Дебют

Изв.вузов «ПНД»,т.1,№ 3,4,1993 УДК 53.01.072:517.9

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Е.С.Мчедлова

Проведено аналитическое исследование поведения нелинейного параметрического осциллятора с использованием метода Мельникова. Получена функциональная связь между управляющими параметрами, определяющая те значения последних, при которых может наблюдаться сложная, хаотическая динамика.

При изучении динамической системы наибольший интерес представляет зависимость ее поведения от соотношений между параметрами, определяющими внешнее воздействие, и собственными характеристиками системы. Настоящая работа посвящена нахождению подобной зависимости методом, использующим функцию Мельникова [1].

Известно, что одним из факторов, обусловливающих сложность динамики системы, является присутствие гомоклинических траекторий в сечении Пуанкаре. Метод Мельникова, по–существу, представляет собой критерий существования такой гомоклинической структуры. Наличие гомоклиники хорошо известно для нелинейных параметрических систем и исследовалось многими авторами. Например, в работах [2,3] содержится оценка толщины стохастического слоя для систем данного класса.

В качестве исследуемой модели был выбран нелинейный параметрический осциллятор с диссипацией, который может быть описан уравнением

$$\ddot{x} + a\dot{x} + (\lambda_0 + \lambda_1 \cos \Omega t)\sin x = 0 \qquad (1)$$

Для дальнейшего анализа уравнение (1) удобно переписать в виде

$$\dot{x} = v,$$

$$v = -\lambda_0 \sin x + \varepsilon(-av - \lambda_1 \cos \Omega t \sin x),$$

где ε – малый параметр.

Невозмущенная система (при $\varepsilon = 0$) интегрируема и имеет гиперболические особые точки, например $x = \pm \pi$, $v = 0$. Сепаратрисе, проходящей через них, соответствует постоянное значение гамильтониана $H_0 = \lambda_0$. Это эквивалентно тому, что

$$\frac{v^2}{2} - \lambda_0 \cos x = \lambda_0$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2\lambda_0(1 + \cos x)}.$$

Отсюда находим решение на сепаратрисе в гамильтоновой системе. Оно выражается формулами

$$x_0 = 2\arcsin(\operatorname{th}\sqrt{\lambda_0}\,t), \qquad v_0 = 2\sqrt{\lambda_0}/\operatorname{ch}\sqrt{\lambda_0}\,t.$$

В основе метода лежит вычисление функции Мельникова $D\ (t_0)$ [4, 5, 6], которая представляет собой меру расстояния между устойчивым и неустойчивым многообразиями в сечении Пуанкаре возмущенной системы в некоторый момент времени t_0 и определяется как проекция вектора (характеризующего это расстояние) на нормаль к сепаратрисе в системе без возмущения:

$$D(t_0) = -\int_{-\infty}^{+\infty} v_0(-av_0 - \lambda_1 \sin x_0 \cos\Omega\, t)dt. \tag{2}$$

Подставляя решение невозмущенной системы в формулу (2), приходим к выражению

$$D(t_0) = 4a\lambda_0 \int_{\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2(\sqrt{\lambda_0}(t-t_0))} + 2\lambda_1\sqrt{\lambda_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[2\arcsin(\operatorname{th}(\sqrt{\lambda_0}(t-t_0)))]}{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_0}(t-t_0))}\cos\Omega\, t dt. \tag{3}$$

Первый интеграл в формуле (3) берется элементарно и равен 2, а второй вычисляется по методу контурных интегралов через вычеты в точках $\tau = \pi i(2n+1)/2$, которые служат для подынтегральной функции полюсами второго порядка, где $\tau = \sqrt{\lambda_0}(t-t_0)$.

Окончательно имеем:

$$D(t_0) = 8a\sqrt{\lambda_0} - \pi\frac{e^4-1}{e^2}\frac{\Omega}{\sqrt{\lambda_0}}\lambda_1\frac{\sin\Omega\, t_0}{\operatorname{ch}(\pi\,\Omega/2\sqrt{\lambda_0})}.$$

Движение вблизи сепаратрисы становится непредсказуемым, когда устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются, то есть образуется гомоклиническая траектория. Это имеет место, когда $D\ (t_0)$ меняет знак, что равносильно неравенству

$$\lambda_1 \geq \frac{8\,e^2}{\pi(e^4-1)}\frac{a\lambda_0}{\Omega}\operatorname{ch}\frac{\pi\,\Omega}{2\sqrt{\lambda_0}}, \tag{4}$$

где множители ε опущены.

Неравенство (4) определяет область в пространстве параметров λ_1, λ_0, Ω и a, в которой может наблюдаться сложная, хаотическая динамика.

Графическая интерпретация условия (4) представлена на рисунке в виде проекций четырехмерного пространства параметров уравнения (1) на плоскость. Кривые соответствуют предельному случаю – равенству в выражении (4), и являются границами, разделяющими области регулярной и сложной динамики. Значения параметров, лежащие ниже границ по оси ординат, соответствуют периодическим движениям в системе.

Использованный в работе метод дает необходимое, но недостаточное условие хаоса. Однако его можно считать критерием предсказуемости поведения динамической системы.

В заключение хотелось бы отметить, что рассмотренная математическая модель обладает высокой степенью всеобщности, и поэтому полученный результат

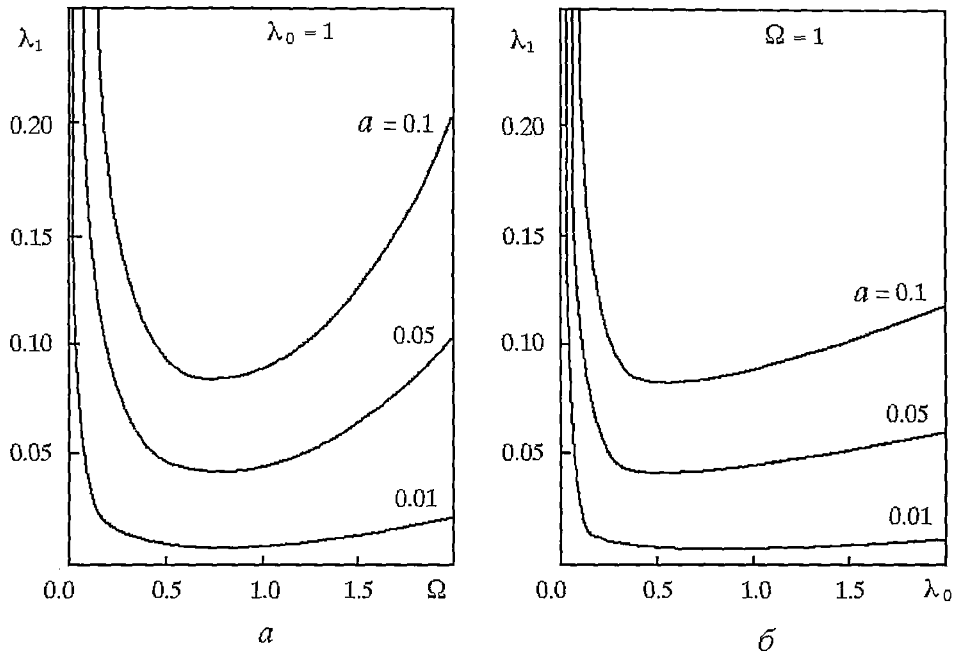

Рис. Границы, разделяющие области регулярной и сложной динамики, представленные для различных значений *a* в пространстве параметров λ_1, Ω – (*а*); λ_1, λ_0 (*б*): *a* – величина, характеризующая диссипацию в системе, λ_0 – квадрат собственной частоты, λ_1 и Ω – амплитуда и частота внешнего параметрического воздействия

может быть обобщен на широкий класс физических систем, описываемых уравнениями типа (1).

Автор выражает глубокую благодарность профессору Трубецкову Дмитрию Ивановичу, которому обязан выбором интересной темы исследования, за полезные замечания, сделанные в процессе выполнения работы и по ее завершении. Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность рецензенту за ценные замечания, которые способствовали существенному улучшению статьи.

Библиографический список

1. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об–ва. 1963. Т.12. С.3–52.

2. *Гапонов–Грехов А.В., Рабинович М.И.*Нелинейная физика,стохастичность и структуры. Препринт ИПФ АН СССР, 1983, № 87.

3. *Афраймович В.С., Рабинович М.И., Угодников А.Д.* // Радиофизика. 1984.Т.27, № 10.С.1346.

4. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. С. 248, 400–403.

5. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. С. 457–463.

6. *Мун Ф.* Хаотические колебания. М.: Мир, 1990. С. 183–186, 275.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 1.10.92,
после переработки 10.04.93.

ANALYTICAL APPROACH TO COMPLICATED DYNAMICS OF PARAMETRIC OSCILLATOR

E.S. Mchedlova

Behaviour of the nonlinear parametric oscillator is investigated analytically by Melnikov's method. Presented in the paper, the functional dependence gives the boundary of region in parametre space of system, where a complicated dynamics is possible.

Мчедлова Елена Сумбатовна – родилась в 1971 году в Саратове. Студентка 5-ого курса физического факультета Саратовского университета. Область научных интересов – нелинейная динамика, моделирование явлений в электронных потоках.