Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 533.951

ФОРМИРОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

И.П. Завершинский, Е.Я. Коган, Н.Е. Молевич

Рассмотрены неравновесные газовые и плазменные среды с отрицательной вязкостью. Такие релаксационные среды являются акустически неустойчивыми. Особенностью их нелинейной динамики является взрывной характер неустойчивости. Стабилизация этой неустойчивости описывается эволюционными уравнениями, полученными с точностью до величины третьего порядка малости по параметру диссипации. Исследованы стационарные структуры в колебательно-возбужденном газе и в токовой слабоионизованной плазме.

В термодинамически неравновесных средах в зависимости от типа и уровня неравновесности может выполняться релеевский критерий неустойчивости звука [1] – определенные фазовые соотношения между возмущением плотности газа и источника энергии, в качестве которого выступают релаксирующие в поле волны неравновесно-возбужденные степени свободы среды. Установление этих соотношений (положительной обратной связи) означает обращение (смену знака) коэффициента релаксационной вязкости [2–4].

Релаксационная вязкость ζ характеризует диссипативные процессы, связанные с конечным временем установления параметров среды при сжатии или разрежении в звуковой волне. В общем случае для изотропной среды с линейной дисперсией вклад в релаксационную вязкость дают как пространственно-локальные процессы с конечным временем релаксации (вторая вязкость, излучательная теплопроводность [5]), так и нелокальные процессы (например, диффузия [6]).

Особенность нелинейных структур в активных средах с отрицательной релаксационной вязкостью состоит в том, что обычно их неустойчивость носит взрывной характер [2,7] и ее нельзя исследовать в режимах уравнений, полученных во втором порядке амплитудной теории возмущения, т.е. уравнений типа Бюргерса или Кортевега – де Вриза – Бюргерса.

В [4, 8–10] показано, что в случае одного релаксационного процесса с характерным временем τ нелинейную динамику малых, но конечных газодинамических возмущений, можно описать с точностью до величин третьего порядка малости с помощью базовых уравнений, сохраняющих с точностью до обозначений свою форму независимо от типа неравновесности среды.

При $\tau/\tilde{T}\sim\theta \ll 1$ или $\tau/\tilde{T}\sim \theta^{-1} \gg 1$ ($\tilde{T}^{-1}\sim \partial\ln\rho/\partial t$ – характерный период возмущения) эти уравнения соответственно имеют вид:

$$\rho_y = \beta_0\, \rho_{\zeta\zeta\zeta} + \mu\rho_{\zeta\zeta} + k_1\rho\rho_{\zeta\zeta} + k_2\rho_{\zeta\zeta}^{\ 2} - \Psi_0\, \rho\rho_\zeta + k_3\rho_\zeta^{\ 3}, \qquad (1)$$

$$\rho_y = \beta_\infty \int \rho d\zeta + \mu_\infty \rho_{\zeta\zeta} + k_{1\infty} \rho\rho_{\zeta\zeta} + k_{2\infty} \rho_{\zeta\zeta}{}^2 - \Psi_\infty \rho\rho_\zeta + k_{3\infty} \rho_\zeta{}^3 -$$
$$- \Psi_\infty \alpha_\infty \rho_\zeta \int \rho d\zeta - \alpha_\infty U_\infty \rho - \nu\rho^2, \qquad (2)$$

где ρ, ρ_0 – возмущение плотности газа и ее стационарное значение ($\rho/\rho_0 \sim \theta$); $y = \theta t$; $\zeta = x - U_s t$; U_s – скорость звука, причем в (1) $U_s = U_0$, в (2) $U_s = U_\infty$; $U_0 = (T_0 C_{p0}/C_{V0} M)^{1/2}$ – скорость низкочастотного звука; $U_\infty = (T_0 C_{p\infty}/C_{V\infty} M)^{1/2}$ – скорость высокочастотного звука; T_0 – температура газа; M – молекулярная масса; C_{p0}, $C_{p\infty}$ и C_{V0}, $C_{V\infty}$ – теплоемкости при постоянном давлении и объеме в низкочастотном и высокочастотном пределе.

Для колебательно – возбужденного газа со степенью неравновесности S имеем

$$C_{p0} = C_{p\infty} + C_k + S/(\hat{\tau}_0 - \check{\tau}_0),\ C_{V0} = C_{V\infty} + C_k + S\,\hat{\tau}_0.$$

Для среды с источником тепловыделения, мощность которого $Q(T,\rho)$ [3]

$$C_{p0} = \check{Q} - \hat{Q}, \qquad C_{V0} = -\hat{Q},$$

где $\hat{A} = \partial\ln A/\partial\ln T_0$, $\check{A} = \partial\ln A/\partial\ln\rho_0$ для любой величины A здесь и далее; C_k – колебательная теплоемкость; β_0, β_∞ – коэффициенты низкочастотной и высокочастотной дисперсии.

Коэффициенты вязкости в уравнениях (1) и (2) имеют стандартный вид:

$$\mu = [4\eta/3 + æ(1/C_{V0} - 1/C_{p0}) + \zeta_0]/2\rho_0,$$

$$\mu_\infty = [\,4\eta/3 + æ(1/C_{V\infty} - 1/C_{p\infty})\,]/2\rho_0,$$

где η,æ – коэффициенты сдвиговой вязкости и теплопроводности.

Коэффициенты высокочастотной квадратичной и кубичной нелинейности имеют вид

$$\Psi_\infty = U_\infty(\gamma_\infty + 1)/2\rho_0,\ k_{3\infty} = \Psi_\infty(1 - 0{,}5\Psi_\infty\rho_0/U_\infty)/3\rho_0,$$

где $\gamma_\infty = C_{p\infty}/C_{V\infty}$. Коэффициент диссипации (поглощения при $\zeta_0 > 0$, усиления при $\zeta_0 < 0$) в высокочастотном пределе запишем как

$$\alpha_\infty = \zeta_0 C_{V0}{}^2/2C_{V\infty}{}^2\tau^2 U_\infty{}^3\rho_0,$$

где $\zeta_0 = \rho_0\tau(U_\infty{}^2 - U_0{}^2)C_{V\infty}/C_{V0}$– низкочастотный коэффициент второй вязкости.

Коэффициенты $k_1, k_2 \sim \mu$; $k_{1\infty}, k_{2\infty} \sim \mu_\infty$; $\nu \sim \zeta_0/\tau_0{}^2$ – соответствуют нелинейной вязкости; коэффициенты Ψ_0, k_3 зависят от степени неравновесности среды (в отличие от высокочастотных коэффициентов Ψ_∞, $k_{3\infty}$).

Уравнение (1), записанное для стационарных волн в автомодельной переменной ($z = \zeta - Wy$, где W– скорость волны), имеет достаточно простой вид [8]:

$$\rho_{zz} + (\mu/\beta + K_1\rho)\rho_z + W\rho/\beta + K_2\rho^2 + K_3\rho^3 = 0, \qquad (3)$$

где $K_1 = 2k_1/\beta$; $K_2 = -\Psi_0/2\beta - k_1W/2\beta\mu \approx -\Psi_0/2\beta$; $K_3 = (k_3 + \Psi_0k_1/3\mu)/\beta$.Оно аналогично уравнению движения частицы в потенциальном поле $\Pi = W\rho^2/2\beta + K_2\rho^3/3 + K_3\rho^4/4$ при наличии нелинейного трения $f = (\mu/\beta + K_1\rho)$. Вид потенциала Π и коэффициента нелинейного трения f зависит от характера и степени неравновесности. Например, в условиях, рассмотренных в работе [8], в смеси атмосферного давления $CO_2 : N_2 : He = 1 : 2 : 3$, при $E = 0.01$ Дж/см^3 (S~0.1), где E – удельный энерговклад в колебательные степени свободы, $\mu< 0$, $\beta< 0$, $\Psi_0> 0$, $K_1< 0$, $K_2> 0$, $K_3> 0$. Коэффициент нелинейного трения при этом знакопеременен, а зависимость потенциала от нормированного возмущения плотности газа приведена на рис. 1.

Исследуем решение (3) на фазовой плоскости ($\bar{X}_z = \rho_0^{-1}d\rho/dz$, $\bar{X} = \rho/\rho_0$),ограничиваясь возмущениями сжатия ($\rho > 0$). Вклад в потенциал слагаемого с коэффициентом $K_3 > 0$ несуществен и минимуму потенциала соответствует $\bar{X} = X_0 \approx W/\rho_0|\beta|K_2$.

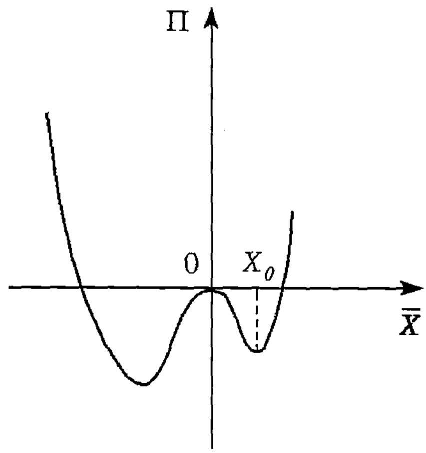


Рис. 1

Если $X_0< X_{кр} - X^*$, где $X_{кр} = -\mu/\beta K_1\rho_0$, $X^* = 2(W|\beta|)^{1/2}/K_1\beta\rho_0$, трение положительно в пределах потенциальной ямы и «частица» падает на дно ямы ($\bar{X}=X_0$). График стационарного решения, соответствующего такому движению «частицы», приведен на рис. 2, *а* (кривая *1*). Оно аналогично неустойчивому стационарному решению, полученному для уравнения Бюргерса с $\mu< 0$ [7]. Если $X_{кр}- X^* < X_0< X_{кр}$, то падение частицы на дно ямы сопровождается осцилляциями (рис.2, *а*, кривая *2*). Стационарное решение тоже неустойчиво. Для скоростей волны W таких, что $X_0>X_{кр}$, трение f становится знакопеременным. Это сопровождается появлением на фазовой плоскости предельного цикла и соответствующего ему автоколебательного режима.

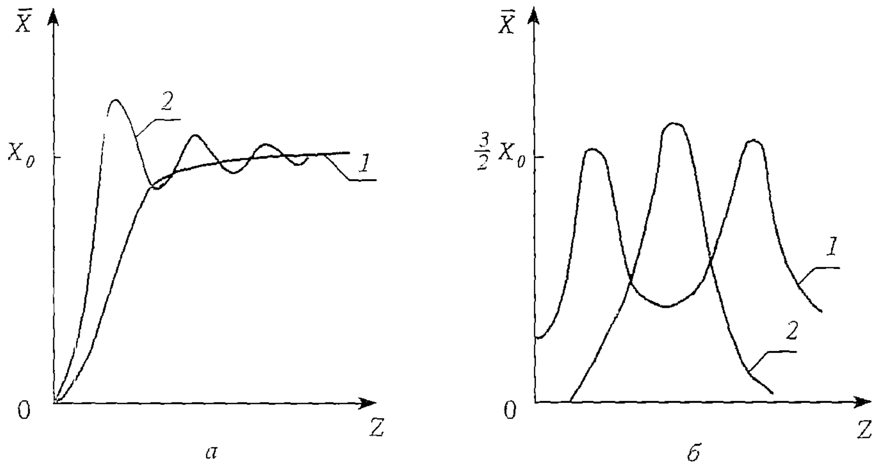
С ростом W цикл приближается к сепаратрисе, а вид стационарных волн – к кноидальным волнам (рис. 2, *б*, кривая *1*). При некотором значении $W=W_c$ (аналитически W_c определить не удается) рождается сепаратриса и возможно существование уединенной несимметричной волны с амплитудой $\bar{X} \approx 1.5X_0$ (рис. 2, *б*, кривая *2*).

Асимметрия уединенной волны следует из асимптотик уравнения (3) ($\rho(z \to \infty) \sim \exp \lambda_1 z$, $\rho(z \to -\infty) \sim \exp \lambda_2 z$):

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{4\beta^2} + \frac{W}{|\beta|}}\,. \tag{4}$$

Так как $\lambda_2 < |\lambda_1|$, то передний фронт волны будет более крутым.

При дальнейшем увеличении W происходит разрушение сепаратрисы и появление фазовой траектории, соответствующей ударной волне с амплитудой X_0 и осцилляциями на фронте (рис. 2, *в*, кривая *1*). Наконец, при еще больших скоростях, когда $X_0 > X_{кр} + X^*$ (в указанной смеси при $W > 0.6$), фронт ударной



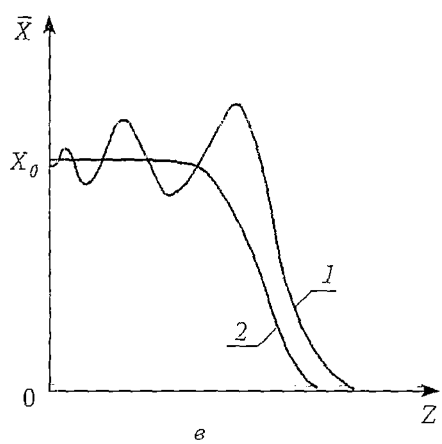


Рис. 2

волны становится монотонным (рис. 2, *в*, кривая *2*) как в равновесной среде с положительной вязкостью. Это следствие того факта, что для ударных волн большой амплитуды, когда температура на фронте примерно равна колеба–тельной температуре молекул ($T \sim T_V$), не выполняются условия отрицательной вязкости ($S > S_{пор}$, где $S_{пор}$– пороговое значение степени неравновесности в среде).

Уравнение (2), описывающее эволюцию высокочастотных волн, исследовалось в [9, 10] в предположении, что $\eta \sim \theta^2$, $\tau/\tilde{T} \sim \theta^{-2}$ (параметры возмущения с резкими фронтами). В этом случае интегральными слагае–мыми, содержащими нелинейную вязкость и диссипацию, с точностью до величин третьего порядка малости можно пренебречь. Стационарные высокочастотные волны при $\zeta_0 < 0$ описываются уравнением типа Ван–дер–Поля:

$$\mu_\infty \rho_{zz} + (W + K_{2\infty}\rho + K_{3\infty}\rho^2)\rho_z + |\alpha_\infty| U_\infty \rho = 0 \qquad (5)$$

где $K_{2\infty} = \Psi_\infty(1-1.5W/U_\infty) \approx \Psi_\infty$; $K_{3\infty} = K_3(S=0, C_k=0) = -U_\infty(\gamma_\infty^2-1)/4\rho_0^2$.

Заметим, что коэффициент $K_{3\infty}$ не зависит от μ_∞. Однако для получения однозначного вида кубичной нелинейности формально необходимо удерживать даже малые слагаемые с нелинейной вязкостью [11].

До сих пор исследовались среды с одним релаксационным процессом. Можно ли уравнения (1), (2) применять при исследовании нелинейной динамики такой многопараметрической среды, какой является плазма?

В [12] подробно исследована акустическая неустойчивость частично ионизованной атомарной плазмы, найдена вторая вязкость и условия ее обращения в различных режимах. Опираясь на эти результаты, рассмотрим механизмы формирования плазменно – акустических структур.

Будем описывать динамику атомарного частично ионизованного газа в постоянном электрическом поле в следующей модели:

$$\partial n_e/\partial t + \mathrm{div}(n_e V_e) = K_i n_e N - K_r n_e^2, \qquad (6)$$

$$1.5\partial(n_e T_e)/\partial t + 1.5 V_e \nabla(n_e T_e) + 2.5\, n_e T_e \mathrm{div}\, V_e = j_e E - 1.5\, n_e \delta \nu_e T_e + æ_e \Delta T_e, \qquad (7)$$

$$\mathrm{div}\, j = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho V) = 0 \qquad (9)$$

$$\rho \partial V/\partial t + (V\nabla)V = -\nabla P - \nabla(n_e T_e) + \eta \Delta V + \eta \nabla \mathrm{div} V/3, \qquad (10)$$

$$C_{V\infty}\rho dT/dt - T d\rho/dt = 1.5 n_e \delta^y \nu_e T_e M - I + Mæ\, \Delta T + \eta M\, \partial V^i/\partial x_k[\partial V^i/\partial x_k +$$

$$+ \partial V^k/\partial x_i \quad (2/3)\delta_{ik} \partial V^i/\partial x_i], \qquad (11)$$

$$P = \rho T/M, \qquad (12)$$

где n_e – плотность электронов; $V_{e,i}$ – скорости электронов и ионов; K_i, K_r – константы скорости рекомбинации и ионизации; T_e – температура электронов; $j_e = -en_e V_e$ – электронная компонента тока; E – напряженность электрического поля; δ – коэффициент передачи электронной энергии; ν_e – частота электрон–нейтральных соударений; $æ_e$ – коэффициент электронной теплопроводности; $j = -en_e V_e + en_e V^i$ – плотность тока; V – скорость нейтральной компоненты; V^i, V^k – компоненты вектора V; x_i, x_k – компоненты радиус–вектора R; δ_{ik} – символ Кронекера; $\delta^y = 2m/M$ (m – масса электрона); I –мощность теплоотвода (для простоты полагалось, что I не зависит от ρ, T).

Введем параметр $\eta_e = n_e M/\rho$ – степень ионизации плазмы и далее используем условия $S_e = T_e/T_0 >> 1$, $S_e \eta_e << 1$, характерные для слабоионизованной плазмы тлеющего разряда.

Приведенная модель использовалась при изучении акустической устойчивости плазмы в [12]. Согласно этой модели в атомарной плазме можно выделить следующие степени свободы, время релаксации которых τ_i имеет масштаб примерно равный ω^{-1} (ω – частота акустических волн): трансляционную энергию электронов, степень ионизации η_e и джоулевый нагрев газа. Релаксация этих параметров формирует эффективные релаксационные вязкость, дисперсию, нелинейность, а также характерные соответствующие им релаксационные времена: $\tau_T = (\delta\nu_e)^{-1}$ – время передачи энергии электронов при соударениях, $\tau_r = (K_r n_e)^{-1}$ – время диссоциативной рекомбинации как масштаб времени релаксации степени ионизации, $\tau_н = \delta^y S_e \eta_e/\delta\tau_T$ – время нагрева газа.

Ограничимся случаем, когда нет процесов с $\tau/\tilde{T} \sim 1$, т.е. $\tau_i/\tilde{T} \sim (\tau_j/\tilde{T})^{-1} \sim \theta << 1$, где i – нумерует низкочастотные процессы, j – высокочастотные. В этих условиях можно ввести низкочастотный α_0 и высокочастотный α_∞ коэффициенты диссипации [12], представляющие собой сумму коэффициентов, каждый из которых обусловлен релаксационной вязкостью, задаваемой конкретным механизмом. Среды с многопараметрической релаксацией при $\tau/\tilde{T} \sim 1$ рассмотрены в [4], где показано, что коэффициенты диссипации и релаксационной вязкости теряют свойство аддитивности.

Представим возмущения параметров плазмы и газа в акустической волне в таком виде:

$$\rho = \theta\rho^{(1)} + \theta^2\rho^{(2)}, \qquad n_e = \theta n_e^{(1)} + \theta^2 n_e^{(2)}, \tag{13}$$

аналогично – для возмущений всех других параметров газа и плазмы.

Связи между величинами первого порядка следуют из линеаризованной модели (6)–(12):

$$V^{(1)}/U_\infty = \rho^{(1)}/\rho_0; \quad P^{(1)}/P_0 = \gamma_\infty\rho^{(1)}/\rho_0;$$

$$\frac{T_e^{(1)}}{T_{e0}} = \begin{cases} 0 & \tau_T/\tilde{T} >> 1 \\ -\ 2\rho^{(1)}/\rho_0 B, & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} >> 1 \\ -\ 2\rho^{(1)}/(B + 2\bar{K}_i\cos^2\varphi)\rho_0; & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} << 1 \end{cases}$$

$$\frac{n_e^{(1)}}{n_{e0}} = \begin{cases} \rho^{(1)}/\rho_0, & \tau_T/\tilde{T} >> 1 \\ \rho^{(1)}/\rho_0, & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} >> 1 \\ \dfrac{\rho^{(1)}[B + 2\bar{K}_i(\cos^2\varphi - 1)]}{\rho_0(B + 2\bar{K}_i\cos^2\varphi)}, & \tau_T/\tilde{T} << 1,\ \tau_r/\tilde{T} << 1 \end{cases}$$

где $B = 1 + \delta\bar{\nu}_e + (1 - 2\cos^2\varphi)\bar{\nu}_e$, φ – угол между направлением распространения возмущения и скорости электронного дрейфа V_{e0}; для любого A обозначено $\bar{A} = \partial\ln A/\partial\ln T_{e0}$. Ниже будем рассматривать возмущения распространяющиеся только вдоль электронного дрейфа ($\varphi = 0$), тогда систему уравнений (6) – (12) можно переписать в одномерном виде для пространственной переменной x.

Подставляя (13) в эту одномерную систему и используя связи между величинами первого порядка, получим с помощью метода медленно изменяющегося профиля (метод Хохлова) в системе координат $y = \theta t$, $\zeta = x - U_s t$ уравнение с точностью до величин $\sim\theta^2$

$$\rho_y = \mu\rho_{\zeta\zeta} - \Psi_\infty\rho\rho_\zeta - \alpha_\infty U_\infty\rho. \tag{14}$$

Здесь Ψ_∞ совпадает с коэффициентом в формуле (2), в величину μ дают вклад все релаксационные процессы с $\tau_i/\tilde{T} \sim \theta$,

$$\mu = [4\eta/3 + æ(1/C_{V\infty} - 1/C_{p\infty})]/2\rho_0 + \sum_i \mu^i_{lk},$$

а в α_∞ – все релаксационные процессы с характерными временами $\tau_j/\tilde{T} \sim \theta^{-1}$,

$$\alpha_\infty = \sum_j \alpha^{\infty j}_{ln},$$

где $$\mu^i_{lk} = \frac{\tau_i C_{Vl}}{2C_{Vk}}(U_{sl}^2 - U_{sk}^2), \quad \alpha^{\infty j}_{ln} = \frac{\mu^j_{ln} C_{Vn}^2}{\tau_j^2 U_{sl}^3 C_{Vl}^2}, \quad U_{sl} = (C_{pl}T_0/C_{Vl}M)^{1/2}.$$

Значения этих коэффициентов в различных режимах существования слабоионизованной плазмы получены в [12].

Знаки коэффициентов μ и α_∞ зависят от параметров плазмы и спектра газодинамического возмущения, обусловливая различные возможные решения уравнения (14).

При $\alpha_\infty = 0$ уравнение (14) суть уравнения Бюргерса. Оно описывает затухание газодинамического возмущения конечной площади при $M > 0$ и его коллапс при $\mu < 0$ [2, 7].

При $\alpha_\infty \neq 0$ уравнение (14) является уравнением Бюргерса с источником. Если $\mu > 0$, $\alpha_\infty > 0$, газодинамическое возмущение затухает, при $\mu < 0$, $\alpha_\infty < 0$ – неограниченно нарастает.

Широко исследовался случай, когда $\mu > 0$, $\alpha_\infty < 0$. Согласно [13] при таких знаках коэффициентов диссипации уравнение (14) является эталонным в теории активных сред. Оно было получено, например, в химически активной среде [14], колебательно–возбужденном газе [8], в средах с произвольным источником тепловыделения, мощность которого зависит от плотности [10].

В [13] показано, что ограниченные стационарные решения уравнения (14) при $\mu > 0$, $\alpha_\infty < 0$ обязательно периодические. Нестационарные периодические волны в такой среде затухают при $\tilde{T}^{-1} > (\alpha_\infty U_\infty^3/\mu)^{1/2}$ и нарастают до конечной амплитуды при $\tilde{T}^{-1} < (\alpha_\infty U_\infty^3/\mu)^{1/2}$. При $\tilde{T}^{-1} << (\alpha_\infty U_\infty^3/\mu)^{1/2}$ это нарастание, связанное с инкрементом α_∞, приводит к сильному искажению профиля волны, вплоть до образования крутых фронтов, где уже существенна диссипация, определяемая коэффициентом μ. В результате диссипации энергии на фронте происходит стабилизация профиля – установление стационарной нелинейной пилообразной волны с безразмерной амплитудой $X_0 \sim \pi\alpha_\infty U_\infty \tilde{T}$ и шириной фронта, пропорциональной $\mu/X_0 U_s$. В пределах применимости уравнения (14) стационарная волна распространяется только со скоростью звука (W=0), причем эта волна оказывается неустойчивой по отношению к длинноволновым возмущениям, приводящим к установлению волны с максимально возможным периодом. Согласно [13] в реальной ситуации этот период может определяться как начальными, так и граничными условиями. Заметим, что для таких длинноволновых возмущений ($\tau_j/\tilde{T} \leq 1$) отрицательная релаксационная вязкость будет давать вклад уже не в α_∞, а в μ и при $\mu<0$ устойчивых стационарных волн вообще не будет. Насыщение неустойчивости при $\mu<0$ возможно в следующем приближении теории возмущения, учитывающем нелинейность вязкости и кубичную нелинейность. Этот учет приводит к уравнению типа (1), подробно рассмотренному выше.

При $W \neq 0$, $\mu > 0$, $\alpha < 0$ возмущения, описываемые уравнением (14), будут неограниченно возрастать и необходимо учитывать величины более высокого порядка малости.

Согласно [12] основной вклад в акустический коэффициент усиления в слабоионизованной плазме вносит джоулевый нагрев с характерным временем τ_H. Для простоты изложения будем полагать: $(\tau_r/\tilde{T})^{-1} \sim \theta^2$; $\eta, æ \sim \theta^2$; $\tau_T/\tilde{T} \sim \theta^2$; $(\tau_H/\tilde{T})^{-1} \sim \theta$; $\rho/\rho_0 \sim \theta$.

В этом случае с точностью до величин $\sim \theta^3$ диссипация, связанная с релаксацией степени ионизации, электронной температуры, сдвиговой вязкостью и теплопроводностью, будет по–прежнему линейной, а диссипация, связанная с релаксацией источника (джоулевый нагрев), – нелинейной.

Подставим в уравнения (6) – (12) возмущения в виде

$$\rho = \theta\rho^{(1)} + \theta^2\rho^{(2)} + \theta^3\rho^{(3)}, \tag{15}$$

$$n_e = \theta n_e^{(1)} + \theta^2 n_e^{(2)} + \theta^3 n_e^{(3)} \text{ и т.д.}$$

Связи между величинами второго порядка малости в координатах $y = \theta t$, $\zeta = x - U_\infty t$, следующие из исходной системы уравнений, имеют в указанных пределах вид

$$\frac{V^{(2)}}{U_\infty} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho_0} + \frac{\alpha_\infty}{\rho_0}\int\rho^{(1)}d\zeta - \frac{(1-\Psi_\infty\rho_0/2U_\infty)\rho^{(1)2}}{\rho_0^2},$$

$$\frac{P^{(2)}}{P_0} = \frac{U_\infty^2\rho^{(2)}}{P_0} + \frac{2\alpha_\infty U_\infty^2}{P_0}\int\rho^{(1)}d\zeta - \left(1 - \frac{\Psi_\infty\rho_\infty}{U_\infty}\right)\frac{U_\infty^2}{P_0\rho_0}\rho^{(1)2}, \tag{16}$$

$$\frac{n_e^{(2)}}{n_{e0}} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho_0}, \qquad \frac{T_e^{(2)}}{T_{e0}} = -\frac{2\rho^{(2)}}{B\,\rho_0} + \left[4\,\frac{(\bar{\bar{v}}_e - \overline{\delta v}_e - \overline{\overline{\delta v}}_e)}{B^3} - \frac{1}{B} + \frac{4(1+\overline{\delta v}_e)}{B}\right]\frac{\rho^{(1)2}}{\rho_0^2}.$$

После подстановки этих соотношений в исходную систему уравнений с помощью стандартных преобразований получим с точностью до величин $\sim\theta^3$ следующее уравнение, описывающее эволюцию волн плотности

$$\rho_y = \beta_\infty \int \rho d\zeta + \mu\rho_{\zeta\zeta} - \Psi_\infty \rho\rho_\zeta + k_{3\infty}\rho_\zeta^{\,3} - \Psi_\infty\alpha_\infty\rho_\zeta \int\rho d\zeta - \alpha_\infty U_\infty \rho - \nu\rho^2, \tag{17}$$

где $\beta_\infty = 1.5\alpha_\infty^2 U_\infty$, $\mu = (4\eta/3 + æ/C_{V\infty}C_{p\infty})/2\rho_0 + \mu^T_{2r}$.

В обычных экспериментальных условиях слабоионизованной плазмы $\mu > 0$; $\alpha_\infty = \alpha^{\infty r}_{r0} + \alpha^{\infty н}_{r1}$ (значения коэффициентов, условия их обращения найдены в [12]),

$$\nu = (-5\Psi_\infty/4 + 2U_\infty/\rho_0)\alpha^{\infty н}_{r1} - \{(1+\bar{v}_e)[-3/B + 4(\bar{\bar{v}}_e - \overline{\overline{\delta v}}_e - \overline{\delta v}_e)/B^3 + 4/B^2 + 4\overline{\delta v}_e/B^2] + 4(\bar{\bar{v}}_e + \bar{v}_e)/B^2\}/2\tau_н C_{p\infty}\,\rho_0\,;$$

$\bar{\bar{A}} = T_e^2(\partial^2 A/\partial T_e^2)/2A$ для любой величины A. Остальные коэффициенты совпадают при $S_e\eta_e \ll 1$ с соответствующими коэффициентами в уравнении (2).

Уравнение (17) значительно упрощается при $B = 2(1 + \bar{v}_e) \pm \theta$. Тогда $\alpha_\infty \sim \theta^2$ и интегральными слагаемыми можно пренебречь.Стационарная форма этого уравнения такова:

$$\mu\rho_{zz} + (W - \Psi_\infty\rho + 3K_{3\infty}\rho^2)\rho_z - \alpha_\infty U_\infty\rho - \nu\rho^2 = 0, \tag{18}$$

где $z = x - Wy$, $K_{3\infty} \approx -U_\infty(\gamma_\infty^2 - 1)/4\rho_0^2$ как и в (5) (при нахождении $K_{3\infty}$ учтено замечание, сделанное после уравнения (5)).

В акустически неустойчивой по линейному приближению среде $\alpha_\infty < 0$, а коэффициент нелинейной диссипации может быть как отрицательным (нелинейное усиление), так и положительным (нелинейное поглощение).

При $\alpha_\infty < 0$, $\nu < 0$ уравнение (18) является уравнением Ван–дер–Поля с кубическим потенциалом и при $W > 0$ возможно существование предельного цикла и соответствующего ему автоколебательного режима.

При $\alpha_\infty < 0$, $\nu > 0$ уравнение (18) на фазовой плоскости $(\bar{X}_z, \bar{X} = \rho/\rho_0)$ имеет две особые точки: (0,0) и $(0, |\alpha_\infty| U_\infty/\nu\,\rho_0)$. Вторая точка всегда седло, а тип первой определяется величиной параметра W (скоростью стационарной волны). При $W = 0$ это – центр и стационарные волны аналогичны получаемым на основе уравнения (14) волнам, распространяющимся со скоростью звука. Наличие нелинейного поглощения с коэффициентом ν приводит к появлению стационарных структур иного вида. При $0 < W < 2\sqrt{\mu|\alpha_\infty| U_\infty}$ особая точка (0,0) является устойчивым фокусом, а при $W > 2\sqrt{\mu|\alpha_\infty| U_\infty}$ – устойчивым узлом. Соответствующие структуры имеют вид ударных волн с осцилляциями на фронте в первом случае и монотонным фронтом – во втором. Амплитуда ρ ударной волны в плазме равна $|\alpha_\infty| U_\infty/\nu$ в отличие от амплитуды слабой ударной волны в газе, пропорциональной $2W/\Psi_\infty$.

Акустическая устойчивость плазмы относительно волн бесконечно малой амплитуды не означает того же для волн конечной амплитуды. Затухание звука в линейном приближении ($\alpha_\infty > 0$) и неустойчивость в нелинейном ($\nu < 0$) возможны, так как с ростом глубины модуляции плотности нейтральной компоненты плазмы растет степень сфазированности возмущений T_e и ρ, т.е. уменьшается отрицательная обратная связь между ними. Это, в свою очередь, объясняется тем, что с ростом глубины модуляции (амплитуды волны) существенными становятся эффекты расширения локально нагретых областей плазмы в минимумах плотности газа. Эти эффекты расширяют область акустической неустойчивости плазмы.

При $\alpha_\infty>0, \nu<0$ решением уравнения (18) являются в области $\rho>0$ структуры, аналогичные структурам исследуемого уравнения (3), поскольку слагаемые с коэффициентом $K_{3\infty}<0$ не играют в уравнениях (3) и (18) определяющей роли. Поправки, связанные с ними, легко учесть. Если ими пренебречь, можно воспользоваться результатами уже проведенного анализа (см. рис.2), имея ввиду теперь, что $X_0 \cong |\alpha_\infty| U_\infty / \rho_0 \nu$, $X_{кр} \cong W/\Psi_\infty \rho_0$, $X^* \cong 2\sqrt{\alpha_\infty U_\infty \mu}/\Psi_\infty \rho_0$.

Несмотря на структурное сходство уравнений (3) и (18), динамика волн, ими определяемая, совершенно различна. Обратим внимание на два важных отличия. Во–первых, при условиях, сформулированных для уравнения (3), существование ударной волны возможно лишь при достаточно больших ее скоростях, что объясняется нелинейным «насыщением» отрицательной второй вязкости. Согласно уравнению (18) при $\alpha_\infty> 0$, $\nu< 0$ ударная волна возможна, наоборот, лишь при достаточно малых скоростях, когда еще не существенно нелинейное усиление. Во–вторых, амплитуда ударной волны и солитона в условиях уравнения (3) пропорциональна, как и в равновесном газе, скорости волны. При условиях, сформулированных для уравнения (18), плазменно–акустическая волна имеет амплитуду $\sim U_\infty \alpha_\infty / |\nu|$, не зависящую от W. Скорость ее выступает только как бифуркационный параметр.

В заключение еще раз подчеркнем, что введение в явном виде релаксационной вязкости позволит осуществить единый подход к широкому классу неравновесных сред, включая плазму, лазерные и химически активные смеси и т.д. Этот прием удобен как для описания неустойчивости подобных сред, так и для исследования нелинейной эволюции волн на основе единого вида уравнений с сохранением прозрачной физической трактовки решений.

Библиографический список

1. *Стретт Дж.В. (лорд Релей)*. Теория звука. М.: ГИТЛ, 1955. Т.2.
2. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Коллапс акустических волн в неравновесном молекулярном газе //ЖТФ. 1986. Т.56, № 5. С. 941.
3. *Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Вторая вязкость в термодинамически неравновесных средах // ЖЭТФ. 1988. Т. 94, № 3. С. 128.
4. *Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Препринт ФИАН СССР №106. 1990.
5. *Исакович М.А.* Общая акустика. М.: Наука, 1973.
6. *Завершинский И.П.,Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* О механизме усиления звука в слабоионизированном газе // ЖЭТФ. 1991. Т. 100, № 2(8). С. 422.
7. *Пелиновский Е.Н., Фридман В.Е.* Взрывная неустойчивость нелинейных волн в средах с отрицательной вязкостью // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 38, № 6. С. 991.
8. *Коган Е.Я., Молевич Н.Е., Ораевский А.Н.* Структура нелинейных акустических волн в неравновесном колебательно–возбужденном газе //Письма ЖТФ. 1987. Т. 13, № 14. С. 836.
9. *Молевич Н.Е.* //Сибирский физико–технический журнал. 1991. № 1. С. 133.
10. *Молевич Н.Е.* Волны в средах с отрицательной второй вязкостью. Дис. … канд. физ.–мат. наук / ФИАН СССР. М., 1987.
11. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики, М.: Наука, 1975.
12. *Завершинский И.П., Коган Е.Я., Молевич Н.Е.* Акустические волны в частично ионизованном газе //Акустический журнал. 1992. Т. 38, № 4. С. 702.
13. *Рабинович М.И., Фабрикант А.Л.* // Изв. вузов СССР. Сер. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 721.

14. *Борисов А.А.* // Теплофизические исследования. М.: ИТФ СО АН СССР, 1977. С. 52.

Самарский государственный педагогический институт — *Поступила в редакцию* 29.03.92, *после переработки* 25.03.93

THE FORMATION OF DISSIPATIVE STRUCTURES IN THE ACOUSTIC FIELD

I.P. Zavershinski, E.Ya. Kogan, N.E. Molevich

A theory describing the formation of plasma–acoustic structures in a non–equilibrium plasma has been built. The community of the evolutionary equations in relaxing gas media and in plasma has been shown. The investigation of non–linear dynamics of non–equilibrium gas and plasma media is made on the ground of these basic equations.

Завершинский Игорь Петрович – родился в 1963 году, окончил Куйбышевский государственный университет (1985). Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук по физике волновых процессов в плазме (1990). В настоящее время работает старшим преподавателем на кафедре общей физики в Самарском педагогическом институте. Область научных интересов – нелинейная акустика, физика низкотемпературной плазмы. Автор более 10 статей по направлениям, указанным выше.

Коган Ефим Яковлевич – родился в 1940 году. В 1963 году окончил Полтавский строительный институт. В 1970 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в Харьковском университете по физике плазмы. В 1985 году в Институте высоких температур Академии наук защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико–математических наук. В настоящее время заведует кафедрой физики в Самарском педагогическом институте, профессор. Область научных интересов нелинейная физика стохастических явлений в динамических системах. Имеет свыше ста работ по взаимодействию частиц с поверхностью, циклы работ по элементарным процессам в турбулентной плазме и по нелинейной акустике сильно неравновесных сред.

Молевич Нонна Евгеньевна – родилась в 1959 году, окончила в 1982 году Московский инженерно–физический институт. В 1989 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в Физическом институте Академии наук. В настоящее время работает старшим преподавателем в Самарском педагогическом институте. Область научных интересов акустика неравновесных, химически активных сред, физика плазменных сред. Опубликовала более 60 статей и докладов, в том числе и на международных конференциях.