

**О ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, ПОРОЖДЕННОЙ  
УРАВНЕНИЕМ УИЗЕМА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ЯДРОМ**

*В.М.Елеонский, В.Г.Королев, Н.Е.Кулагин*

Исследуется уравнение Уизема с осциллирующим быстроубывающим ядром. Показано, что с помощью преобразований Лапласа это уравнение можно свести либо к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка, либо к неинтегрируемой динамической системе с двумя степенями свободы, которая допускает существование особой точки типа седло–фокус. Численно найдены серии гомоклинических петель этой точки, являющихся образами самолокализованных решений уравнений Уизема с осциллирующими асимптотиками. На плоскости параметров системы изображены кривые, в точках которых система допускает существование решений с обострениями. Характер обострений исследуется аналитически.

Исследования волновых явлений в нелинейных средах при учете нелокального характера взаимодействий или сложной пространственной дисперсии приводят к необходимости анализа солитонных решений для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Классическим примером такого уравнения является уравнение Уизема [1]

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \partial_x \int_{-\infty}^{+\infty} dx' g(\rho) \varphi(x', t) = 0, \quad (1)$$

с ядром  $g(\rho) \equiv g(|x' - x|)$ , явный вид которого в теории Уизема определяется дисперсией волн в линейном приближении. Уравнение (1) можно рассматривать как одно из возможных обобщений уравнения Кортевега – де Вриза на случай сложной пространственной дисперсии волн. Наиболее распространенный подход к исследованию уравнений такого рода в случае быстро убывающих при  $\rho \rightarrow \infty$  ядер  $g(\rho)$  связан с использованием метода моментов. Действительно, уравнение (1) формально эквивалентно следующему дифференциальному уравнению бесконечно высокого порядка:

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n} \frac{\partial^{2n+1} \varphi}{\partial x^{2n+1}} = 0, \quad (1')$$

$$M_{2n} = \frac{2}{(2n)!} \int_0^{\infty} d\rho g(\rho) \rho^{2n}$$

При сохранении в (1') лишь конечного числа моментов приходим к дифференциальным уравнениям конечного порядка, бывшим предметом исследования в [3, 4]. В этих работах было обнаружено, что соответствующие уравнения допускают существование решений солитонного типа с осциллирующим фронтом и сложной внутренней структурой. Однако в ряде случаев использование метода моментов может привести к потере некоторых характерных свойств решений исходного интегро-дифференциального уравнения (1). В частности, в приближении ( $M_{2n} \equiv 0$  для  $n > 2$ ) соответствующее уравнение допускает существование лишь гладких решений солитонного типа, тогда как решения солитонного типа исходного уравнения (1), как правило, с ростом скорости стационарной волны (или ее амплитуды) теряют гладкость. Для анализа этого явления в настоящей работе используется подход, предложенный в [2].

Следуя [2], представим (1) в виде системы локально взаимодействующих полей. Определим прямое и обратное преобразования Лапласа ядра нелокального взаимодействия  $g(p)$ ,

$$g(p) \Rightarrow \tilde{g}(p) = \int_0^{\infty} dp e^{-pp} g(p),$$

$$\tilde{g}(p) \Rightarrow g(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp e^{+pp} \tilde{g}(p), \quad (2)$$

используя которые, находим, что уравнение (1) может быть записано в виде следующей системы уравнений:

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp \tilde{g}(p) q_x(x, t; p) = 0,$$

$$q_{,xt} - p^2 q = 2p \varphi(x, t), \quad (3)$$

где  $q(x, t; p) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{px} \varphi(x', t) dx'$ .

Система уравнений (3) определяет эволюцию нелинейного поля  $\varphi(x, t)$ , локально взаимодействующего с континуумом линейных полей  $q(x, t; p)$ , источником которых является исходное поле  $\varphi$ . При этом  $\tilde{g}(p)$  характеризует плотность состояний континуума введенных вспомогательных полей.

Для решений типа стационарных волн  $\varphi(x, t) = \varphi(x-ct)$  система уравнений (3) обладает парой первых интегралов

$$-c\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp \tilde{g}(p) q(\xi; p) = h, \quad (4)$$

$$-\frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{2}{3} \varphi^3 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} dp' \frac{1}{4} \tilde{g}(p') \left[ \frac{q_{\xi}^2}{p} - p' q^2 \right] = H,$$

где  $\xi = (x-ct)$ ,  $h$  и  $H$  – постоянные первых интегралов.

1. Поясним ситуацию на примере, исследованном ранее. Укажем в [1] в связи с задачей об уединенных волнах на поверхности жидкости, а именно: на примере задачи о стационарных волнах для уравнения (1) и ядра вида

$$g(p) = \frac{1}{2\lambda} e^{-p/\lambda}, \quad \tilde{g}(p) = \frac{1}{2\lambda} \left[ p + \frac{1}{\lambda} \right]^{-1}, \quad \operatorname{Re} p > -\frac{1}{\lambda}. \quad (5)$$

В этом случае плотность состояний  $\tilde{g}(p)$  в комплексной плоскости параметра  $p$  обладает единственной особенностью – полюсом первого порядка  $p = - (1/\lambda)$ , расположенном на вещественной оси. При этом контурные интегралы в соотношениях (3), (4) определяются вычетами соответствующих подынтегральных выражений в полюсе, а сами соотношения (3), (4) принимают вид

$$\varphi_t + 2\varphi\varphi_x = -\frac{1}{2\lambda} q_x, \quad q_{xx} - \frac{1}{\lambda^2} q = -\frac{2}{\lambda} \varphi(x, t); \quad (3')$$

$$-c\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2\lambda} q = h, \quad (4')$$

$$-\frac{c}{2} \varphi^2 + \frac{2}{3} \varphi^3 + \frac{1}{8} (-q_\xi^2 + \frac{1}{\lambda^2} q^2) = H.$$

Согласно соотношениям (4') стационарные волны в пространстве состояний  $\Gamma(\varphi; q_\xi; q)$  представлены траекториями – кривыми пересечения двумерных поверхностей  $h = h(\varphi, q)$ ,  $H = H(\varphi; q_\xi; q)$  первых интегралов. Очевидно, что ситуация является полностью интегрируемой. Действительно, исключая из соотношений (4') переменные  $q_\xi$  и  $q$ , находим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda^2 (c - 2\varphi)^2 \varphi_\xi^2 &= \frac{1}{2} \varphi^4 + \left( \frac{2}{3} - c \right) \varphi^3 + \frac{1}{2} (c^2 - 2h - c) \varphi^2 + \\ &+ hc\varphi + \frac{1}{2} h^2 - H. \end{aligned} \quad (5')$$

В частности, при нулевых постоянных первых интегралов  $h = H = 0$ :

$$\lambda^2 (c - 2\varphi)^2 \varphi_\xi^2 = \varphi^2 \left\{ \varphi^2 + 2 \left( \frac{2}{3} - c \right) \varphi + c^2 - c \right\}. \quad (6)$$

Полином в правой части соотношения (6) обладает в этом случае кратным нулевым корнем и парой вещественных корней при  $c \leq 4/3$ :

$$\varphi_\pm(c) = c - \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{3}{4} c \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Таким образом, область существования уединенных волн определена неравенством

$$1 < c \leq 4/3. \quad (8)$$

Здесь  $\max \varphi \leq 4/3$ , а при  $c \rightarrow 4/3$  в решении возникает особенность. Действительно, при  $c = 4/3$  решение уравнения (6) имеет вид

$$\varphi(\xi) = \frac{4}{3} \exp\left(-\frac{|\xi|}{2\lambda}\right), \quad (9)$$

из которого видно, что решение испытывает «обострение» при  $\xi = 0$ . Отметим, что этот результат есть следствие рассмотрения пространственной дисперсии волн или, другими словами, нелокальных взаимодействий.

2. Рассмотрим уравнение (1) в случае осциллирующего ядра вида

$$g(\rho) = G(\lambda, \nu) e^{-\rho/\lambda} \cos(\nu\rho), \quad (10)$$

где  $G(\lambda, \nu) \equiv \frac{1 + (\lambda\nu)^2}{2\lambda}$  определяется из следующего условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx g(\rho) = 1. \quad (11)$$

Линейной перенормировкой переменных и функций в уравнении (1) с ядром, определяемым формулой (10), можно свести задачу к однопараметрической с параметром  $\sigma \equiv 1/(\lambda\nu)$ . Для этого ядра функция  $\tilde{g}(p)$  в комплексной плоскости параметра  $p$  обладает парой сопряженных полюсов вида  $p = p_{\pm} \equiv -\sigma \pm i$ . В этом случае система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_t + 2\varphi\varphi_x + \frac{1}{2} G(\sigma)(q + q^*)_x &= 0, \\ q_{,xx} - p^2 q &= 2p\varphi, \\ q^*_{,xx} - (p^*)^2 q^* &= 2p^*\varphi. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (12) определяет эволюцию нелинейного поля  $\varphi(x, t)$ , локально взаимодействующего с линейным комплексным полем  $q(x, t; p)$ .

В случае стационарных волн  $\varphi(x, t) = \varphi(x - ct)$  система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{aligned} (-c\varphi + \varphi^2)_x + \frac{1}{2} G(\sigma)(q + q^*)_x &= 0, \\ q_{,xx} - p^2 q &= 2p\varphi, \\ q^*_{,xx} - (p^*)^2 q^* &= 2p^*\varphi \end{aligned} \quad (13)$$

и приводит к следующим двум первым интегралам:

$$-c\varphi + \varphi^2 + \frac{1}{2} G(\sigma)(q + q^*) = h, \quad (14)$$

$$-\frac{1}{2} c\varphi^2 + \frac{2}{3} \varphi^3 - \frac{1}{8} G(\sigma) \left\{ \frac{q_x^2}{p} - pq^2 + \frac{(q_x^*)^2}{p^*} - p^*(q^*)^2 \right\} = H. \quad (15)$$

Первый интеграл (14) устанавливает алгебраическую связь между обобщенными координатами  $(\varphi, q, q^*)$  динамической системы (13) и порождает неинтегрируемую, в отличие от примера Уизема, динамическую систему с двумя степенями свободы,

$$\begin{aligned} q_{xx} - p^2 q &= 2 p \varphi (q + q^*), \\ q^*_{xx} - (p^*)^2 q^* &= 2 p^* \varphi (q + q^*), \quad p = \sigma + i, \end{aligned} \quad (16)$$

и с первым интегралом (15), в котором  $\varphi$  есть функция обобщенных координат  $q$  и  $q^*$ ,  $G(\sigma)$  и  $h$ . Переходя к вещественным обобщенным координатам  $X$  и  $Y$  ( $q = X + iY$ ,  $q^* = X - iY$ ), запишем (16) в виде

$$\begin{aligned} X_{xx} - (\sigma^2 - 1)X - 2\sigma Y &= -2\sigma \varphi(\sigma, X), \\ Y_{xx} - (\sigma^2 - 1)Y + 2\sigma X &= 2\varphi(\sigma, X), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\varphi$  определяется из алгебраического соотношения

$$\varphi^2 - c\varphi + G(\sigma)X = h, \quad (18)$$

а интеграл (15) принимает вид

$$\begin{aligned} H = -\frac{1}{2} c\varphi^2 + \frac{2}{3} \varphi^3 + \frac{1}{8} G(\sigma) \left\{ \frac{1}{\sigma^2 + 1} (-2\sigma (X_\xi^2 - Y_\xi^2) + \right. \\ \left. + 4X_\xi Y_\xi) + 2\sigma(X^2 - Y^2) + 4XY \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

*Замечание 1.* Легко показать, что динамическая система (17) является гамильтоновой с функцией Гамильтона:

$$H = -\frac{1}{2} \sigma P_x^2 + P_x P_y + \frac{1}{2} \sigma P_y^2 + \frac{1}{2} \sigma X^2 + XY - \frac{1}{2} \sigma Y^2 - 2 \int_0^x \varphi(x') dx', \quad (20)$$

где обобщенные импульсы введены с помощью соотношения

$$\frac{dX}{d\xi} = -\sigma P_x + P_y, \quad \frac{dY}{d\xi} = \sigma P_y + P_x, \quad (21)$$

( $\xi$  – независимая переменная), а интеграл в (18) выражается непосредственно через функцию  $\varphi$ :

$$\int_0^x \varphi(x') dx' = \frac{1}{G(\sigma)} \left( \frac{1}{2} c\varphi^2 - \frac{2}{3} \varphi^3 \right). \quad (22)$$

*Замечание 2.* Наряду с динамической системой (17), определенной в фазовом пространстве  $\Gamma(q_x, q, q^*_x, q^*)$  или  $\Gamma(P_x, P_y, X, Y)$ , можно ввести соответствующую ей динамическую систему в пространстве  $\Gamma(\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_x, \varphi)$ . Действительно, применив к интегралу (14) оператор вида  $(\partial_x^2 - p^2)(\partial_x^2 - (p^*)^2)$  и исключив с помощью уравнений (13) переменные  $q, q^*$ , получим, что функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\begin{aligned} & \varphi^2 + (1-c)\varphi - h + \left\{ -\frac{1}{2G\sigma} - (2\varphi - c) \frac{1-\sigma^2}{2G^2} \right\} \varphi_{,xx} - \frac{1-\sigma^2}{G^2} \varphi_x^2 + \\ & + \frac{1}{4G^2\sigma^2} \left\{ (2\varphi - c)\varphi_{,xxx} + 8\varphi_x \varphi_{,xx} + 6\varphi_x^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

с соответствующим первым интегралом  $\tilde{H} = \tilde{H}(\varphi, \varphi_x, \varphi_{,xx}, \varphi_{,xxx})$ .

Показательно сравнение с уравнением (23) уравнения Кавахары [3,4], получаемого разложением уравнения (1) по моментам ядра с последующим удержанием трех первых членов в предположении  $\lambda \ll 1$  ( $\sigma \gg 1$ ), которое имеет вид

$$\varphi^2 + (1-c)\varphi - h + \frac{\sigma^2 - 3}{[\sigma^2 + 1]^2} \varphi_{,xx} + \frac{\sigma^4 - 10\sigma^2 + 5}{[\sigma^2 + 1]^4} \varphi_{,xxx} = 0. \quad (24)$$

Отметим, что в приближенном уравнении (24) в отличие от уравнения (23), которое в случае ядра (10) эквивалентно исходному интегро-дифференциальному уравнению (1), структура нелинейности существенно иная. В частности, в нем отсутствуют члены, содержащие нечетные производные функции  $\varphi$ , входящие в (23) в комбинациях вида  $\varphi_x^2$  и  $\varphi_x \varphi_{,xxx}$ .

3. Образами решений солитонного типа уравнения (1) с ядром вида (10) в гамильтоновой динамической системе с двумя степенями свободы (17) являются траектории, гомоклинические к нулевой особой точке ( $0 \equiv (X = Y = dX/d\xi = dY/d\xi = \varphi = 0)$ ). Характеристические показатели этой особой точки  $\lambda$  определяются из уравнения

$$Z_\lambda^2 + 2 \frac{\sigma G}{c} Z_\lambda + 4\sigma^2 \left(1 - \frac{G}{\sigma c}\right) = 0, \quad (25)$$

где  $Z_\lambda \equiv \lambda^2 - (\sigma^2 - 1)$ . Откуда

$$\lambda_{\pm}^2 = (\sigma^2 - 1) - \frac{\sigma G}{c} \pm \left\{ \left(\frac{\sigma G}{c}\right)^2 - 4\sigma^2 \left(1 - \frac{G}{\sigma c}\right) \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Заметим, что наличие осциллирующего ядра приводит к существованию в системе особой точки типа седло-фокус, петли которой являются образами решений солитонного типа с осциллирующими асимптотиками при  $\xi \rightarrow \pm \infty$ . Условия существования нулевой особой точки типа седло-фокус имеют вид

$$\left(\frac{\sigma^2 + 1}{2c} + 2\right)^2 < 4(1 + \sigma^2) \quad (27)$$

Численные исследования позволили обнаружить существование различных гомоклинических петель нулевой особой точки и проследить их трансформации и бифуркации при изменении параметров системы  $c$  и  $\sigma$ . В ходе исследований мы интересовались, в основном, той областью, в которой особая точка имеет тип седло-фокус, поскольку эта ситуация специфична для задачи с осциллирующим ядром. Нами обнаружено, в частности, что существуют области значений параметров, пересекающиеся с областью существования седло-фокуса, в которых имеются различные периодические движения седлового типа, лежащие в уровне седло-фокуса и проецирующиеся на конфигурационное пространство  $\{(X, Y)\}$  в отрезки кривых (рис. 1). Эти периодические орбиты в совокупности с особой

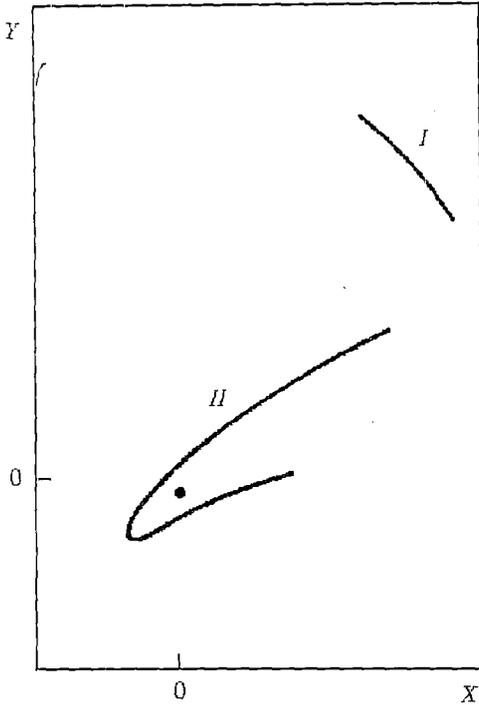


Рис. 1. Проекция на плоскость  $\{(X, Y)\}$  седловых периодических орбит, с которыми связаны серии петель, изображенных на рис. 2 и 3, соответственно

фазовом пространстве на двух листах, склеенных вдоль прямой  $A$  (рис.5):

$$X_{cr} = \frac{c^2 + 4h}{4G(\sigma)}. \quad (28)$$

Однако использование первого интеграла (19) дает возможность выразить  $\varphi$  однозначно, а именно: если мы обозначим третье слагаемое в (19) как  $L$ , то для  $\varphi$  получим выражение

$$\varphi = \frac{6(H-L) + cG(\sigma)X + hc}{4(h-G(\sigma)X) + c^2}. \quad (29)$$

Полученное выражение содержит сингулярность в точках прямой  $A$ . Следствием этого является потеря траекториями, проходящими через точки этой прямой, гладкости, что приводит к обострению решения исходной задачи – “излому” вершины солитонного решения.

Исследуем поведение траекторий, проходящих через точки, лежащие на прямой  $A$ , более подробно. Будем интересоваться траекториями, лежащими на уровне нулевой особой точки  $0 \equiv (X = Y = dX/d\xi = dY/d\xi = \varphi = 0)$ , имея в виду дальнейший поиск среди гомоклинических петель особой точки негладких траекторий, являющихся образами солитонов с обострениями.

Разложим решение вблизи точки потери гладкости, лежащей на прямой  $X = c^2/4G$ , в ряд по отклонению независимой переменной  $\xi$  от ее значения в точке обострения  $\xi_0$ :

$$X(\xi) = \frac{c^2}{4G} + \alpha_1(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \beta_1(\xi - \xi_0)^2 + O((\xi - \xi_0)^3), \quad (30)$$

точкой и парой траекторий, двоякоасимптотических к этим объектам, образуют гомоклинические контуры, с которыми может быть связано существование счетных семейств сложных гомоклинических петель, допускающих нумерацию по числу обходов ими седловой орбиты [5]. Проекция нескольких простейших петель из двух семейств такого типа приведены на рис.2.3.

Области существования как периодических орбит, так и соответствующих семейств петель, изображены на рис.4. Видно, что область существования каждого из перечисленных объектов ограничена по переменной  $c$  как снизу (бифуркационными линиями смены типа особой точки), так и сверху. Как показали исследования, причина ограниченности областей существования сверху нетривиальна. Остановимся подробнее на этом вопросе.

4. Отметим, что соотношение (18) не позволяет однозначно выразить  $\varphi(X)$  в правых частях (17) и тем самым приводит к динамической системе, определенной в выбранном

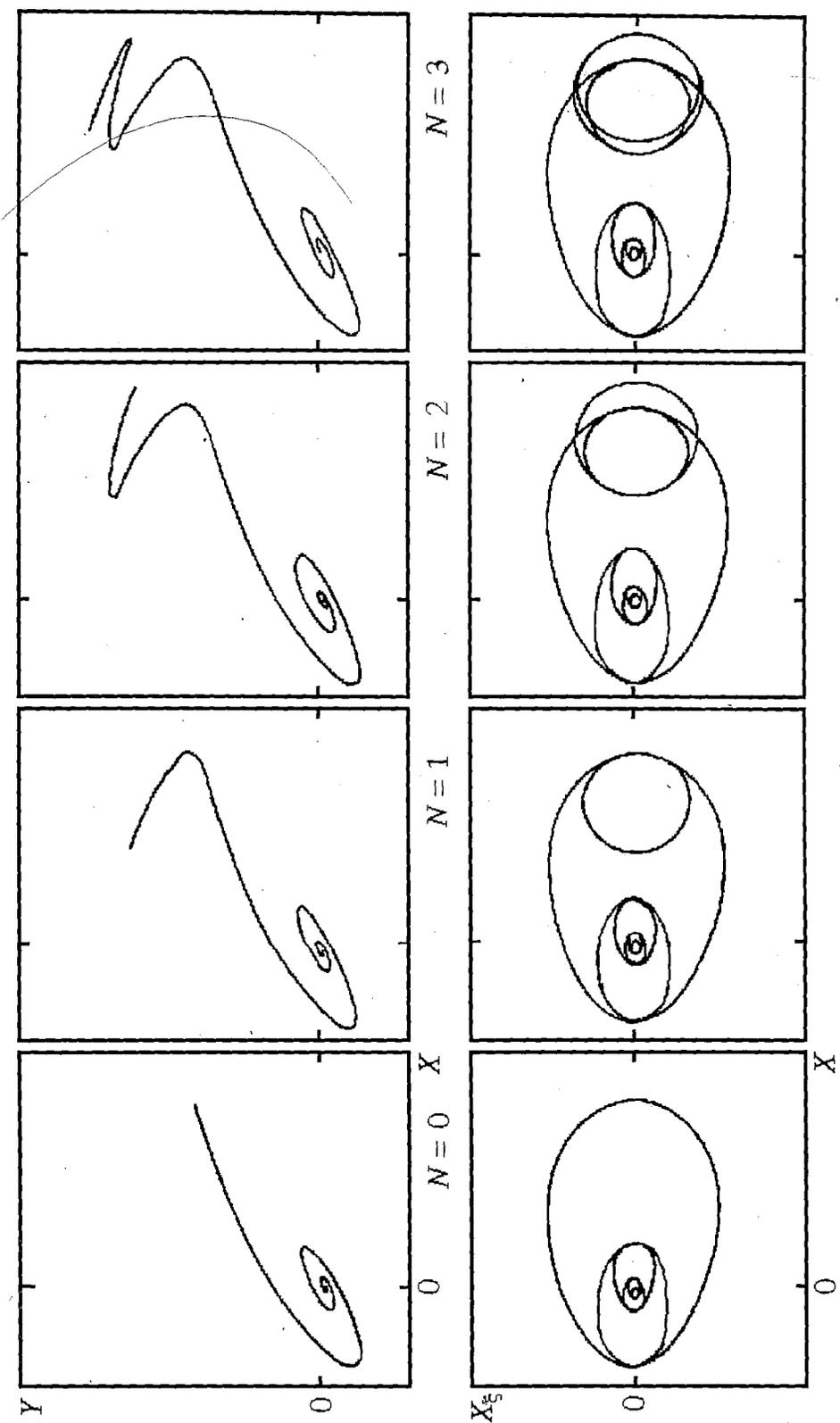


Рис. 2. Первые 4 представителя серии петель, связанной с существованием гомоклинического контура, включающего периодическую орбиту I (рис.1) при фиксированных значениях параметров  $\sigma$  и  $c$

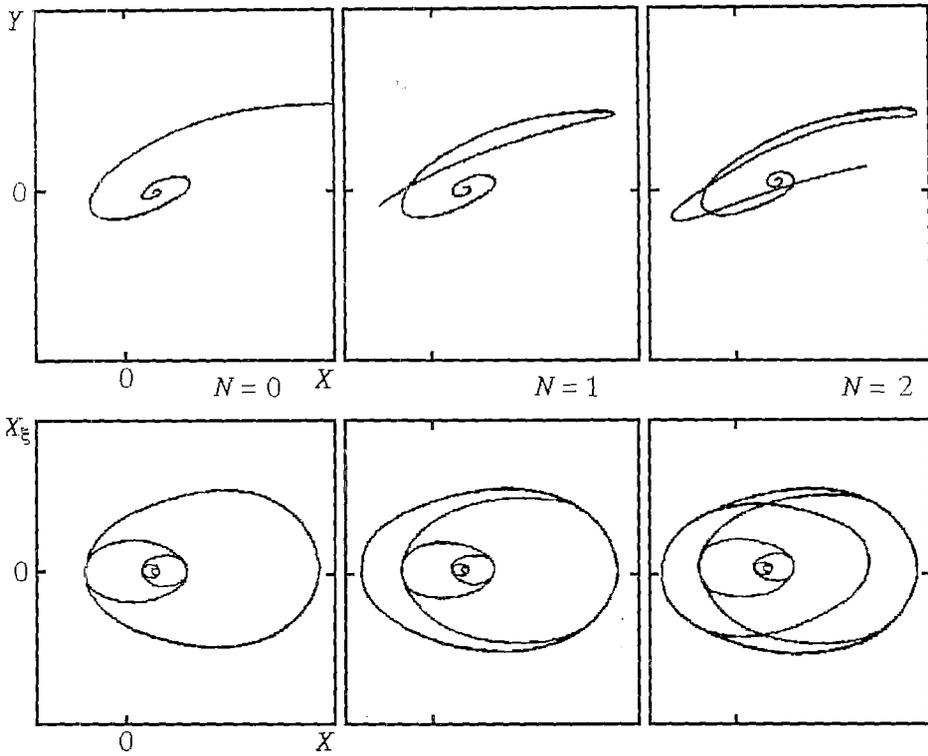


Рис. 3. Первые 3 представителя серии петель, связанной с существованием гомоклинического контура, включающего периодическую орбиту  $\Pi$  (рис. 1) при фиксированных значениях параметров  $\sigma$  и  $c$

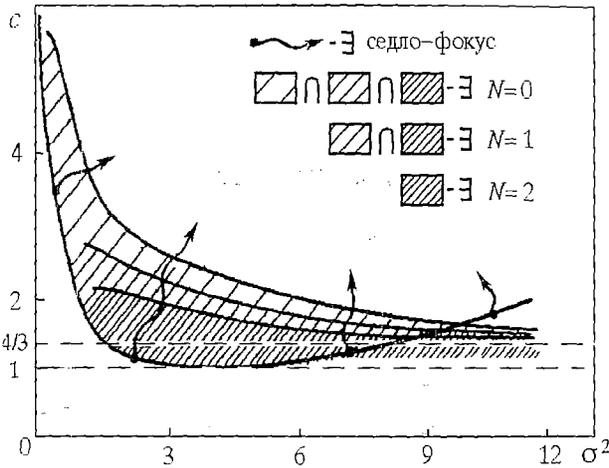


Рис. 4. Области существования петель семейства, изображенного на рис. 2, для  $N = 0, 1, 2$  (петля с  $N = 0$  существует в областях с редкой, средней и частой штриховкой, петля с  $N = 1$  – в областях со средней и частой штриховкой, петля с  $N = 2$  – в области с частой штриховкой)

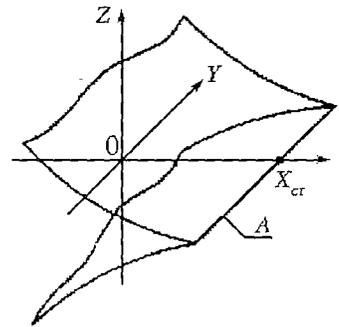


Рис. 5. Двухлистная область определения динамической системы (17), (18)

$$Y(\xi) = Y(\xi_0) + \alpha_y(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \beta_y(\xi - \xi_0)^2 + O((\xi - \xi_0)^3), \quad (31)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{c}{2} + \alpha_\varphi(\xi - \xi_0) + \frac{1}{2} \beta_\varphi(\xi - \xi_0)^2 + O((\xi - \xi_0)^3). \quad (32)$$

Подставляя эти разложения в уравнения движения (17), получаем следующие выражения для коэффициентов  $\beta_x$  и  $\beta_y$ :

$$\beta_x = (\sigma^2 - 1) \frac{c^2}{4G} - 2\sigma Y_0 - \sigma c, \quad (33)$$

$$\beta_y = (\sigma^2 - 1)Y_0 - \sigma \frac{c^2}{2G} + c, \quad (34)$$

где величина  $Y_0 \equiv Y(\xi_0)$  является параметром точки на прямой  $X = c^2/4G$ . Из соотношения (18) получаем:

$$\alpha_x = 0, \quad \alpha_\varphi^2 = -\frac{1}{2} \beta_x G(\sigma). \quad (35)$$

Отсюда следуют три вывода. Во-первых, линия  $X = c^2/4G(\sigma)$  является линией точек поворота – она разбивает конфигурационное пространство  $\{(X, Y)\}$  на две полуплоскости, причем оба листа фазового пространства проецируются на левую полуплоскость. Во-вторых, в точках этой прямой величины  $X$  и  $\varphi$  имеют максимальное значение при данных значениях параметров  $\sigma$  и  $c$ , а именно:

$$X_{\max} = \frac{c^2}{4G}, \quad \varphi_{\max} = \frac{c}{2}.$$

В-третьих, производная решения исходной задачи испытывает в точке поворота разрыв

$$\left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0} = \alpha_\varphi + O(\xi - \xi_0), \quad \alpha_\varphi^2 = -\frac{1}{2} \beta_x G(\sigma), \quad (36)$$

который является следствием излома решения в точке  $\xi = \xi_0$  (рис.6).

Наконец, используя формулу (19) для первого интеграла, получаем выражение для коэффициента  $\alpha_y$ ,

$$\alpha_y^2 = 2G\sigma Y_0^2 - c^2 Y_0 + \left( \frac{c^3}{3} - \frac{\sigma^2 c^4}{4(\sigma^2 + 1)} \right), \quad (37)$$

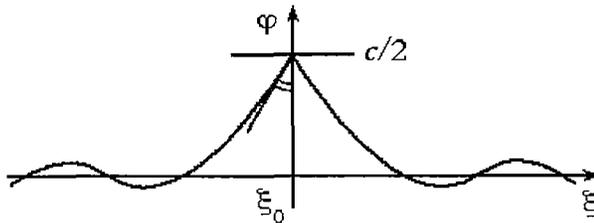


Рис. 6. Самолокализованное решение с обострением и осциллирующей асимптотикой на бесконечности

а также выражение для  $\beta_\varphi$

$$\beta_\varphi = \frac{\sigma G}{3} \left(1 + \frac{\alpha_y}{\alpha_\varphi}\right). \quad (38)$$

Среди множества траекторий, чьи проекции на плоскость  $\{(X, Y)\}$  касаются прямой  $A$  ( $X_\xi(\xi_0) = 0, Y_\xi(\xi_0) \neq 0$ ), существуют, как следует из (37), траектории, меняющие в точке поворота направление скорости на обратное ( $X_\xi(\xi_0) = 0, Y_\xi(\xi_0) = 0$ ) (рис. 7). Проекция этих траекторий подходит к прямой  $A$  под ненулевым углом и локально, в окрестности прямой, описывается уравнением  $X_\xi(\xi - \xi_0) = KY_\xi(\xi - \xi_0)$ ,

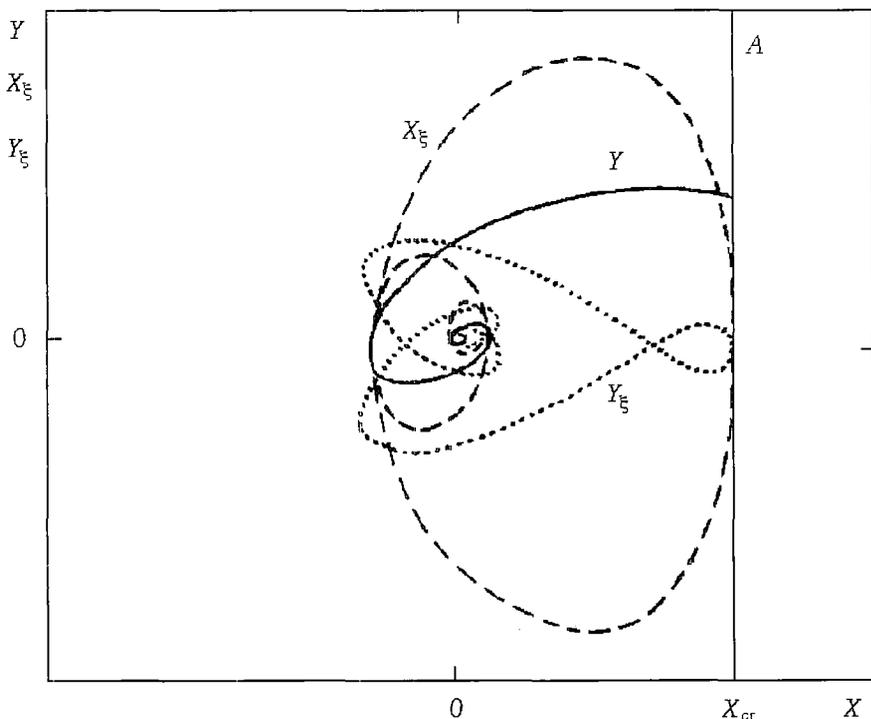


Рис. 7. Проекция петли «с обострением» (рис. 2 при  $N=0$ ) на плоскости  $\{(X, Y), \{(X, X_\xi), \{(X, Y_\xi)\}$

$K = \text{const} > 0$ . Значения  $Y(\xi_0)$ , при которых такие траектории подходят к прямой  $A$ , определяются из уравнения (37) при условии  $\alpha_y = 0$ :

$$Y(\xi_0) = \frac{c^2}{4\sigma G} \left\{1 \pm [1 + \sigma^2]^{1/2} \left(1 - \frac{4}{3c}\right)^{1/2}\right\}. \quad (39)$$

При этом выражение для величины разрыва  $\varphi_\xi(\xi_0) \equiv \alpha_\varphi$  имеет вид

$$\alpha_\varphi^2 = \sigma G(\sigma) \left\{ \frac{c}{2} \left(1 - \frac{c}{2}\right) + \frac{c^2}{2(\sigma^2 + 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{4}{3c}\right)^{1/2} \right\}. \quad (40)$$

Из последнего соотношения следует, что на плоскости параметров задачи  $\{(\sigma, c)\}$  область существования решений с обострением данного частного вида ограничена областью (рис. 8).

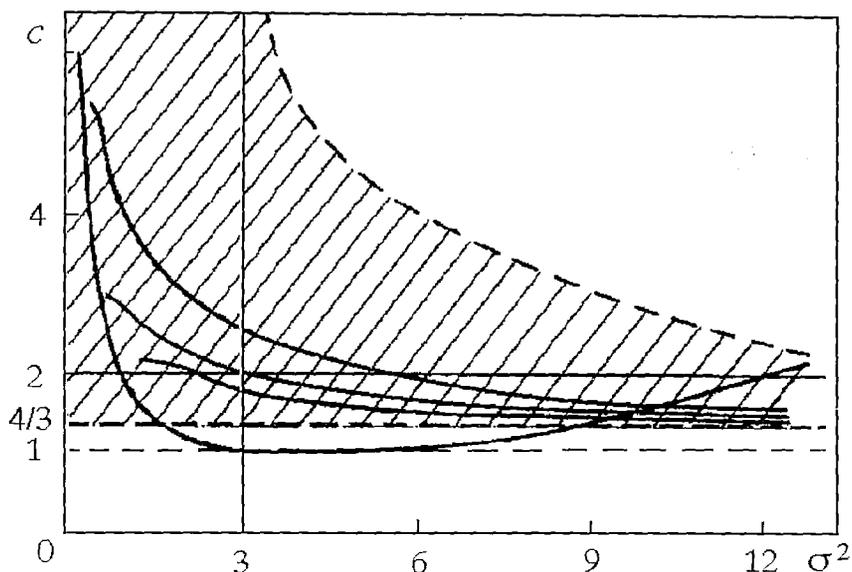


Рис. 8. Область существования в динамической системе (17), (18) решений с обострением (выделена штриховкой)

$$c \geq \frac{4}{3}, \quad \sigma^2 \leq \frac{3c^2/4 - c/3 - 1}{(c/2 - 1)^2}. \quad (41)$$

Как показали исследования, линии на плоскости параметров, ограничивающие сверху область существования сложных гомоклинических петель и периодических орбит, являются линиями, на которых соответствующие решения испытывают потерю гладкости. После пересечения этих прямых, например, в сторону роста параметра  $c$ , траектории становятся непродолжаемыми. Отметим, что все линии точек обострения решений действительно лежат в области параметров, определяемых соотношениями (41).

Отметим, что в случае семейства траекторий, изображенных на рис. 2, петли с четными порядковыми номерами представляют примеры частных случаев траекторий с обострением, для которых справедливы результаты (39), (40), тогда как петли с нечетными номерами суть траектории общего положения. При проведенном численном анализе выражения, описывающие поведение траекторий в окрестности прямой  $A$ , с хорошей точностью подтверждались. Так на рис. 7 приведены проекции фазовой траектории, отвечающей первой петле семейства, изображенного на рис. 2, на плоскости  $\{(X_\xi, X)\}, \{(Y_\xi, X)\}, \{(Y, X)\}$ , а на рис. 9 — графики зависимости величин  $\varphi, \varphi_\xi, \varphi_{\xi\xi}, X, X_\xi, X_{\xi\xi}, Y, Y_\xi, Y_{\xi\xi}$  от независимой переменной  $\xi$  для двух первых петель этого семейства при значениях параметров, отвечающих точкам, лежащим на кривых обострения решений.

*Замечание 3.* Отметим, что периодическая орбита, отвечающая периодической волне исходной задачи, представляет собой аналог периодической волны Стокса в бесконечно глубокой жидкости [6–8]. В частности, на линии обострения она является аналогом стоксовой предельной волны с обострением, для которой Стоксом была найдена величина угла обострения, равная  $2\pi/3$ . В задаче с пространственной дисперсией, как было показано выше, величина угла

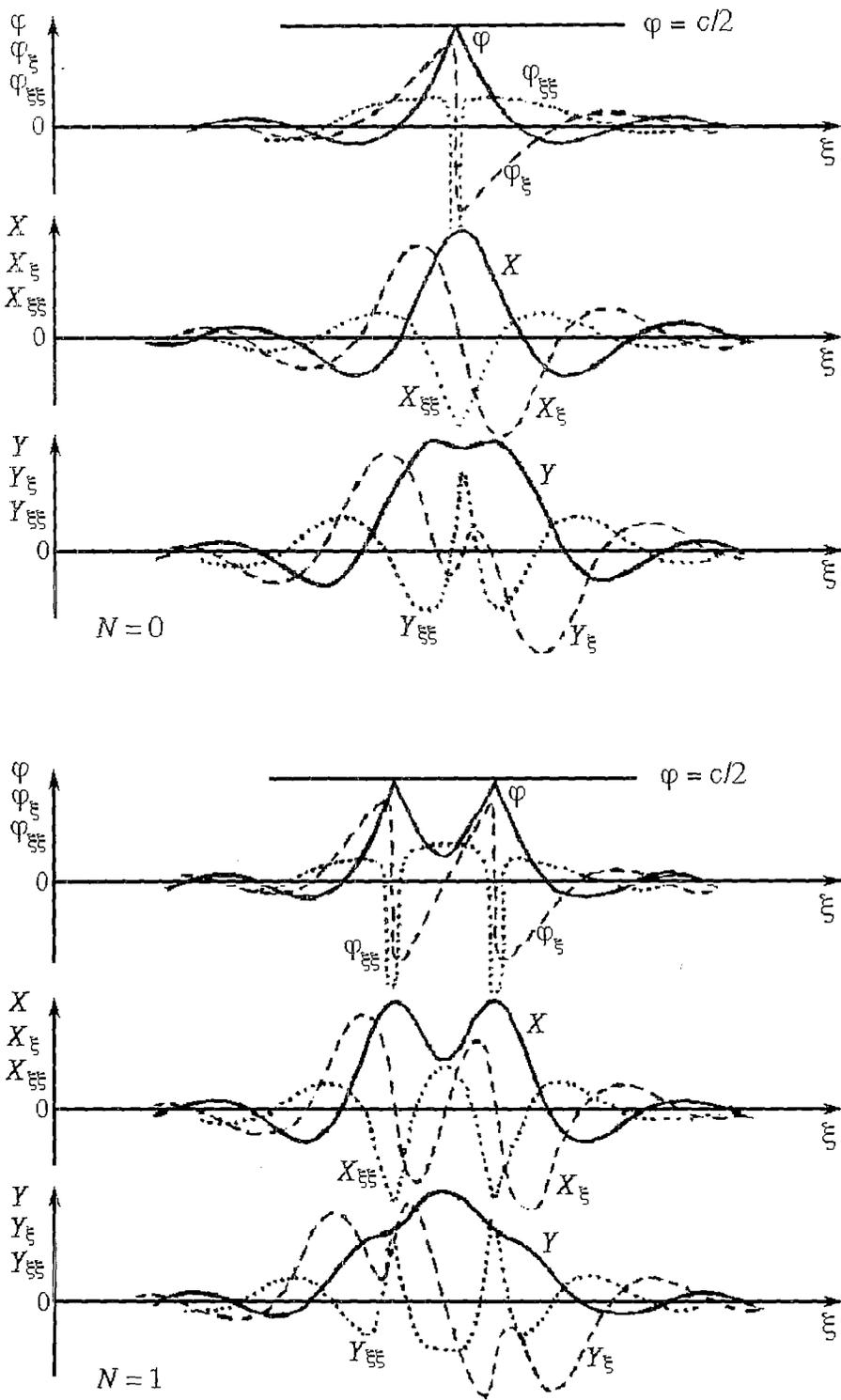


Рис. 9. Зависимости динамических переменных от  $\xi$  для двух первых петель семейства, изображенного на рис. 2, при значениях параметров  $\sigma$  и  $c$ , отвечающих режиму обострения

бострения при вершине гребня есть функция параметров задачи – характерного масштаба дисперсии  $\sigma$  и скорости волны  $c$  (35), (40). Величина амплитуды предельной волны  $\varphi_{\max}$  равна  $c/2$ , что отличается от результата Уизема [1] для экспоненциального ядра (см.(9)). Однако существование солитонных решений, обладающих обострением, есть явление, которое возможно описать лишь при последовательном учете пространственной дисперсии (нелокальных взаимодействий). Можно предположить, что, по-видимому, конкретный вид ядра не влияет на возможность потери гладкости солитонными решениями.

Происхождение рассмотренной выше модели нелокальных взаимодействий с осциллирующим ядром может быть связано с рядом физических моделей, приводящих к осциллирующим потенциалам взаимодействия солитонов в приближении слабой связи (см., например, [9]). Отметим также возможность ее реализации в нелинейной линии передачи с пространственной дисперсией [10].

Благодарим Л.П.Шильникова, обратившего наше внимание на эту задачу и стимулировавшего исследования петель с обострениями в задачах с особыми точками типа седло–фокус.

### Библиографический список

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. Alfimov G.L., Eleonsky V.M., Kulagin N.E. Dynamical systems in the theory of solitons in the presence of nonlocal interactions // Chaos. 1992. Vol.2, № 4.
3. Kawahara T. // J.Phys. Soc.Japan. 1972. Vol.33. P.260.
4. Gorshkov K.A., Ostrovsky L.A., Papko V.V., and Pikovskiy A.S. On existence of stationary multisolitons // Phys.Rev.Lett.1979.Vol.74A, № 3, 4. P.177.
5. Тураев Д.В., Шильников Л.П. О гамильтоновых системах с гомоклиническими петлями седла // Докл.АН СССР. 1989. Т.304, № 4. С.811.
6. Stokes G.G. On the theory of oscillatory waves // Math. and Phys. Papers. 1, Cambrige, 1880. P.197.
7. Некрасов А.И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1951.
8. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
9. Горшков К.А., Миронов В.А., Сергеев А.М. Связанные стационарные солитонные образования // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С.112.
10. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.

Научно–исследовательский  
институт физических проблем  
Зеленоград

Поступила в редакцию 3. 08. 1992  
после переработки 18.12.1992

## ON THE DYNAMIC SYSTEM GENERATED BY WHITHAM'S EQUATION WITH OSCILLATING KERNEL

*V.M. Eleonsky, V.G. Korolev, N.E. Kulagin*

The Whitham's equation possessing the fast-vanishing oscillating kernel is investigated. A possibility of the reducing of this equation is shown either to the differential equation of the fourth rate or to the nonintegrable dynamic system with two degrees of freedom, which permits an existence of singular point of «saddle-focus» type. The series of homoclinic loops of that point are found numerically. These loops are images of self-localized oscillating solutions of the Whitham's equation. The curves of points on the parametre plane are found, where the system permits an existence of «sharpened» solutions. These solutions are investigated analytically.



*Елеонский Владимир Маркович* – родился в Ржеве. В 1955 году закончил физико – технический факультет Уральского политехнического института. В 1979 году защитил докторскую диссертацию по специальности «теоретическая и математическая физика». Возглавляет группу теоретических фундаментальных исследований в Государственном научно-исследовательском институте физических проблем им. Ф.В. Лукина. Научные интересы – качественная теория динамических систем и ее применение в нелинейных задачах математической физики.



*Королев Вадим Германович* – родился в 1966 году в Москве. В 1989 году закончил Физический факультет Московского государственного университета. Аспирант. Работает под руководством В.М.Елеонского в группе теоретических фундаментальных исследований в Государственном научно-исследовательском институте физических проблем им. Ф.В. Лукина. Научные интересы – качественная теория динамических систем и ее применение в нелинейных задачах математической физики.



*Кулагин Николай Евгеньевич* – родился в 1946 году в Кисловодске. В 1969 году закончил механико-математический факультет Московского государственного университета. В 1989 году защитил докторскую диссертацию по специальности «теоретическая и математическая физика». Работает в теоретическом отделе Государственного научно-исследовательского института физических проблем им. Ф.В. Лукина. Научные интересы – качественная теория динамических систем и ее применение в нелинейных задачах математической физики.