В разделе “Методические заметки” мы предлагаем Вашему вниманию решение задачи, опубликованной в прошлом номере.

Задача. Маятник в виде жесткого невесомого стержня длиной l, на конце которого укреплен массивный шарик, отклонили на малый угол α от неустойчивого положения равновесия и отпустили без начальной скорости. Используя малость α, определите, через какое время маятник пройдет нижнее положение равновесия.

Решение. Построим приближенное решение этой задачи, используя малость начального угла отклонения маятника α . Мы можем описать две стадии движения маятника. Во–первых, непосредственно вблизи верхней точки, когда угловое смещение маятника еще мало. Во–вторых, вдали от верхней точки, когда можно “забыть” о маленьком начальном смещении маятника. Если говорить о фазовом портрете, то первое решение будет описывать динамику маятника в окрестности седловой неподвижной точки, а второе решение – вблизи сепаратрисы.

Итак, строгое уравнение движения маятника имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + (g/l)\sin\varphi = 0. \tag{1}$$

Здесь φ – текущая угловая координата маятника, причем верхней точке равновесия соответствует $\varphi = -\pi$, а нижней – $\varphi = 0$; g – ускорение свободного падения; l –длина маятника.

Линеаризуем уравнение движения (1) вблизи верхней точки.

Считая, что $\varphi = -\pi + \xi$, получаем

$$\ddot{\xi} - (g/l)\,\xi = 0. \tag{2}$$

Если начальное смещение равно α, а начальная скорость равна нулю, то уравнение (4) имеет простое решение:

$$\xi = \alpha\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{g/l}\,t). \tag{3}$$

Теперь найдем решение, отвечающее движению по сепаратрисе. Запишем закон сохранения энергии

$$\dot{\varphi}^2/2 - (g/l)\cos\varphi = g/l\,. \tag{4}$$

Здесь мы пренебрегаем начальной потенциальной энергией маятника. Из соотношения (4) находим выражение для угловой скорости

$$\dot{\varphi} = 2\sqrt{g/l}\cos(\varphi/2). \tag{5}$$

Уравнение (5) может быть непосредственно проинтегрировано

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} [C \exp(\sqrt{g/l}\, t)] - \pi, \tag{6}$$

где C – константа интегрирования. Формула (6) описывает такое движение маятника, когда за "бесконечное" время маятник совершает полный оборот и "замирает" в верхней точке. Константа C связана с произволом в начале отсчета времени.

Оказывается, что для решений (3) и (6) имеется область, в которой их асимптотики перекрываются. Действительно, при больших t решение (3) имеет асимптотику

$$\xi = (\alpha/2) \exp(\sqrt{g/l}\, t). \tag{7}$$

В свою очередь, из соотношения (6) при $t \to -\infty$, получаем:

$$\xi = 4C \exp(\sqrt{g/l}\, t). \tag{8}$$

Теперь "сошьем" решения (7) и (8). Для этого необходимо положить

$$C = \alpha/8 \tag{9}$$

Окончательно получаем:

$$\varphi = 4 \operatorname{arctg} [(\alpha/8)\exp(\sqrt{gt/l}\,)] - \pi. \tag{10}$$

Время T, за которое маятник достигнет нижней точки, находим из условия $\varphi = 0$. Тогда из (10) следует, что

$$T = \sqrt{l/g}\, \ln (8/\alpha). \tag{11}$$

Как и должно быть, время движения T стремится к бесконечности, если начальный угол α стремится к нулю. Наше приближенное решение работает тем лучше, чем меньше α.

А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов