр нелинейности второго контура Безручко и Пудовочкин [21] экспериментально обнаружили характерный «обрыв» фейгенбаумовской линии, являющейся границей хаоса. Отмечено, что окрестность точки «обрыва» характеризуется наличием жестких переходов.

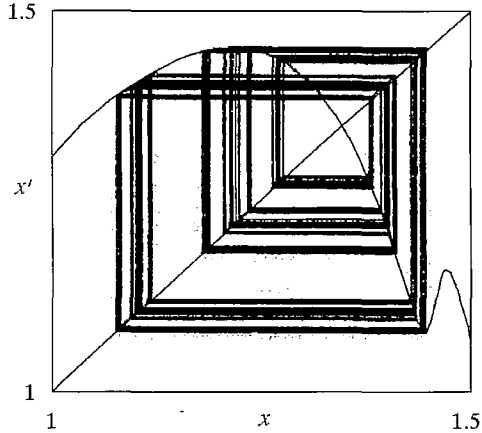


Рис. 16. Трикритический аттрактор системы Чуа на диаграмме Ламерея

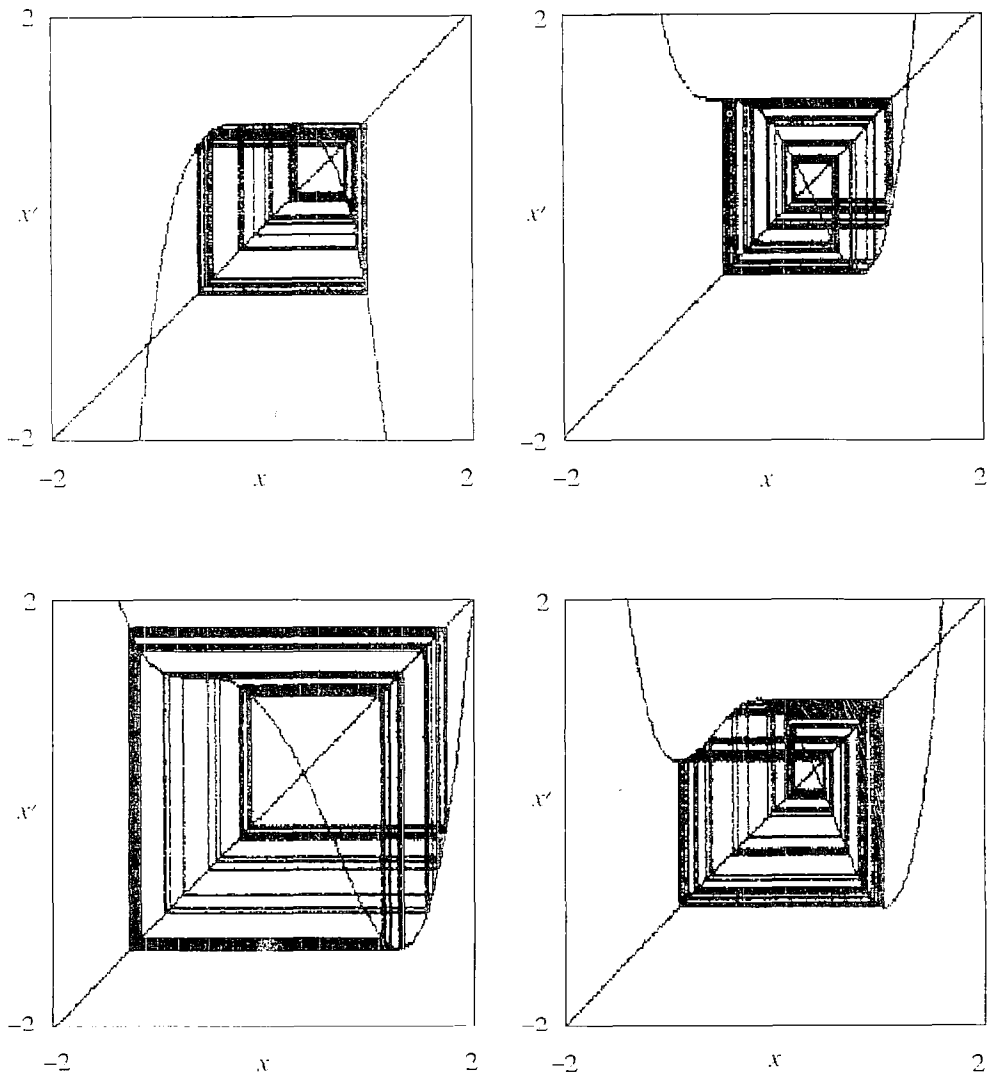


Рис. 17. Критические аттракторы, отвечающие четырем возможным критическим ситуациям коразмерности три, на диаграмме Ламерея

6. Заключение

Восходящая к А. Пуанкаре исследовательская программа теории бифуркаций и теории катастроф базируется на идее последовательного рассмотрения феноменов сначала низкой, а затем все более высокой коразмерности, и включает их классификацию и установление правил соподчинения – как вложены бифуркации (катастрофы) меньшей коразмерности в пространство параметров бифуркации (катастрофы) более высокой коразмерности. Можно развить аналогичный подход к проблеме перехода к хаосу в одномерных отображениях. Поскольку о динамике на пороге хаоса часто говорят как о критическом поведении нелинейных систем, данное направление исследований можно назвать *теорией многопараметрической критичности*. Феноменом

самой низкой коразмерности один является сценарий Фейгенбаума. Феноменом коразмерности два – трикритичность, которую открыли Chang, Wortis, Wright. Для трикритичности может быть построена вся «инфраструктура» иллюстраций, выработанная за 80-е годы применительно к фейгенбаумовскому сценарию.

Можно продолжить эту классификационную схему и ввести в рассмотрение ситуации критичности коразмерности три [22]. Мы не будем сейчас подробно излагать соответствующие результаты, но наметим принцип, по которому выделяются новые критические ситуации.

В пространстве трех параметров можно построить линии, на которых выполняются следующие условия:

- 1) функция $f(x)$ имеет экстремум четвертого порядка;
- 2) функция $f(x)$ имеет квадратичный экстремум и точку перегиба, в которой равны нулю и первая, и вторая производные, а экстремум отображается в точку перегиба;
- 3) ситуация, аналогичная случаю 3, но точка перегиба отображается в экстремум;
- 4) функция $f(x)$ имеет три квадратичных экстремума, причем первый экстремум отображается точно во второй, а второй в третий.

На рис. 17 показаны критические аттракторы на диаграмме Ламерея, отвечающие четырем описанным конфигурациям $f(x)$. Структура пространства параметров в окрестности новых критических точек очень сложна и ее полное исследование – дело будущего.

Интересно, что классификация «сценариев перехода к хаосу» по возрастающей коразмерности оказалась не тождественной для одномерных отображений с одной стороны, и для многомерных отображений и систем с непрерывным временем с другой. Только фейгенбаумовская ситуация является полностью общей. При многопараметрическом анализе для одномерных отображений характерна скрытая симметрия, из-за которой не все направления скейлинга «включены». Введение второго измерения в фазовом пространстве снимает вырождение. Простейшим примером может служить многопараметрическое отображение Хенона

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n^4 - cy_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (28)$$

При $b = 0$ оно превращается в стандартное отображение Хенона.

Каждая трикритическая точка этого отображения в пространстве параметров имеет еще и третье собственное направление, трансверсальное к плоскости a, b [23]. Таким образом, для многомерных отображений трикритичность – феномен коразмерности три. Проблема соотношения результатов, получаемых для одномерных отображений и реальных нелинейных систем нетривиальна и также еще ждет своего полного решения.

Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований России. Грант ФФИ 93-02-161169.

Библиографический список

1. Holmes P.J. A Nonlinear oscillator with a strange attractor // Philos. Trans. R. Soc. London, 1979. Vol. A292. P. 419.
2. Glass L., Peres R. Fine structure of phase locking. Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48. P. 1772.
3. Schell M., Fraser S., Kapral R. Subharmonic bifurcations in the sine map: an infinite of bifurcationst // Phys.Rev. 1983. Vol. A28, №1. P. 373.

4. *Fraser S., Kapral R.* Analysis of flow hysteresis by a one-dimensional map // *Phys. Rev.* 1982. Vol. A25. P. 3223–3233.
5. *Mackay R.S., Tresser C.* Some flesh on the bifurcation structure of bimodel maps // *Physica.* 1987. Vol. 27D. P. 412.
6. *Carcasses J., Mira C., Bosch M., Simo C., Tatjer J.C.* Crossroad area – spring area transition .1. Parameter plane representatio // *Int. J. Bifurc. & Chaos.* 1991. Vol.1. P. 183.
7. *Mira C., Carcasses J.* On the crossroad area – saddle area and spring area transition // *Int. J. Bifurc. & Chaos.* 1991. Vol. 1, № 3. P. 641.
8. *Шарковский А.М.* Существование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую // *Укр. мат. журнал.* 1964. Т. 26, № 1. С. 61.
9. *Chang S.J., Wortis M., Wright J.A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior. // *Phys. Rev.* 1981. Vol. A24, № 5. P. 2669.
10. *Стенли Х., Конильо А., Клейн У. и др.* Критические явления: прошлое, настоящее и будущее // *Синергетика / Под ред. Б.Б. Кадомцева. М.: Мир, 1984. С.41.*
11. *Komuro M., Tokunaga R., Matsumoto T., Chua L. O., Hotta A.* Global bifurcation analysis of the double scroll circuit // *Int. J. Bifurc. & Chaos.* 1991. № 1. P.139.
12. *Markus M.* Chaos in maps with continuous and discontinuous maxima // *Computers in Physics.* 1990. September/ October. P. 481.
13. *Feigenbaum M.J.* The transition to aperiodic behaviour in turbulent systems. *Comm. Math. Phys.* 1980. Vol. 77. P. 65.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. С. 173.
15. *Анищенко В.С.* Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. С. 312.
16. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть I. Сценарий Фейгенбаума // *Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика.* 1993. Т.1., № 1. С. 15.
17. *Collet P., Eckmann J. P., Koch H.* Period doubling bifurcations for families of maps on R_n . // *J. Stat. Phys.* 1981. Vol. 25. P. 1.
18. *Chua L., Komuro M., Matsumoto T.* The double scroll family, Parts I and II. // *IEEE Trans.* 1986. Vol. CAS–33, № 11. P. 1073.
19. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Критические явления в однонаправленно связанных системах Фейгенбаума // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* 1991. Т.34, № 4. С.357.
20. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R.* Bicritical dynamics of period-doubling systems with unidirectional coupling // *Int.J. of Bifurcation & Chaos.* 1991. Vol.1. № 4. P. 839.
21. *Безручко Б.П., Пудовочкин О. Б.* Колебания у порога хаоса в системе однонаправленно связанных нелинейных радиотехнических осцилляторов // *Изв. вузов. Сер. Радиофизика.* 1992. Т. 35, № 1. С. 39.
22. *Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Сатаев И.Р.* Мультипараметрическая критичность нелинейных систем. IX зимняя школа–семинар. Лекции по СВЧ электронике и радиофизике. Саратов: Государственный учебно–научный центр «Колледж», 1992. С. 241.
23. *Kuznetsov S.P.* Tricriticality in two-dimensional maps // *Phys.Lett.* 1992. Vol. A169, № 6. P. 438.

CRITICAL DYNAMICS FOR ONE-DIMENSIONAL MAPS. PART II. TWO-PARAMETRE TRANSITION TO CHAOS

A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev

Generalization of Feigenbaum's method is considered with respect to the two-parametre transition to chaos in one-dimensional maps. The approximate and exact renormalization group analyses are developed. Illustrations of scaling are presented and physical examples are discussed.



Александр Петрович Кузнецов. Родился в 1957 году. Окончил Саратовский государственный университет в 1980 году, затем работал на кафедре электроники. В 1986 году закончил аспирантуру на той же кафедре. В 1986 году защитил диссертацию и получил степень кандидата физико-математических наук. С 1988 года старший научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Специалист по нелинейной динамике, теории динамического хаоса и теории критических явлений. Опубликовал около 45 работ. В настоящее время занимается проблемой сценариев перехода к хаосу во многопараметрических нелинейных системах. С 1992 года преподает в Колледже прикладных наук Саратовского госуниверситета, с 1993 года – заместитель научного руководителя Колледжа по научно-методической работе.



Сергей Петрович Кузнецов. Родился в 1951 году. Окончил Саратовский государственный университет в 1973 году и затем работал в Научно-исследовательском институте механики и физики до 1988 года. В 1977 году закончил аспирантуру и получил степень кандидата физико-математических наук. В 1987 году получил степень доктора физико-математических наук. С 1988 года ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники РАН. Занимался микроволновой электроникой. С 1977 года основные исследования сосредоточены в области теории динамического хаоса. Первые публикации посвящены решеточным моделям распределенных сред, для которых удалось развить ренормгрупповой анализ, включающий и пространственную переменную. Автор свыше 100 публикаций. Один из соавторов монографии «Theory and Applications of Coupled Map Latches», изданной под редакцией проф. Канеко. В 1993 работал в Калифорнийском университете в Электронной инженерной лаборатории у профессора Леона Чуа. С 1992 года – профессор Саратовского госуниверситета. В настоящее время развивает ренормгрупповой подход, включая анализ ситуаций сложной ренормдинамики, применительно к фундаментальным проблемам динамического хаоса.



Игорь Рустамович Сатаев – родился в 1959 году. Окончил в 1982 году Московский физико-технический институт. Занимался проблемами лазерной физики. С 1988 года работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники РАН, научный сотрудник. Основные интересы – методы решения ренормгрупповых уравнений, компьютерное моделирование скейлинга на пороге хаоса. Имеет 15 публикаций.