



## ПРОСТЕЙШАЯ МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ ОБЩЕСТВА

*В.И.Климов, П.С.Ланда*

Рассмотрена простейшая динамическая модель развития человеческого общества, описывающая поведение трех компонент: производителей, управленцев и накопленного продукта. Модель позволяет качественно объяснить как смену различных формаций, так и кризисные явления, наблюдавшиеся в обществе. Показано, что основным параметром, определяющим характер экономического развития, является конкуренция между управленцами. При малой конкуренции путь развития общества является тупиковым, а при достаточно большой – прогрессивным.

В последние годы появилось множество динамических моделей экономических явлений [1–4]. Большинство из них касается конкретных экономических процессов, например, инновационных. В 1990 г. Ю.И.Неймарком была предложена простейшая общая математическая модель, позволяющая объяснить принципиальные закономерности экономического развития человеческого общества [5,6]. Эта модель является агрегированной и имеет тот же тип, что и различные модели «хищник–жертва», широко используемые в биологии и экологии. Она упрощенно описывает взаимодействие двух категорий людей, участвующих в производстве, – производителей (при определенном выборе переменных данная величина задается функцией  $x(t)$ ) и управленцев (функцией  $-y(t)$ ) с производимым ими продуктом (функцией  $z(t)$ ). Уравнения модели можно записать в виде

$$\dot{x} = (1 - x - y + z)x, \quad \dot{y} = \alpha(-b - cy + z)y, \quad (1)$$

$$\dot{z} = \begin{cases} F & \text{при } z > 0 \text{ и при } z = 0, F > 0, \\ 0 & \text{при } z = 0, F < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $F = g \frac{1 + \varepsilon_1 y}{1 + \varepsilon_2 y} \frac{x}{1 + \beta z} - ex - fy$ .

Параметр  $g$  в правой части уравнения (2) характеризует уровень технологии общества, а функция  $f(y) = (1 + \varepsilon_1 y)/(1 + \varepsilon_2 y)$ , изменяющаяся в пределах от 1 до  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ , учитывает зависимость производства продукта от количества управленцев (при  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  функция  $F(y)$  возрастает с ростом  $y$ ). Параметр  $\beta$  характеризует тот

факт, что производство продукта затрудняется при увеличении количества самого продукта, в частности, из-за ограниченности сырья. Члены  $-ex$  и  $-fy$  в уравнении (2) описывают потребление продукта производителями и управленцами. В уравнениях (1) член  $(1+z)x$  характеризует рост количества производителей  $x$  за счет пополнения из числа других категорий населения, причем учитывается, что скорость роста возрастает при увеличении количества продукта  $z$ . Члены  $-x^2$  и  $-ux$  характеризуют уменьшение количества производителей за счет конкуренции между ними и влияния управленцев соответственно. Член  $\alpha(z-b)y$  во втором уравнении описывает изменение числа управленцев  $y$  в зависимости от количества продукта: если продукта много, число управленцев растет, если мало — уменьшается. Член  $-\alpha cy^2$  характеризует уменьшение числа управленцев за счет конкуренции между ними.

Нам представляется, что модель (1), (2) обладает следующими недостатками. Во-первых, во втором уравнении (1) не учтен член, характеризующий переход производителей в управленцы за счет, например, обучения. Этот член можно записать в виде  $\alpha dx y$ . Во-вторых, в третьем уравнении члены, описывающие потребление продукта, не зависят от количества продукта  $z$ , тогда как очевидно, что такая зависимость существует. В простейшем виде, с учетом насыщения потребления, эту зависимость можно характеризовать функцией, аналогичной  $f(y)$ . Наконец, в уравнении (2) не учтено потребление продукта другими категориями населения. Принимая все это во внимание, можно записать следующие модифицированные уравнения модели:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - x - y + z)x, & \dot{y} &= \alpha(-b + dx - cy + z)y, \\ \dot{z} &= \begin{cases} F & \text{при } z > 0 \text{ и при } z = 0, F > 0 \\ 0 & \text{при } z = 0, F < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

где 
$$F = g \frac{1 + \varepsilon_1 y}{1 + \varepsilon_2 y} \frac{x}{1 + \beta z} - (ex + fy + \gamma) \frac{1 + \delta_1 z}{1 + \delta_2 z}.$$

Очевидно, что потребление продукта должно расти с ростом количества продукта. Это будет происходить, если  $\delta_1 > \delta_2$ .

В зависимости от параметров уравнения (3) имеют разное число особых точек, характеризующих стационарное состояние общества. Первая особая точка расположена в начале координат и всегда неустойчива. Вторая особая точка, имеющая координаты  $x = 1, y = 0, z = 0$ , существует только при низком уровне технологии, когда  $g \leq g^* = e + \gamma$ , и устойчива, если  $b \geq d$ . В данном случае управленцы и накопленный продукт отсутствуют — все, что производится, потребляется. Кроме этой особой точки могут существовать и другие особые точки. Точки одной группы имеют координаты  $x = 1 + z, y = 0$ , где  $z$  — неотрицательные корни уравнения

$$\begin{aligned} \beta e \delta_1 z^3 + \{\beta[e + \delta_1(\gamma + e)] + e \delta_1 - g \delta_2\} z^2 + [(\beta + \delta_1)(\gamma + e) + e - g(\delta_2 + 1)] z + \\ + g^* - g = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия устойчивости этих особых точек имеют вид

$$z \leq \frac{b - d}{1 + d},$$

$$g \leq \frac{(1 + \beta z)^2}{1 - \beta} \left( e \frac{1 + \delta_1 z}{1 + \delta_2 z} + (e + \gamma + ez) \frac{\delta_1 - \delta_2}{(1 + \delta_2 z)^2} \right). \quad (5)$$

Данным условиям может удовлетворять лишь один из корней уравнения (4). Заметим, что неустойчивость особых точек этой группы является аperiodической.

Устойчивая особая точка рассматриваемой группы соответствует второму этапу развития человеческого общества, когда накопленный продукт имеется, но его недостаточно, чтобы “прокормить” управленцев.

Наконец, при достаточно больших значениях  $g$  возможна еще одна группа особых точек, определяемых уравнениями

$$x = \frac{(c-1)y + b + 1}{1 + d}, \quad z = \frac{(c + d)y + b - d}{1 + d}, \quad (6)$$

$$g = \frac{1 + \varepsilon_1 y}{1 + \varepsilon_2 y} \frac{x}{1 + \beta z} = (ex + fy + \gamma) \frac{1 + \delta_1 z}{1 + \delta_2 z}. \quad (7)$$

Отметим, что в одном из решений уравнений (6) и (7) величина  $y$  переходит через нуль при  $g = g_{cr}$ , где

$$g_{cr} = \frac{[\gamma(1 + d) + e(b+1)][1 + d + \delta_1(b - d)][1 + d + \beta(b - d)]}{(1 + d)(b + 1) [1 + d + \delta_2(b - d)]}. \quad (8)$$

Этому значению  $g$  соответствует граница устойчивости решения уравнения (4), т.е.  $z = (b - d)/(1 + d)$ .

В отличие от других особые точки этой группы могут быть неустойчивы как аperiodически, так и колебательно. Согласно критерию Рауса – Гурвица условие аperiodической неустойчивости имеет вид

$$a_3 = \alpha \nu y [(c-1)b_1 + (d + 1)b_2 + (c + d)b_3] < 0, \quad (9)$$

где 
$$b_1 = e \frac{1 + \delta_1 z}{1 + \delta_2 z} - \frac{g}{1 + \beta z} \frac{1 + \varepsilon_1 y}{1 + \varepsilon_2 y},$$

$$b_2 = f \frac{1 + \delta_1 z}{1 + \delta_2 z} - \frac{g(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)x}{(1 + \beta z)(1 + \varepsilon_2 y)^2},$$

$$b_3 = \frac{\beta g x}{(1 + \beta z)^2} \frac{1 + \varepsilon_1 y}{1 + \varepsilon_2 y} + \frac{\delta_1 - \delta_2}{(1 + \delta_2 z)^2} (ex + fy + \gamma),$$

а условие колебательной неустойчивости следующее:

$$a_1 a_2 - a_3 < 0, \quad (10)$$

где  $a_1 = x + \alpha \nu y + b_3$ ,  $a_2 = \alpha \nu x y + (x + \alpha \nu y)b_3 + x b_1 + \alpha d x y + \alpha \nu b_2$ .

Это условие удобно записать в виде неравенства

$$\alpha < \alpha_{cr}. \quad (11)$$

Особые точки последней группы соответствуют развитому обществу со сравнительно высоким уровнем технологии. Возникновение колебательной неустойчивости означает возможность рождения вокруг соответствующей особой точки устойчивого предельного цикла, что может имитировать кризисные явления в обществе, т.е. периодически повторяющиеся подъемы и спады экономического развития. Отметим, что область колебательной неустойчивости существенно зависит от параметра  $c$ , характеризующего конкуренцию управленцев: она тем меньше, чем больше  $c$ .

Рассмотрим, как ведут себя координаты рассмотренных особых точек при стремлении уровня технологии  $g$  к бесконечности. Нетрудно показать, что характер их поведения существенно зависит от параметра  $c$ . Если  $c < 1$ , т.е. конкуренция управленцев мала, то при  $g \Rightarrow \infty$  количество продукта и число управленцев стремятся к конечным значениям ( $z \Rightarrow \frac{b+c}{1-c}$ ,  $y \Rightarrow \frac{b+1}{1-c}$ ), а

количество производителей  $x$  стремится к нулю (при очень высоком уровне технологии для производства конечного количества продукта требуется очень мало производителей). Такой путь развития общества, безусловно, является тупиковым. Если же  $c > 1$ , то при увеличении уровня технологии  $g$  количество продукта (как и числа производителей и управленцев) неограниченно увеличивается тем быстрее, чем больше отношение  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  и меньше  $-\delta_1/\delta_2$ . При этом из формул (6), (7) следует, что

$$x = \frac{c-1}{1+d}y, \quad z = \frac{c+d}{1+d}y, \quad y = \frac{\varepsilon_1\delta_2}{\beta\varepsilon_2\delta_1} \frac{(c-1)(1+d)g}{(c+d)(e(c-1)+f(1+d))}.$$

Очевидно, что такой путь развития общества является прогрессивным.

В качестве иллюстрации на рис. 1 показаны зависимости координат особых точек от уровня технологии  $g$  для параметров  $b=2$ ,  $d=e=f=\gamma=1$ ,  $\beta=0.1$ ,  $\varepsilon_1=10$ ,  $\varepsilon_2=1$ ,  $\delta_1=10$ ,  $\delta_2=1$ ,  $c=0.5$  и  $c=2$ . При этих значениях параметров  $g^*=2$ ,  $g_{cr}=7$ . В области  $g^* < g_1 < g < g_{cr}$ , где  $g_1$  – некоторое значение  $g$ , слабо зависящее от параметра  $c$ , исходные уравнения имеют три состояния равновесия, одно из которых ( $c \ y = 0$ ) всегда устойчиво, второе – неустойчиво, а третье, в зависимости от параметра  $\alpha$ , может быть как устойчивым, так и неустойчивым, причем неустойчивость является колебательной.

Условие неустойчивости имеет вид (11), где  $\alpha_{cr}$  зависит от параметров  $c$  и  $g$  (при фиксированных значениях остальных параметров). Зависимости  $\alpha_{cr}$  от  $g$  для  $c=0.5$  и  $c=2$  показаны на рис. 2. Видно, что величина  $\alpha_{cr}$  для  $c=0.5$  существенно больше, чем для  $c=2$ . С увеличением уровня технологии  $g$  значение  $\alpha_{cr}$  при  $c=0.5$  стремится к конечному значению, тогда как при  $c=2$  оно уменьшается до нуля. Это значит, что во втором случае развитие общества стабилизируется, начиная с некоторого значения  $g$ . Для достаточно малых значений параметра  $g$  вблизи границы устойчивости (при  $\alpha < \alpha_{cr}$ ) колебания  $x$ ,  $y$ ,  $z$  по форме близки к гармоническим. С удалением от границы форма колебаний сильно искажается: они

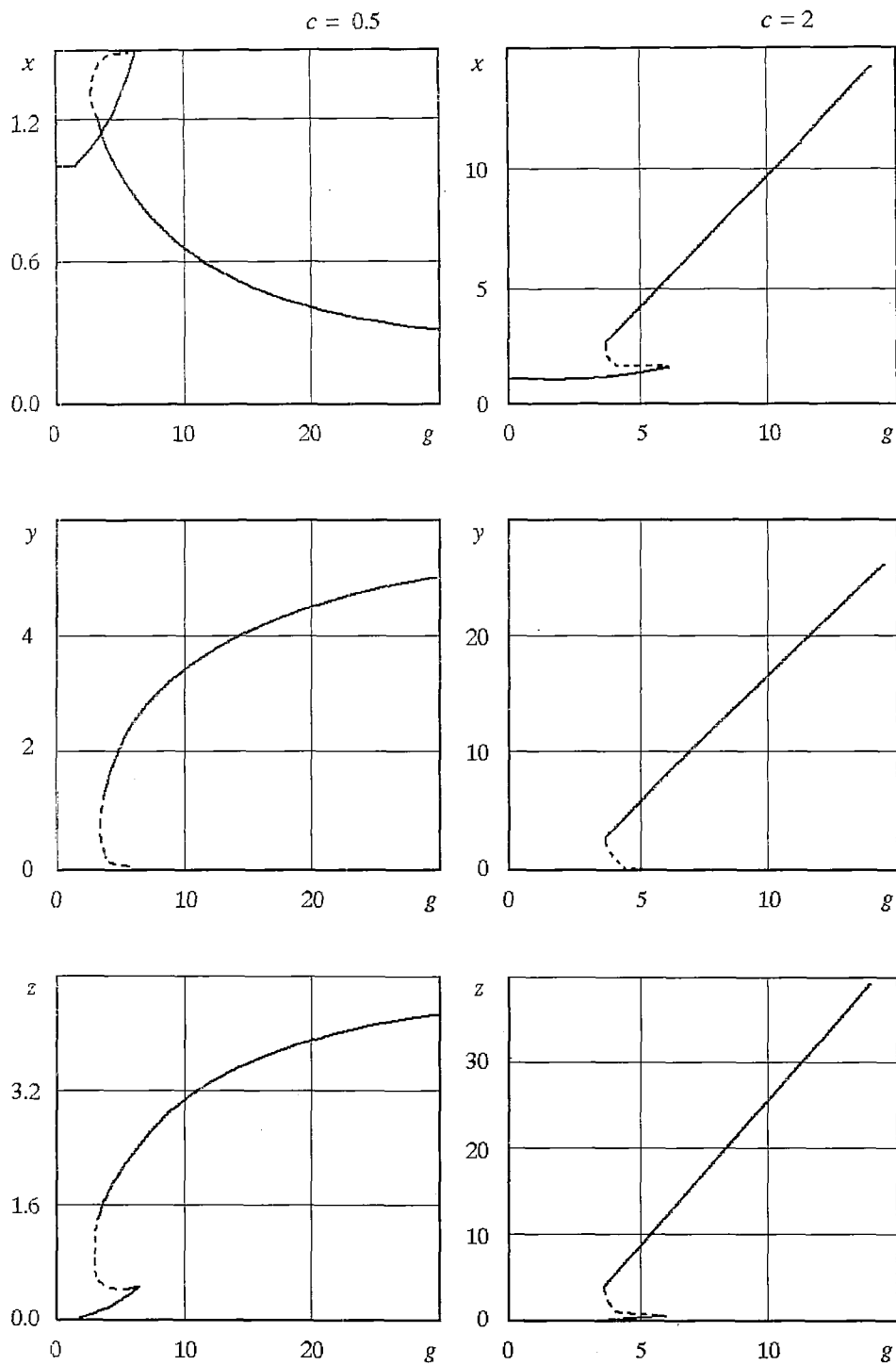


Рис. 1. Зависимости координат особых точек  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно от уровня технологии  $g$

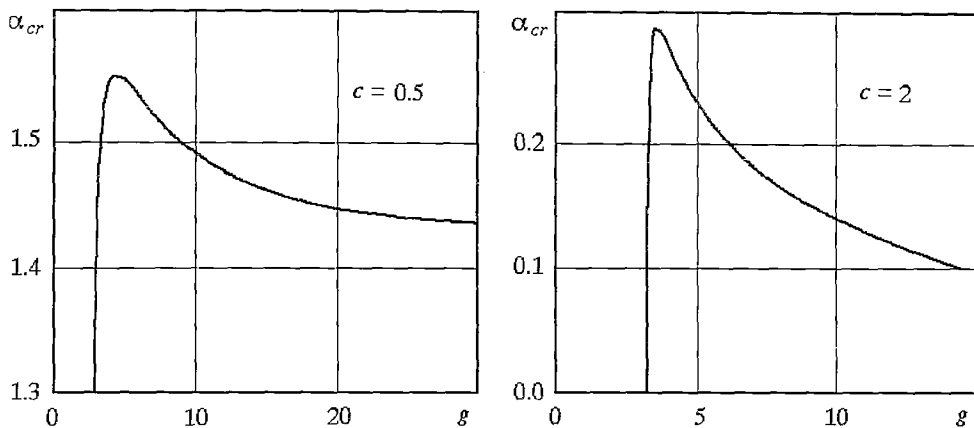


Рис. 2. Зависимости  $\alpha_{cr}$  от уровня технологии  $g$

приобретают импульсный характер. В данном случае период колебаний существенно увеличивается. Изменение формы колебаний при уменьшении  $\alpha$  и фиксированном значении  $g$  продемонстрировано на рис. 3 для  $c = 2$ . При увеличении  $g$  и фиксированном значении  $\alpha$  колебания приобретают вид все более острых импульсов (рис. 4, а, б). Это связано с тем, что при переходе через границу устойчивости  $\alpha(g)$  возбуждение колебаний является жестким. Действительно, для параметров  $\alpha = 0.1$ ,  $g = 15$ ,  $c = 2$  состояние равновесия является устойчивым (см.рис.2). В то же время устойчивым является предельный цикл, соответствующий импульсной форме колебаний.

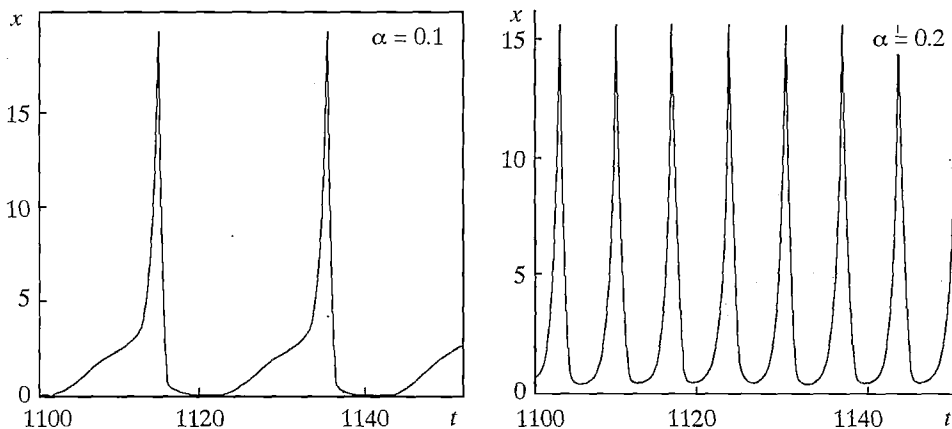
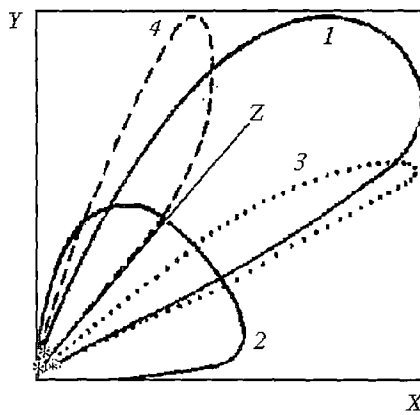
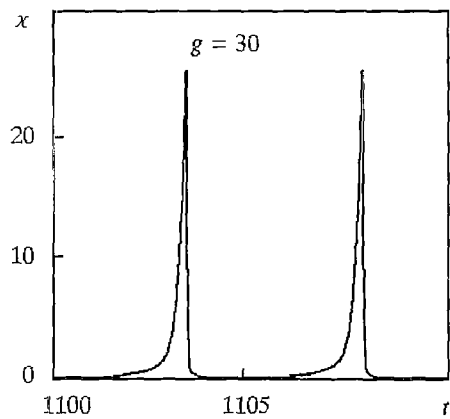
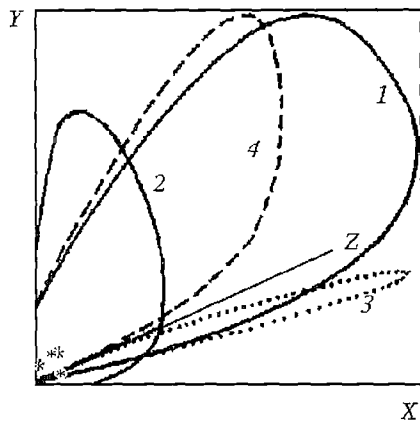
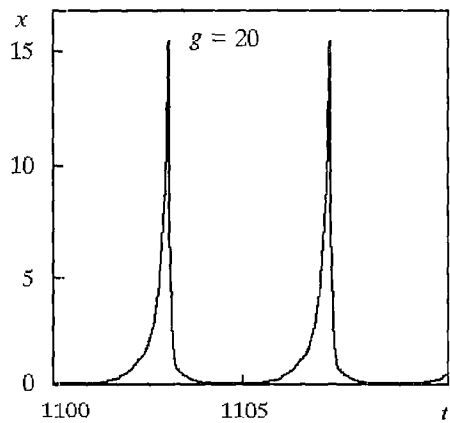
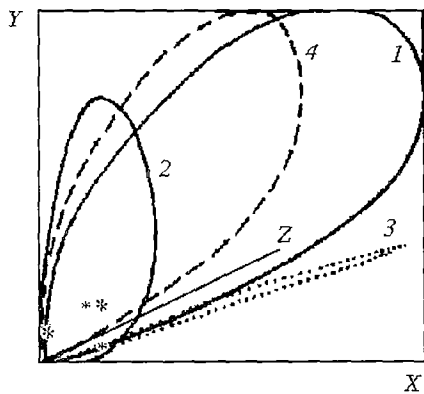
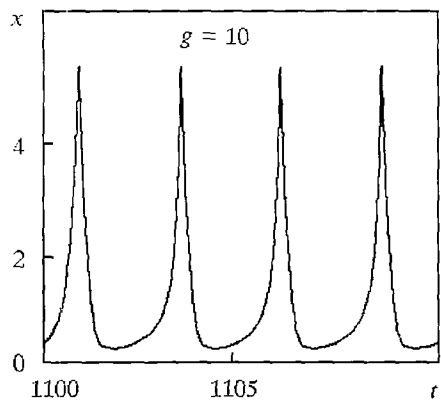
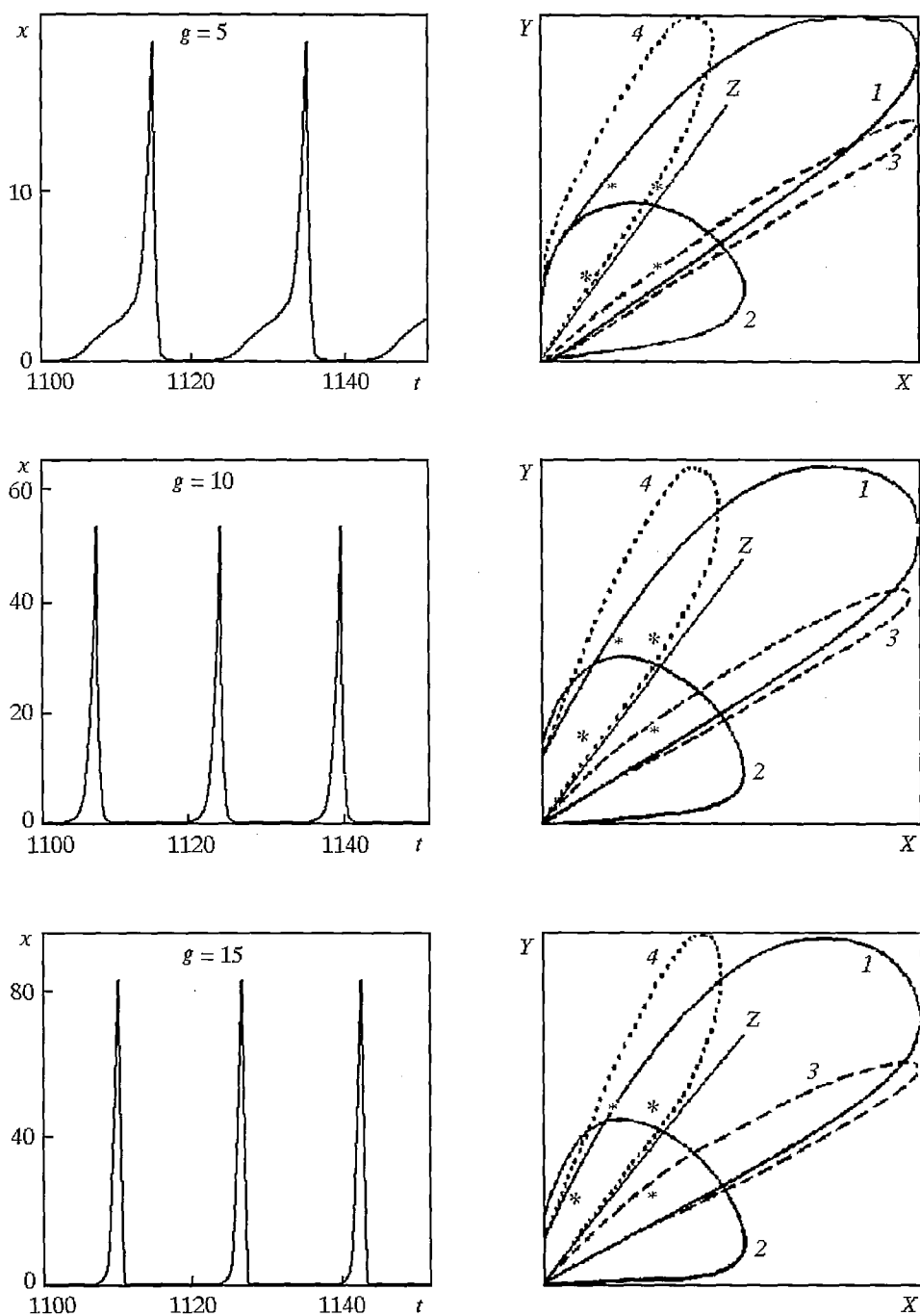


Рис. 3. Форма колебаний координаты  $x(t)$  при  $g = 5$  и  $c = 2$



a



б

Рис. 4. Зависимости формы колебаний и предельных циклов от параметра  $g$  при фиксированных  $c$  и  $\alpha$ :  $a - c = 0.5$ ,  $\alpha = 1.4$ ;  $b - c = 2$ ,  $\alpha = 0.1$ ; 1 – аксонометрическая проекция предельного цикла, 2, 3, 4 – проекции на плоскость  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  соответственно. Звездочки означают расположение особых точек в соответствующих плоскостях



## Библиографический список

1. Lorenz H.W. // Lecture Notes in Economics and Mathem. Systems. Springer-Verlag, 1989. № 334.
2. McMahon F. Chaos models in economics: review, theory and evidence. Preprint of Department of Economics. McGill University. Montreal, 1990.
3. Pui T. Nonlinear Economic Dynamics. Springier-Verlag, 1990.
4. Wei-Bin Zhang. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Springier-Verlag, 1991.
5. Неймарк Ю.И. Математическая модель производительности-продукт управления // Динамика систем: Динамика, стохастичность, бифуркации. 1990. С.84.
6. Неймарк Ю.И. Простые математические модели // Природа. 1990. Т.11.С.9.

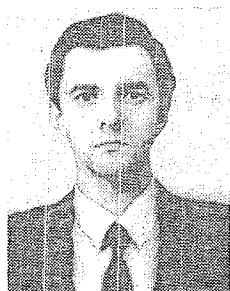
Институт общей физики РАН  
Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию 16.11.92  
после переработки 20.02.93

## THE SIMPLEST DYNAMICAL MODEL OF SOCIAL ECONOMIC PROGRESS

*I.V. Klimov, P.S. Landa*

The simplest model of social economic progress is considered. This model describes interaction between two people categories, participating in production, and product produced and accumulated by them. These people categories are producers and managers. The model permits to explain qualitatively both the replacement of social structures and economic crisis phenomena. It is shown that the mutual competition between the managers is the main parametre determining the character of social economic progress. If the competition is small the way of economic progress will lead to a deadlock. Otherwise, the way of economic development is progressive, i.e. more preferable.



*Климов Владимир Иванович* – родился в 1955 г. в Златоусте Челябинской области, окончил физический факультет МГУ в 1979 г. С 1979 по 1987 работал в Физико-энергетическом институте в Обнинске, с 1987 в Институте общей физики РАН. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в ЛГУ (1985) в области нерелятивистской квантовой механики двух- и трехчастичных резонансов. Научный сотрудник ИОФ РАН. Область научных интересов – нерелятивистская квантовая теория двух- и трехчастичных резонансов, теория пучковой и лазерной плазмы, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор более сорока научных статей по указанным выше направлениям.



*Ланда Полина Соломоновна* – родилась в 1931 г. в Киеве, окончила физический факультет МГУ в 1953 г. С 1956 г. работает на физическом факультете МГУ. Защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в МГУ (1959) и доктора физико-математических наук в Горьковском госуниверситете (1972) в области теории колебаний и волн. Ведущий научный сотрудник МГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, радиофизика, применение методов нелинейной динамики в различных областях науки. Автор и соавтор четырех монографий по колебаниям и волнам, в том числе монографии «Стохастические и хаотические колебания». Опубликовала много научных статей по направлениям, указанным выше. Член редакционной коллегии журналов «Chaos, Solitons and Fractals» и «Прикладная нелинейная динамика».



## СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АКТИВНОСТЬ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО МОЗГА

*В.С.Анищенко, Д.Э.Постнов*

Предложен новый метод численной обработки сигналов электроэнцефалограммы, основанный на явлении хаотической синхронизации. Введена количественная мера синхронизации хаотических сигналов, рассчитываемая из степени неравномерности двумерного распределения взаимного фазового сдвига. Показано, что предлагаемый метод применим как для анализа режима функционирования мозга, так и в целях диагностики патологий. Установлено различие в реакции правого и левого полушарий на заданную ментальную нагрузку.

### Введение

По мере развития как синергетики в целом, так и знаний о динамическом хаосе в частности, исследователи стали активнее использовать методы нелинейной динамики в изучении сложных автоколебательных процессов в реальных системах и объектах окружающего нас мира. Одним, может быть, из самых загадочных таких объектов является человеческий мозг. Взгляду экспериментатора он представляется в виде распределенной автоволновой среды, генерирующей хаотические во времени потенциалы по всей своей поверхности. Попытаться найти некоторые закономерности или, возможно, элементы самоорганизации в работе мозга – интереснейшая задача.

Среди работ, посвященных исследованию электроэнцефалограмм (ЭЭГ) с позиций нелинейной динамики, можно выделить, например, широко известные работы А. Vabloyantz с соавторами [1–3], где анализируется размерность колебаний ЭЭГ в различных состояниях мозга человека (сон, приступ эпилепсии и т.д.). Другое направление – пространственно–временной анализ  $\alpha$ -ритма ЭЭГ – в основном представлено работами Н. Naken, R. Friedich, A. Fuch [4,5].

В данной статье мы пытаемся проанализировать работу человеческого мозга с позиций синхронизации хаотических колебаний. Ниже мы обоснуем применение для исследований количественной меры синхронизации хаоса, построим на ее базе так называемый профиль правого и левого полушария и проиллюстрируем некоторые экспериментальные факты.

### 1. Метод

Неоднозначность в понимании термина «синхронизация хаоса» (СХ) сложилась исторически. Различные подходы к проблеме порождали и различные определения [6–13]. В качестве явления СХ разумно понимать сложный и многоэтапный процесс эволюции режимов колебаний, когда при изменении управляющего параметра количественная мера степени различия двух хаотических

сигналов уменьшается. В предельном случае идеальной СХ наблюдается эффект полной идентичности двух хаотических сигналов. В [14] нами был предложен, а в [12,13] применен к несложным радиофизическим моделям способ изучения синхронизации хаотических колебаний, основанный на статистическом анализе плотности распределения разности фазовых спектров двух хаотических сигналов (ПРФС). Результатом вычислений являются диаграммы ПРФС [14]. По структуре ПРФС можно судить о степени и характере взаимосвязи двух хаотических процессов. На рис. 1 приведен типичный вид диаграмм ПРФС для случая невязанных (*а*) и существенно синхронизированных (*б*) хаотических сигналов двух связанных генераторов с инерционной нелинейностью. Очевидно, переход от (*а*) к (*б*) можно рассматривать как некий процесс самоорганизации, что наводит на мысль о введении количественного параметра, характеризующего степень сложности структур на диаграмме. С другой стороны, задачи обработки сигналов ЭЭГ настоятельно требуют возможности количественной оценки и сравнения степени хаотической синхронизации.

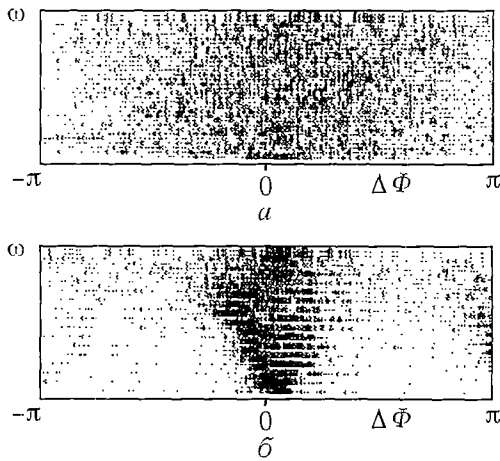


Рис. 1. Типичная форма диаграммы ПРФС для случая невязанных (*а*) и существенно синхронизированных (*б*) хаотических сигналов

В качестве количественной меры синхронизации хаоса мы предлагаем величину, определяемую энтропией ПРФС. На горизонтальной оси диаграммы ПРФС откладываются значения взаимного сдвига фаз колебаний, вертикальная ось соответствует отсчетам частоты фазового спектра. В процессе измерения обрабатывается  $N_{sp}$  последовательно отсчитанных отрезков пары временных реализаций. Для каждого отрезка рассчитывается разность фазовых спектров. Таким образом определяется величина  $F(\Delta\Phi, \omega)$ , соответствующая вероятности обнаружения сдвига фаз  $\Delta\Phi$  на частоте  $\omega$ . Яркость (сгущение точек) на диаграмме прямо пропорциональна величине вероятности  $P(\Delta\Phi, \omega)$ . По каждой из частот спектра диаграммы

ПРФС имеется одномерное распределение плотности вероятности фазового сдвига, неравномерность которого прямо связана с характером структуры на диаграмме. Эту неравномерность в целом по диаграмме можно охарактеризовать следующим образом.

Пусть в дискретном варианте диаграмма содержит  $N$  ячеек по горизонтали (сдвиг фаз) и  $M$  ячеек по вертикали (число отсчетов спектра). Распределение  $P(\Delta\Phi, \omega)$  при этом переходит в двумерную гистограмму  $P(i, j)$ . Тогда вероятность попадания в ячейку  $(i, j)$  есть

$$p(i, j) = \frac{P(i, j)}{MN_{sp}}, \quad (1)$$

где  $i = 1 \dots N$ ,  $j = 1 \dots M$ , а  $N_{sp}$  – число рассчитанных Фурье-спектров (число точек в одном сечении по  $j$ ).

В данном случае энтропия дискретного источника

$$S = - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N p(i, j) \ln p(i, j). \quad (2)$$

$S$  может быть использована как количественная характеристика степени неравномерности (случайности) диаграммы ПРФС. Однако с ее помощью затруднительно в целом по диаграмме и по ее части сравнить степень синхронности, которая определяется нормировкой  $p(i,j)$ . Чтобы избежать этого, нормируем величину под логарифмом:

$$S_M = - \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N p(i,j) \ln \{ Mp(i,j) \}. \quad (3)$$

Величина  $S_M$  имеет теперь смысл усредненной по частотам энтропии. Действительно, энтропия одномерного распределения сдвига фаз при  $j=j_0$ :

$$S_{j_0} = - \sum_{i=1}^N \frac{P(i,j_0)}{N_{sp}} \ln \left( \frac{P(i,j_0)}{N_{sp}} \right) = - \sum_{i=1}^N Mp(i,j_0) \ln \{ Mp(i,j_0) \}. \quad (4)$$

Усредняя (4) по  $M$  частотам и внося множитель под знак суммы, получим (3).

Как показали результаты расчета величины значения  $S_M$ , ее применение не всегда удобно для обработки имеющихся экспериментальных данных. Причина тому – сильно нелинейный характер зависимости  $S_M$  от степени проявления эффекта синхронизации хаоса. В тестовом эксперименте (см. ниже) степень СХ оценивалась как доля синхронной компоненты в двух хаотических сигналах.

Для проведения измерений оказалось удобным сконструировать на базе  $S_M$

$$S_2 = \{1 - (S_M / S_{Mmax})^4\} 100$$

Величина  $S_2$  характеризуется близкой к линейной зависимостью от степени СХ в экспериментах. Значение  $S_2 = 100$  ( $S_M = 0$ ) соответствует полной синхронизации хаоса, а при  $S_2 = 0$  ( $S_M = S_M \max$ ) отвечает случаю, когда хаотическая синхронизация не имеет места.

Следует отметить, что если введение величины  $S_M$  отражает некий принципиальный подход к исследованию синхронизации хаотических колебаний, то  $S_2$  носит смысл вспомогательного параметра, удобного при данных конкретных исследованиях. В дальнейшем авторы оставляют за собой право совершенствовать способ количественной оценки степени синхронизации хаоса, сохраняя идеологию описанного выше подхода.

Первоначально метод ПРФС был применен к исследованию динамики радиотехнической системы (двух связанных генераторов с инерционной нелинейностью). Полученные результаты не только показали правомерность использования метода, но также позволили вскрыть ряд закономерностей синхронизации хаотических колебаний для систем небольшой размерности. Приведенные на рис. 1 диаграммы ПРФС отражают случай как невзаимсвязанных, так и синхронизованных хаотических колебаний двух генераторов с инерционной нелинейностью. Основные результаты проведенных исследований опубликованы в [12,13].

Так как сама методика получения диаграмм ПРФС, так и метод количественной оценки степени синхронизации хаоса не связаны с происхождением и природой исследуемых сигналов, представляется вполне разумным использовать данный подход для исследования произвольных сигналов. В противовес описанному выше примеру взаимодействия колебаний динамического происхождения, рассмотрим пример, когда определенная степень взаимосвязи имеется между двумя «истинно» хаотическими сигналами. На рис. 2 приведены результаты тестового эксперимента, где в качестве двух хаотических сигналов использовался один и тот же хаотический процесс с добавлением

определенной части некоррелированной компоненты в каждый канал. Рассматривались случаи аддитивного (кривая 1) и мультипликативного (кривая 2) введения несинхронной компоненты. Из рисунка видно, что предположенные характеристики имеют близкую к линейной зависимость от доли несинхронной компоненты в сравниваемых сигналах и определен-ный порог чувствительности (60–70% несинхронной компоненты).

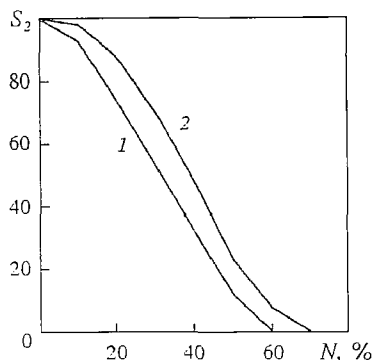


Рис. 2. Результаты тестового эксперимента, где  $n$  – доля несинхронной компоненты в каждом из хаотических сигналов

## 2. СХ–профиль ЭЭГ полушарий

Предметом обсуждения этого раздела будут следующие вопросы.

1. Имеются ли значимые (т.е. уверенно измеряемые в эксперименте) СХ–связи между различными областями полушарий мозга?
2. Если да, носят ли они межполушарный или внутримушарный характер?
3. Возможно ли выделение типичного образца распределения свойств хаотической синхронизации по поверхности мозга?

Сделаем важное замечание: в силу недостаточного количества проведенных диагностических экспериментов не все представленные в этом и последующих разделах уверенно фиксируемые результаты являются установленными медицинскими фактами. Они призваны лишь проиллюстрировать возможности предлагаемой методики и очертить перспективные направления дальнейших исследований.

Не вызывает сомнений, что каждая измеряемая в эксперименте величина связана с особенностями режима функционирования организма. Иной вопрос, на каком уровне мы в состоянии контролировать режим работы мозга. Именно этот факт определяет границу достоверности экспериментов. В соответствии с этим нашей целью является поиск таких характеристик, которые были бы устойчивы во времени при неизменном, с нашей точки зрения, состоянии организма. В то же время, эти характеристики должны достоверно отличаться количественно, если речь идет о сравнении двух различных режимов функционирования организма.

На рис. 3 приведены временные зависимости параметра  $S_2$  для группы испытуемых. Сигналы ЭЭГ снимались с симметрично расположенных точек на правом и левом полушариях. Хотя условия эксперимента оставались неизменными (свет выключен, глаза испытуемого закрыты), для всей группы испытуемых параметр  $S_2$  не оставался сколько – нибудь постоянным. По–видимому, здесь находят свое отражение сложные процессы вовлечения различных областей мозга в мыслительный процесс. Иначе вели себя в этом случае статистические характеристики, например, нормированная разность энтропий по распределению (или по спектру) сигнала ЭЭГ. Указанная разность во всех случаях составляла 2–4% от среднего значения, являя собой пример малочувствительной к изменению состояния мозга характеристики.

Анализ более 160 парных ЭЭГ (с симметричных точек левого и правого

полушария) не позволил выделить признаки, однозначно реагирующие на состояние либо на режим функционирования головного мозга.

Качественно иные результаты дает подход, при котором поиск взаимосвязей ведется в пределах каждого полушария по отдельности. Обратимся к рис. 4, где приведен вариант стандартного расположения электродов на голове (по 8 на каждое полушарие). Сделаем одновременную запись сигналов ЭЭГ со всех точек одного полушария. Это позволит задать симметричную матрицу, содержащую все

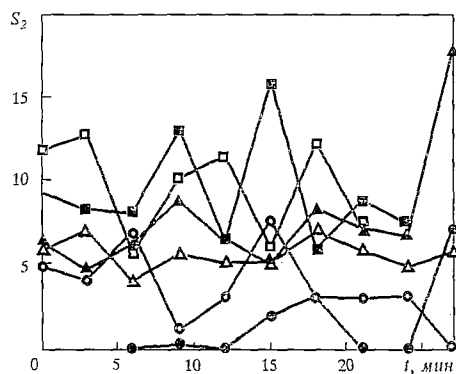


Рис. 3. Поведение во времени параметра  $S_2$  для группы из 6 испытуемых

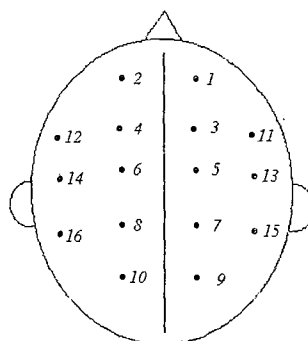


Рис. 4. Вариант стандартного расположения электродов ЭЭГ

возможные параметры взаимосвязи  $S_2(i,j)$ , где  $i$  и  $j$  – номера точек наложения электродов. Анализируя значения  $S_2(i,j)$  для различных условий эксперимента, можно выделить наиболее существенные из них с целью использования для построения пространственных графиков–профилей.

Как показали результаты исследований, наиболее информативным оказался профиль, содержащий элементы  $S_2(i,i+2)$ , где  $i=1,3,5,7$  для правого полушария и  $i=2,4,6,8$  для левого. Это соответствует набору параметров  $S_2$ , рассчитанных между соседними точками вдоль линии точек 1–9 (или 2–10). Выяснилось, что такая кривая, несмотря на индивидуальные различия, имеет некоторые общие для всех испытуемых черты. В частности, характерным является спад степени взаимосинхронности в области лба, а также заметно большая степень синхронности колебаний правого полушария. Кривую, отражающую типичное пространственное распределение свойств синхронности ЭЭГ, назовем профилем полушария с позиций синхронизации хаоса, или СХ–профилем. Усредненный (по всем испытуемым) вид кривых для правого и левого полушарий приведен на рис 5.

### 3. СХ–профиль и режим функционирования мозга

Индивидуальный вид СХ–профиля в отсутствие внешних воздействий на испытуемого и при расслабленном его состоянии достаточно устойчив во времени, что видно на рис. 6, где приведены результаты измерений, сделанные в начальный момент времени и через 5 минут.

Этот факт позволяет провести эксперимент по изучению влияния режима работы мозга на вид кривой СХ–профиля. В процессе эксперимента испытуемому предлагалось непрерывно, в течение 6–7 мин. решать арифметические задачи. Дважды в исходном состоянии, а также через 2,5–3 мин. после начала выполнения задания производилась еще одна запись сигналов ЭЭГ. В результате

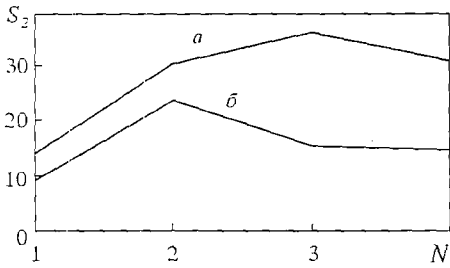


Рис. 5. Усредненная форма CX-профиля для правого (а) и левого (б) полушарий,  $N$  – номер пары точек

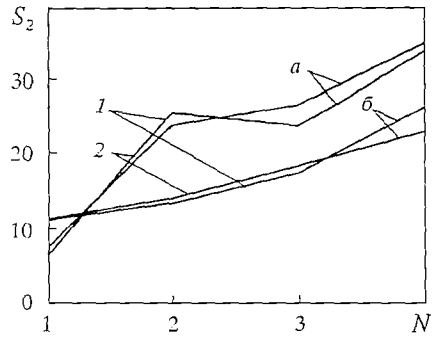


Рис. 6. Результаты измерений CX – профиля в начальный момент времени (1) и через 5 минут (2) для правого (а) и левого (б) полушарий,  $N$  – номер пары точек

анализа полученных кривых по левому полушарию была выделена пара точек, где наблюдалась наиболее четкая реакция (точки наложения электродов 6 и 8). По данным, полученным в этой паре точек, строились временные зависимости  $S_2(t)$  для всех испытуемых (рис. 7). Наиболее удобным оказалось строить график в координатах времени и величины сдвига  $\Delta S_2$ , которая вычислялась для каждого испытуемого как разность  $S_2$  в спокойном и возмущенном состояниях, нормированная на величину  $S_2$ , измеренную в спокойном состоянии (рис. 7). График, усредненный по всем испытуемым, приведен на рис. 8. Поведение кривых, соответствующих правому и левому полушариям, позволяет сделать вывод о принципиальном наличии реакции на предъявленное воздействие и о достоверно фиксируемых различиях в реакции левого и правого полушарий.

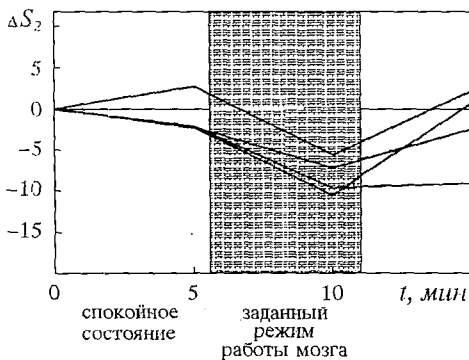


Рис. 7. Изменения параметра  $S_2$ , вызванные заданием специфического режима деятельности мозга:  $\Delta S_2$  – величина изменения  $S_2$  в сравнении с невозмущенным состоянием для каждого испытуемого

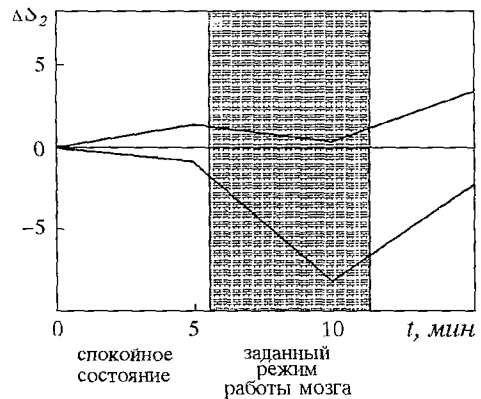


Рис. 8. Усредненная по группе испытуемых величина реакции  $\Delta S_2$  для правого (а) и левого (б) полушарий мозга

#### 4. Диагностика: первые шаги

Одной из самых важных отдаленных целей описываемых экспериментов является возможность уверенной диагностики заболеваний мозга. В свете описанных выше результатов была предпринята попытка сравнить характеристики ЭЭГ здоровых людей с записями ЭЭГ, соответствующими установленной патологии (опухоли) в работе мозга. СХ-профиль для этих целей строился из величин  $S_2(1,i)$ , где  $i = 3, 5, 7, 9$  для правого полушария и  $S_2(2,i)$ ,  $i = 4, 6, 8, 10$  для левого. Таким образом, оценивалась степень распространения свойств синхронности по мере удаления от некоторой опорной точки.

Полученные результаты приведены на рис. 9, где нанесены кривые, соответствующие как правому, так и левому полушариям нескольких здоровых людей (они мало различаются), а также две кривые, соответствующие случаю патологии (кривые *a* и *б*). Бросается в глаза резкое отличие в значениях  $S_2$  для измеряемого промежутка лоб-темя (точки с абсциссой 3.0 графика).

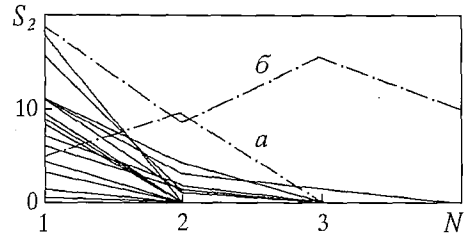


Рис. 9. Вид СХ - профиля, используемого в целях диагностики: — здорового человека, — больного с установленной патологией: *a* - левое, *б* - правое полушария, *N* - номер пары точек

Несомненно, представленные здесь результаты пока не могут претендовать на роль диагностического параметра, однако указывают на многообещающее направление дальнейших исследований. Выявление однозначной связи значения показателя степени синхронизации хаоса с наличием патологических отклонений являлось бы важным результатом исследований в свете практического приложения.

#### Выводы

В работе мы ввели количественную меру степени синхронизации хаотических колебаний двух сигналов, определяемую из неравномерности (наличия структур) диаграммы ПРФС через усреднение энтропии, вычисляемой по каждому сечению диаграммы. Нами показано, что такой параметр уверенно отражает наличие синхронной составляющей (по всем частотам одновременно) вплоть до уровня несинхронной компоненты в 60–70%. Исследование многоканальной записи ЭЭГ человеческого мозга позволило выбрать информативный и обладающий общими свойствами СХ-профиль полушарий, отражающий свойства взаимосинхронизованности сигналов ЭЭГ в различных участках мозга.

Экспериментально обнаружена реакция уровня синхронизации ЭЭГ на изменение режима мозговой деятельности.

Сравнительное исследование серии ЭЭГ здоровых испытуемых и ЭЭГ, соответствующих патологическому нарушению работы мозга, выявило существенные различия в СХ-профиле, что говорит о перспективности развития этого направления в целях диагностики.

Мы выражаем глубокую благодарность зав.кафедрой нейрохирургии Саратовского медицинского института профессору Е.И. Бабиченко за проявленный интерес к исследованиям и предоставленную возможность работы в клинике института. Кроме того, мы хотели бы поблагодарить принимавших участие в работе А.В. Климшина и П.И. Сапарина, а также всех добровольных участников экспериментов.



## Библиографический список

1. *Babloyantz A.* Strange Attractors in the Dynamics of Brain Activity // Complex Systems – Operational Approaches/ Ed.by H.Haken. Springer, Berlin, 1985.
2. *Babloyantz A., Nicolis C. and Salazar M.* Evidence of chaotic sof brain activity during the sleep cycle// Phys.Let A III. 1985. P.152.
3. *Babloyantz A., Destexhe A.* Low Dimensional chaos in an instanse of epilepsy// Proc.Nalt.Acad.Sci.USA. 1986. Vol.83. P.3513.
4. *Fuchs A., Friedrich R., Haken H. and D.Lehmann:* Spatio–Temporal Analysis of Multichannel  $\alpha$  –EEG Map Series // Computational Systems Natural and Artifical/ Ed. by H.Haken. Springer. Berlin, 1987.
5. *A.Fuchs, R.Friedrich, and H.Haken:* Synergetic Analysis of Spatio–Temporal EEG Patterns // Proceedings of the workshop Nonlinear phenomena in Excitable Media. Leeds. 1989.
6. *Дудник Е.Н., Кузнецов Ю.И., Минакова И.И., Романовский Ю.М.* Синхронизация в системах со странным аттрактором // Вестник Моск.ун-та.Сер.3.1983. Т. 24, № 4. С. 84.
7. *Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф., Перминов С.М.* Порог синхронизации как характеристика фазового перехода хаос–порядок./ МГУ. М, 1984. Препринт № 9.
8. *Кузнецов Ю.И., Ланда П.С., Ольховой А.Ф.* Амплитудный порог синхронизации как мера хаоса в стохастических автоколебательных системах // ДАН СССР. 1985. Т.281, № 2. С.1164.
9. *Анищенко В.С., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А.* Эффекты синхронизации и бифуркации синхронных и квазипериодических колебаний в неавтономном генераторе // Изв.вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, № 9. С.1112.
10. *Анищенко В.С., Арансон И.С., Постнов Д.Э., Рабинович М.И.* Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов // ДАН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1120.
11. *Афраймович В.С., Веричев Н.Н., Рабинович М.И.* Стохастическая синхронизация колебаний в диссипативных системах // Изв.вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С.1050.
12. *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Постнов Д.Э., Сафонова М.А.* Вынужденная и взаимная синхронизация хаоса // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 2. С. 338.
13. *Anishchenko W.S., Vadivasova T.E., Postnov D.E., Safonowa M.A.* Synchronization of chaos // Bifurcation and Chaos.1992. Vol.2, № 3. P. 633.
14. *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* Самоорганизация в хаосе Новый метод экспериментальной диагностики // Письма в ЖТФ. 1990. Вып.16. № 5. С.85.

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию 26.11.92  
после переработки 2.08.93

## CHAOTIC SYNCHRONIZATION AND ELECTRICAL ACTIVITY OF HUMAN BRAIN

*V.S.Anishchenko, D.E. Postnov*

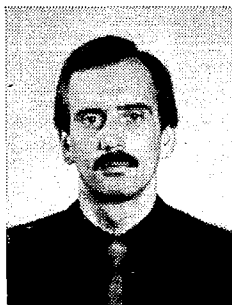
The new method of numerical processing of analogous EEG signals based on

chaotic synchronization phenomena is suggested. A quantitative measure of synchronization is proposed. It characterized the unevenness degree of two-dimensional probability density distribution of mutual phase shift. It is shown that this method can be used both for analyses of functioning regimes and for diagnostics of human brain pathology. The difference between the reaction of left and right cerebral hemispheres on the specified mental work was established.



*Анищенко Вадим Семенович* в 1970 г. защитил диссертацию на степень кандидата физико-математических наук. С 1979 и по настоящее время работает в области исследований динамического хаоса. В 1986 г. защитил докторскую диссертацию «Механизмы возникновения и свойства динамического хаоса в радиофизических системах с конечным числом степеней свободы». В 1987 г. в качестве приглашенного профессора читал курс лекций по динамическому хаосу в Гумбольдском университете (Берлин). С 1988 г. – заведующий кафедрой радиофизики Саратовского университета.

В.С. Анищенко автор более чем 150 научных работ, среди которых 5 монографий и 3 учебника по статистической радиофизике. Две монографии по проблемам динамического хаоса переведены на английский и изданы в Лейпциге в 1987 и 1989 г. В 1990 г. издательством «Наука» выпущена книга «Сложные колебания в простых системах», хорошо известная среди специалистов.



*Постнов Дмитрий Энгелевич* в 1983 г. окончил физический факультет Саратовского университета по специальности «радиофизика и электроника». До 1987 г. – инженер кафедры радиофизики СГУ. В 1990 г. окончил аспирантуру при той же кафедре, защитив кандидатскую диссертацию «Регулярные и хаотические процессы в системах взаимодействующих нелинейных осцилляторов». С 1991 г. работает старшим преподавателем кафедры радиофизики Саратовского университета. Автор 14 научных работ, опубликованных в отечественной и зарубежной печати.