



## «Кристаллы» и «квазикристаллы» в неравновесных средах

*Генри Д.И. Абарбанель, М.И. Рабинович, Л.Ш. Цимринг*

Предлагаемый читателю материал представляет собой переработанные специально для данного выпуска две главы обзорного характера, готовящейся к изданию книги авторов «Теория динамического беспорядка». С позиций нелинейной динамики обсуждается формирование регулярных кристаллических и квазикристаллических структур в различных неравновесных средах, в частности, квазидвумерных гидродинамических течениях.

### Введение

Данная статья посвящена обсуждению того, что можно назвать «Динамическая теория паттернов». Под словом «паттерны» здесь понимаются пространственные узоры или структуры в самом широком смысле. Это и регулярные пространственные распределения полей, и другой предельный случай – пространственный беспорядок.

Обратимся к трем экспериментальным результатам по исследованию паттернов на поверхности жидкости. Они представлены на фотографиях рис. 1–3. На рис. 1 изображен мгновенный снимок регулярно взволнованной поверхности бассейна [1], на рис. 2 – шестигранная решетка конвекции Бенара – Марангони [2], на рис. 3 – неупорядоченная картина капиллярной ряби слоя жидкости, находящегося в осциллирующем гравитационном поле [3]. Исследование подобных паттернов с позиций нелинейной динамики требует ответа на множество вопросов, а именно: почему паттерны устойчивы, как они устанавливаются из произвольных начальных условий, как модифицируется паттерн при изменении параметров эксперимента и, наконец, как описывать подобные структуры?

Кажется, что последний вопрос – как описывать уже имеющиеся структуры – проще других. При рассмотрении фотографий прежде всего бросается в глаза существование определенного пространственного масштаба. В случае регулярной решетки (см. рис. 1) – это длина взаимноортогональных стоячих волн, в случае неупорядоченной ряби (см. рис. 3) – длина параметрически возбуждаемых волн на поверхности слоя жидкости. Таким образом, естественно представить наблюдаемое поле в виде суперпозиции плоских волн с одинаковыми по модулю волновыми векторами

$$u(\mathbf{r}, t_0) = \sum_n a_n e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} + c.c., \quad (1)$$

где  $a_n$  – числа, а все волновые вектора  $\mathbf{k}_n$  одинаковы по модулю  $|\mathbf{k}_n| = k_0$ . Тогда решетке с квадратными ячейками отвечают четыре моды с волновыми векторами, развернутыми под углом  $90^\circ$  (рис. 4, а); решетке с шестигранными ячейками – шесть плоских волн, волновые вектора которых повернуты на угол  $60^\circ$

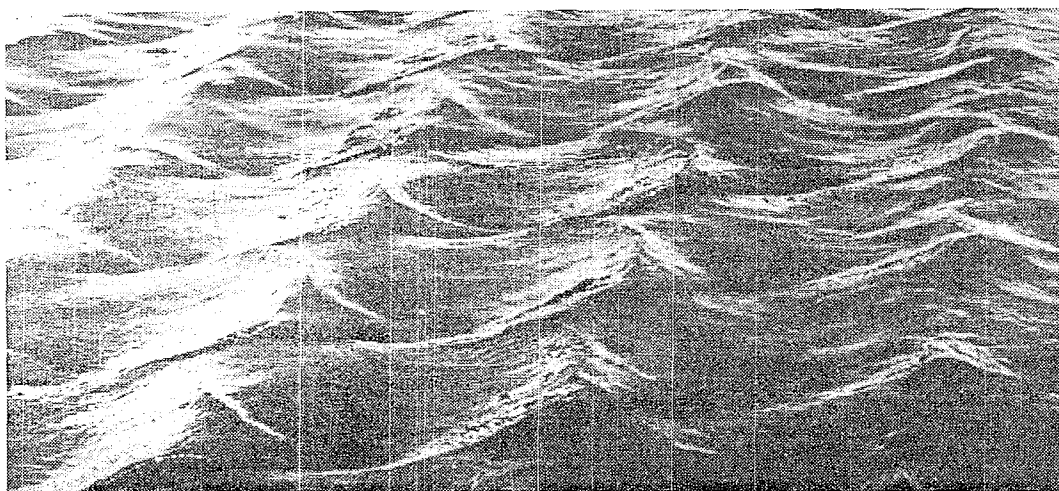


Рис. 1. Решетка стоячих поверхностных волн с квадратными ячейками [1]

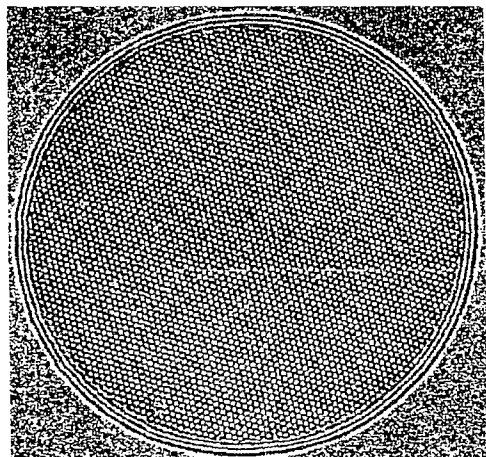


Рис. 2. Шестигранная структура конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу [2]

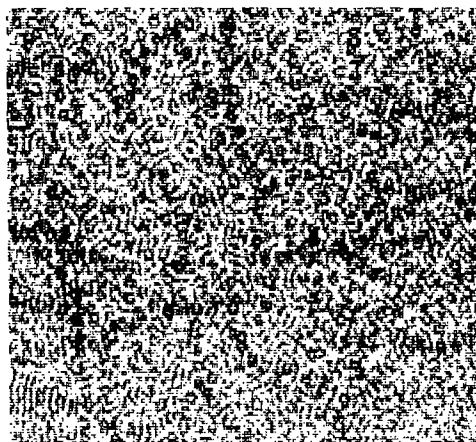


Рис. 3. Пространственно-временной беспорядок капиллярных волн на поверхности горизонтального слоя жидкости, помещенного в осциллирующее гравитационное поле [3] – неупорядоченная «рябь Фарадея»

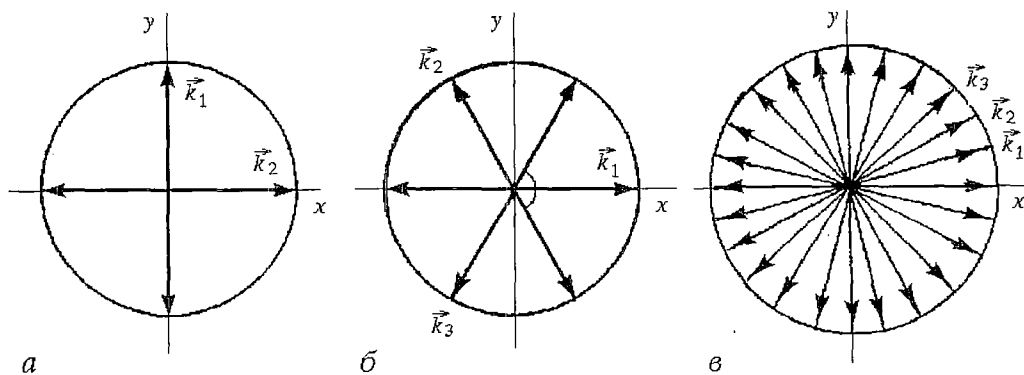


Рис. 4. Модовая структура двумерных «кристаллов»: *a* – распределение волновых векторов для квадратной решетки; *б* – модовый состав шестигранной решетки, *в* – картина мод, образующих «турбулентный кристалл»

относительно друг друга (рис. 4, б). Картина, подобная представленной на рис. 3, может быть образована также из плоских волн с одинаковыми по модулю волновыми числами, если их достаточно много и если их волновые вектора равномерно распределены по углу (рис. 4, в). На рис. 5 представлены результаты компьютерного моделирования, подтверждающие правильность подобного описания [4].

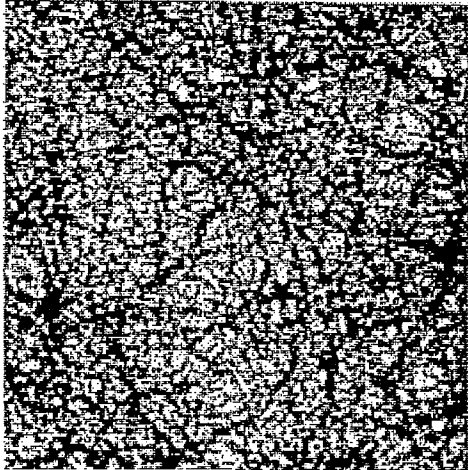


Рис. 5. Пространственный беспорядок, сформированный 400 модами с одинаковыми по модулю волновыми векторами со случайными амплитудами и фазами, равномерно распределенными по углу [4]

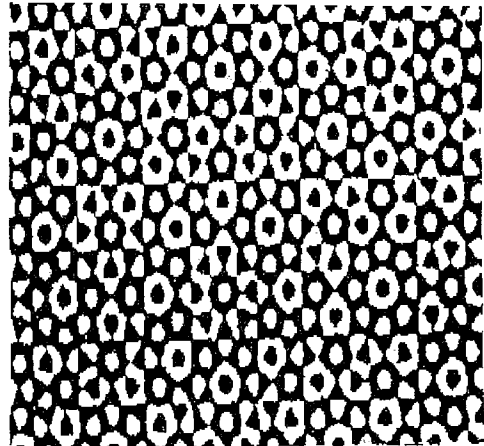


Рис. 6. «Квазикристаллы» капиллярной ряби с симметрией 4 (8) порядка [6]

Полученный результат заключается в том, что случайную картину поля, подобную представленной на фото рис. 3, можно описать с помощью достаточно большого числа гармонических волн (мод) даже и с одинаковой длиной волны, не столь уж удивителен. Действительно, если амплитуды мод случайны и их фазы произвольны (не синхронизованы), ориентация волновых векторов также случайна (см. рис. 4, в). Заметим, что пространственные корреляции при гауссовом распределении амплитуд спадают достаточно быстро в соответствии с формулой, найденной М.Вегу [5]

$$K(\delta) = pu^{\text{rand}}(x)u^{\text{rand}}(x+\chi)a^2x = \text{const } J_0(k_0\chi), \quad (2)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка,  $k_0$  – модуль волновых векторов, а  $\chi$  – аргумент корреляционной функции. Удивительно в данном эксперименте другое – почему амплитуды волн в *установившемся режиме распределены по Гауссу?* Почему фазы отдельных волн произвольны и не синхронизируются по времени? Эти вопросы относятся уже к динамической теории.

Между чисто периодическим («кристаллическим») и предельно неупорядоченным распределениями поля в пространстве могут существовать самые различные промежуточные паттерны с различной степенью неупорядоченности или упорядоченности. Одним из замечательных экспериментальных достижений последних лет является наблюдение «квазикристаллического порядка» в гидродинамических течениях – имеется в виду капиллярная рябь, параметрически возбуждаемая осциллирующим гравитационным полем [6,7]. Эти «квазикристаллы» представлены на рис. 6 [6] и рис. 7 [7]. Путем построения картины поля на компьютере можно убедиться в том, что неперiodические паттерны, для которых характерен дальний порядок, образованы соответственно восьмью (рис. 8, а) или двенадцатью (рис. 8, б) плоскими волнами с одинаковыми по модулю волновыми векторами, углы между которыми соответственно  $45^\circ$  и  $30^\circ$ .

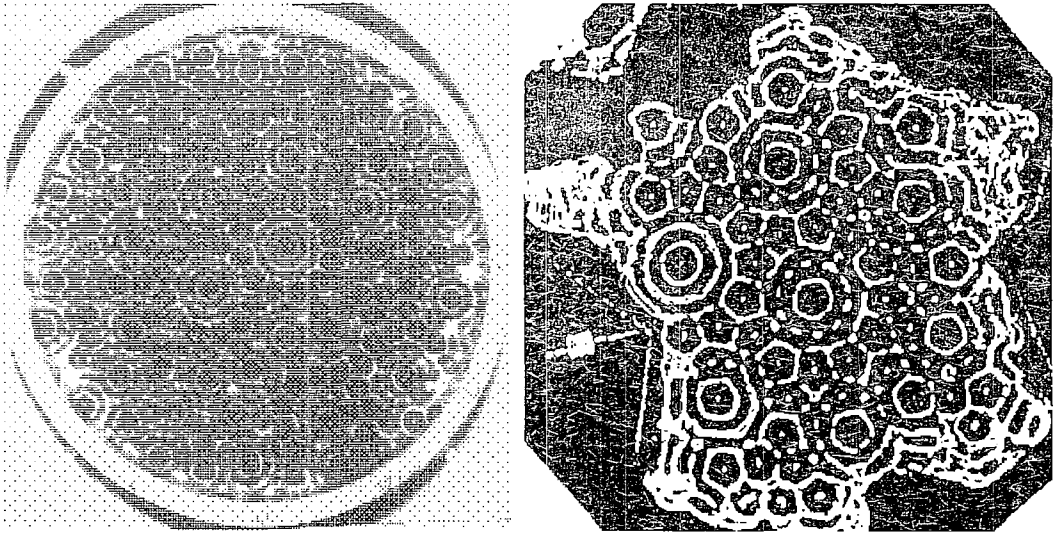


Рис. 7. «Квазикристаллы» капиллярной ряби с симметрией 6 (или 12) порядка [7]

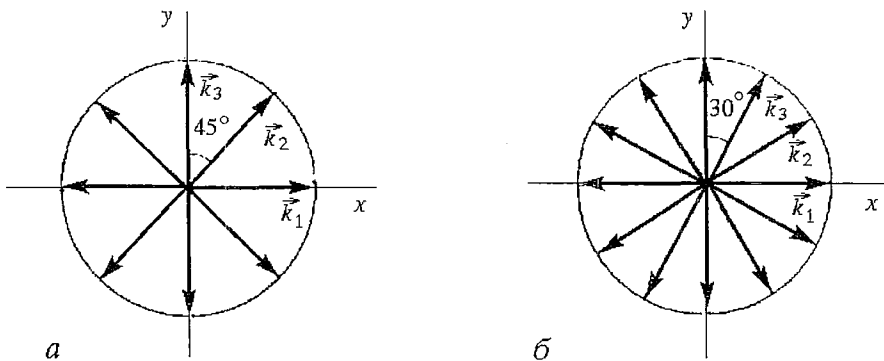


Рис. 8. Модовый состав двумерных квазикристаллов: *a* – с симметрией 4 (или 8) порядка; *б* – с симметрией 6 (или 12) порядка

И опять тот факт, что «квазикристалл» можно построить всего из 8 (или 12) мод, не объясняет существования наблюдаемых паттернов. Действительно, почему устойчиво наблюдается именно совокупность 8 (или 12) мод? Отчего, вообще, зависит их число? Можно ли, меняя параметры, например, частоту осциллирующего гравитационного поля, видоизменять тип симметрии картинки? Эти вопросы также представляют предмет динамической теории.

### 1. «Живые» кристаллы

Кристаллические формы, исключительно примитивные с точки зрения художника, во всяком случае несут в себе нечто от эстетической привлекательности простоты...

*Charles Bunn. Crystals. 1964*

Конечно, показанные на рис. 1–2 полностью упорядоченные паттерны, которые мы обобщенно называем «живой» кристалл, предельно просты. Однако именно эта простота и регулярность вызывают непростые вопросы, главные из

которых: почему нелинейное поле в процессе эволюции переходит из начального неупорядоченного в полностью регулярное состояние, и каким образом в природе осуществляется отбор структур? Первый шаг к ответу на эти вопросы мы сделали выше, обратив внимание на «резонансный» или избирательный в пространстве характер исходной неустойчивости. Именно такая неустойчивость обычно является необходимой для рождения упорядоченных паттернов, вызывающих наше восхищение. Однако, как мы видели, те же неустойчивости при изменении параметров задачи могут привести совсем к другим структурам или к рождению беспорядка. Таким образом, одного факта «резонансности» исходной неустойчивости еще недостаточно для формирования упорядоченной в пространстве кристаллической картины. Главным здесь является следующий этап эволюции разных упорядоченных и неупорядоченных структур во времени, а именно, процесс взаимодействия разных мод. Это процессы конкуренции и селекции, которые и обеспечивают рождение порядка из первоначального хаоса.

Идеальное кристаллическое распределение поля (параметра порядка) выделяется среди прочих наличием трансляционной симметрии. Для двух пространственных координат это означает существование двух базисных векторов  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ , таких, что рассматриваемая картина остается неизменной при параллельных переносах (трансляциях) на любой вектор, представляющий собой линейную комбинацию этих двух векторов с целочисленными коэффициентами. Рассмотрим только идеальные «кристаллы» (без дефектов, неоднородностей, границ и т.д.). Пространственный Фурье–спектр идеального кристалла состоит из конечного числа дискретных компонент

$$A_k = \sum_{j=1}^{2N} A_j \delta_{k-k_j}, \quad k_{j+N} = -k_j, \quad A_{j+N} = -A_j^*, \quad (3)$$

$k_j$  – базисные вектора решетки, все они лежат на окружности  $|k_j| = k_0 = 1$  и углы между ними равны. Для двумерных паттернов только  $N = 1, 2, 3$  соответствуют кристаллам. Любой другой набор  $N$  формирует квазикристалл (см. ниже). Структура из роликов отвечает случаю  $N = 2$ , шестигранные Релей – Бенаровские ячейки  $N = 6$  и решетки с квадратными ячейками (например, капиллярной ряби)  $N = 4$ .

Помимо исходных уравнений для параметра порядка, например, уравнения Свифта – Хоенберга (SHE) или уравнения Гинзбурга – Ландау [8,9], удобно использовать также спектральную форму эволюционного уравнения. Так, для SHE

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon u + \beta u^2 - u^3 - (k_0^2 + \nabla^2)^2 u \quad (4)$$

будем иметь для спектральных компонент такую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_k}{\partial t} = & [\varepsilon - (k_0^2 - 1)^2] A_k - \beta \int A_{k_1} A_{k_2} \delta(k - k_1 - k_2) dk_1 dk_2 - \\ & - \int \rho(\theta) A_{k_1} A_{k_2} A_{k_3} \delta(k - k_1 - k_2 - k_3) dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A_k = A_{-k}^*$  – комплексные амплитуды  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  мод, образующих двумерные паттерны, где  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{r}$  – двумерные векторы, лежащие в плоскости этих паттернов,  $\varepsilon$  – расстояние до порога неустойчивости,  $\beta$  – параметр квадратичной нелинейности, определяющий трехмодовые взаимодействия типа  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$ ,  $\delta(x)$  – дельта функция,  $\rho(\theta)$  – матричный элемент четырехволнового взаимодействия  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}$ , определяемого кубической нелинейностью,  $\theta$  – угол раствора ромба,

составленного из векторов  $k, k_1, k_2, k_3$ . Для однородной и изотропной среды без вращения  $\rho(\theta)$  удовлетворяет условиям симметрии

$$\rho(-\theta) = \rho(\theta) = \rho(\pi-\theta). \quad (6)$$

Обсудим вначале более подробно случай, когда  $A_k$  есть Фурье-образ параметра порядка, описываемого SHE. Тогда непосредственно из (4) будем иметь (ср. (5))

$$\rho(\theta) = \text{const} = \rho(0). \quad (7)$$

Если квадратичная нелинейность отсутствует ( $\beta=0$ ), то для комплексных амплитуд любой пары пространственно однородных мод получается простая динамическая система

$$\dot{A}_{1,2} = \varepsilon A_{1,2} - 3/8[|A_{1,2}|^2 + 2|A_{2,1}|^2]A_{1,2}. \quad (8)$$

Здесь использовано представление  $u(\mathbf{r}, t) = A_1(t)e^{ik_1 r} + A_2(t)e^{ik_2 r} + c.c.$ , где  $|k_{1,2}|^2 = 1$ . Фазовый портрет (7) представлен на рис. 9. Помимо неустойчивого состояния  $A_1 = A_2 = 0$ , здесь имеется еще седло с координатами  $A_1 = A_2 = (2\sqrt{2\varepsilon})/3$  и два устойчивых узла:  $A_1 = (2\sqrt{2\varepsilon})/\sqrt{3}, A_2 = 0$  и  $A_1 = 0, A_2 = (2\sqrt{2\varepsilon})/\sqrt{3}$ . Этот фазовый портрет описывает известный эффект конкуренции мод. Как видно, устойчивым оказывается лишь однороликовый режим. Другие возмущения подавляются.

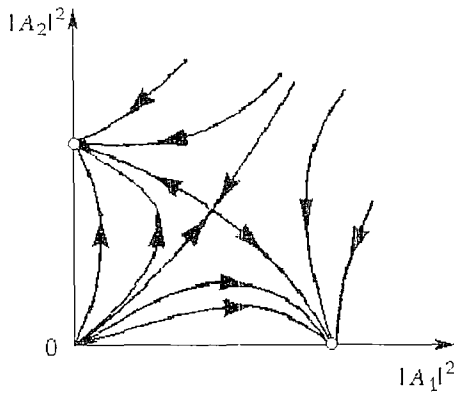


Рис. 9. Конкуренция двух различных пространственных мод во времени – режим совместной генерации неустойчив. Установление при  $t \rightarrow \infty$  той или иной структуры зависит от начальных условий

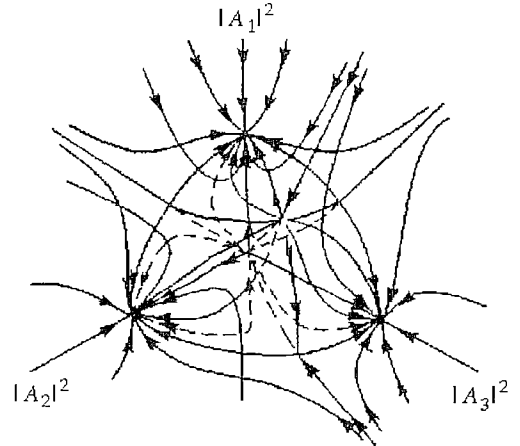


Рис. 10. Фазовый портрет, описывающий конкуренцию трех мод

На рис. 10 изображен фазовый портрет, описывающий конкуренцию трех мод. К сожалению, трудно представить траектории, отвечающие динамике  $N$ -модовой конкуренции, которая описывается системой

$$\dot{A}_j = \varepsilon A_j - A_j [ |A_j|^2 + \sum_{l \neq j} \rho_{jl} |A_l|^2 ], \quad \rho_{jl} = \rho_{lj}, \quad \rho_{jl} > \rho_{jj} \quad (9)$$

для SHE  $\rho_{jj} = 6/8, \rho_{jl} = 3/8$ . Однако, воспользовавшись выражением для свободной энергии, можно убедиться, что режим совместного сосуществования роликов различной ориентации неустойчив, независимо от числа  $N$ . Действительно, из выражения для  $F$

$$F = -\varepsilon \sum_{j=1}^N |A_j|^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{jl} |A_j|^2 |A_l|^2 \quad (10)$$

следует, что в одномодовом режиме

$$F = F_1 = -\frac{1}{2} \varepsilon / \rho_{jj}. \quad (11)$$

В то же время в режиме совместной генерации  $N$  мод с интенсивностями  $|A_j| = \varepsilon / (\sum_{l=1}^N \rho_{jl})$  имеем

$$F_N = -\frac{N}{2} \frac{\varepsilon}{\sum_l \rho_{jl}}, \quad (12)$$

но  $\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \rho_{jl} > \rho_{jj}$ , следовательно,  $F_N > F_1$ .

Таким образом, в рамках градиентной системы (9) всегда устанавливается в результате эволюции кристаллическая структура простейшего вида – периодическая система роликов. Их ориентация в пространстве произвольна и зависит от начальных условий.

Если  $\beta \neq 0$ , то простая роликовая структура может оказаться неустойчивой по отношению к возбуждению пары мод, удовлетворяющих условию трехмодового резонанса  $k_1 + k_2 = k_3$ . Действительно, если, например, для конвекции небуссиновских эффекты существенны, именно такая неустойчивость, приводящая к рождению «кристалла» с симметрией 3 (6) порядка, и наблюдается в экспериментах (см. рис. 2). Замечательно, что рождение шестигранной кристаллической решетки при сильной надкритичности практически не зависит от начальных условий. На рис. 11 показаны результаты компьютерного эксперимента [10], иллюстрирующие различные пути рождения такого кристалла в рамках модели (4). Как видно, промежуточные состояния могут быть весьма разнообразны – ролики, цилиндрические паттерны, локализованные шестигранники. Однако все они неустойчивы, и при  $t \rightarrow \infty$  устанавливается состояние, отвечающее минимуму свободной энергии системы (4) – шестигранная решетка. В компьютерном эксперименте этот факт проверялся непосредственным вычислением функционала свободной энергии уравнения (4). Оно, как известно, представляется в градиентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F}{\delta u}, \quad (13)$$

где в правой части стоит вариационная производная от функционала свободной энергии  $F$ . В свою очередь,  $F$  представляется в виде

$$F = \int_{\Omega} \left\{ -\frac{\varepsilon}{2} u^2 - \beta \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + [(k_0^2 + \nabla^2)u] \right\} dr. \quad (14)$$

Легко заметить, что

$$\frac{dF}{dt} = - \int \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dr \leq 0, \quad (15)$$

а, следовательно, в градиентных системах «свободная энергия» может лишь монотонно уменьшаться вдоль траектории или оставаться постоянной в точках экстремума.

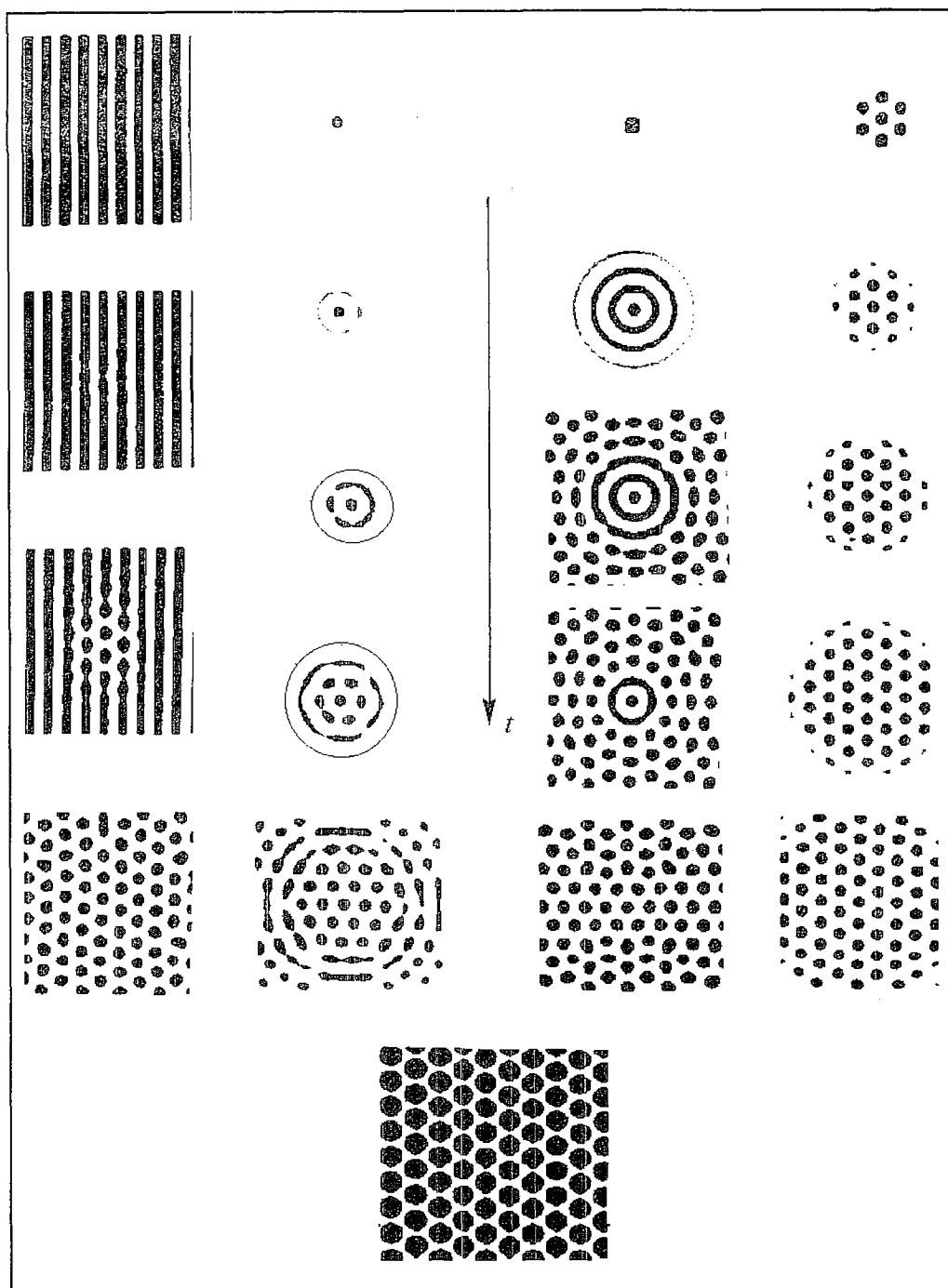


Рис. 11. Пути рождения шестигранной кристаллической решетки в рамках модели (4) [10]

Ориентация установившейся шестигранной решетки в «большой» системе слабо зависит от граничных условий и от эксперимента к эксперименту может быть различной. Добавим, что если надкритичность увеличивать, то, как правило, устанавливается не идеальная кристаллическая структура, а решетка с дефектами или паттерн, состоящий из «кусков» шестигранной решетки различной ориентации (доменов), как на рис. 12 [11].



Используя терминологию языка мод, шестигранную решетку можно описывать системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ODE) вида

$$\dot{A}_j = \epsilon A_j - \beta' A_l^* A_q^* - A_j [ |A_j|^2 + 2 \sum_{l \neq j} |A_l|^2 ]. \quad (16)$$

При не слишком малых  $\beta$  эта система имеет лишь одно устойчивое равновесие  $A_1 = A_2 = A_3 = A^0$ , которое и отвечает регулярной шестигранной решетке. Естественно, рассматриваемая система, как и исходное уравнение (4), имеет градиентный характер, то есть  $\partial A / \partial t = -\delta \tilde{F} / \delta A_j$  с функционалом  $\tilde{F}$

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & -\{ \epsilon |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 - \frac{1}{2} (|A_1|^4 + |A_2|^4 + |A_3|^4) - \\ & - 2(|A_1|^2 |A_2|^2 + |A_1|^2 |A_3|^2 + |A_2|^2 |A_3|^2) - \beta' A_1^* A_2^* A_3^* + c.c. \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, формирование кристаллической решетки с симметрией 3 (6) порядка в данной модели должно происходить монотонно во времени, без всяких колебаний, что и подтверждается физическими и компьютерными экспериментами (см. рис. 11)<sup>1</sup>.

Рождение шестигранной решетки в рамках модели (4) или (16) является примером рождения «кристалла», в котором не только амплитуды, но и фазы образующих его мод связаны. Такие кристаллы мы будем называть «жесткими». Нетрудно, однако, заметить, что для совместного существования разноориентированных мод, которые могут сформировать кристалл, вовсе не обязательно, чтобы одни моды генерировали другие, вполне определенные. Необходимо другое – чтобы одни моды «не мешали» существованию других. Другими словами, чтобы не было сильной конкуренции. Возможно ли такое? Формальный ответ прост: если матричные элементы  $\rho_{jl}$  таковы, что (см. (9))

$$\rho_{jj} > \rho_{jl} \quad (l \neq j), \quad (18)$$

то режим совместной генерации разноориентированных мод будет устойчив. Фазовый портрет амплитудных уравнений, описывающих взаимодействие двух мод в случае (18), представлен на рис.13. Видно, что простые паттерны в виде роликов неустойчивы, а режим  $|A_1|^2 = |A_2|^2 = \epsilon / (\rho_{11} + \rho_{12})$ , отвечающий, например, ромбическому кристаллу, будет устанавливаться в процессе эволюции при любых начальных условиях. Такие кристаллические структуры можно назвать «мягкими кристаллами». Фазы образующих их мод, в отличие от случая «жестких кристаллических структур», произвольны, то есть не связаны друг с другом.

Данный нами формальный ответ, однако, ничего не говорит о физике явления. А именно: почему в одних случаях элементарные (нормальные) моды конкурируют сильно, а в других – практически «не замечают» друг друга?

<sup>1</sup> Мы здесь ничего не говорим о роли малых шумов. Этот вопрос требует специального обсуждения.

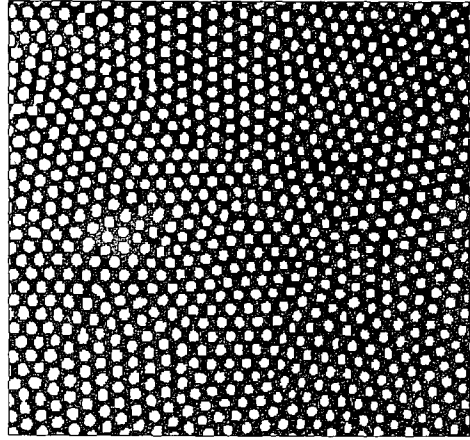


Рис. 12. Домены шестигранников в двумерном химическом реакторе, где протекает автокаталитическая реакция [11]

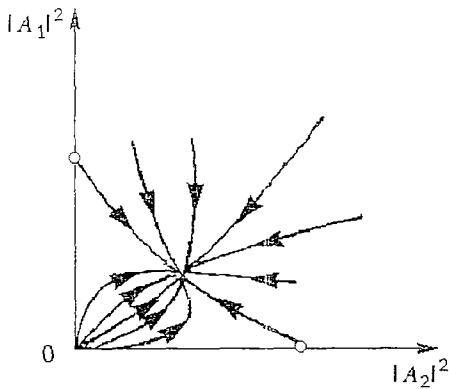


Рис. 13. Фазовая плоскость, иллюстрирующая устойчивость режима двухмодовой генерации

быть дополнена слагаемыми, зависящими не только от амплитуды возмущения, но и от градиента ее неоднородного распределения в пространстве. Это могут быть различные добавки вида  $(\nabla u)^2 u$ ,  $u(\nabla^2 u)^2$ ,  $u(\nabla^4 u)^2$  и т.д. Выбор того или иного слагаемого определяется физикой задачи. В частности, для конвекции с плохой теплопроводностью от нижней части слоя к верхней записывают нелинейную диссипацию в форме  $u^3 - bu\nabla^4 u$ . Тогда вместо (4) будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\varepsilon - (\nabla^2 + k_0^2)] u - u^3 + bu\nabla^2(\nabla u)^2. \quad (19)$$

Эта же модель используется и для описания конвекции в бинарных смесях. Прямой подстановкой в (19) решения в виде  $u = A_1 e^{ikx} + A_2 e^{iky} + c.c.$  для амплитуд взаимно ортогональных роликовых структур после усреднения можно получить при  $b > 0$  уравнение вида (9) с коэффициентами  $\rho_{ij}$ , удовлетворяющими условию (18). Диссипация, описываемая слагаемым  $-bu$ , увеличивает вклад в самодействие и тем самым снижает конкуренцию между роликовыми структурами. На рис. 14[12] показана временная эволюция случайного начального распределения поля  $u$  в рамках модели (19). Даже в круглой кювете при достаточно большом  $t$  устанавливается кристаллическая решетка с квадратными ячейками. Именно такой «кристалл» с квадратными ячейками наблюдается вблизи порога неустойчивости для конвекции в плоском слое между двумя пластинами с плохой

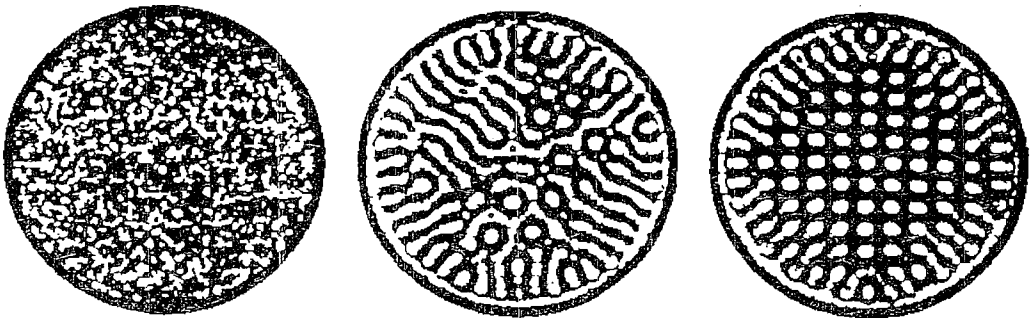


Рис. 14. Установление квадратной конвективной решетки в круглой кювете. Компьютерный эксперимент в рамках модели (19) [12]

Это удобно пояснить в терминах энергетики процесса. Непосредственно из уравнения (9) следует, что феномен конкуренции есть результат дополнительного нелинейного затухания, которое одна мода создает для другой. Если моды энергетически слабо зависимы (в простейшем случае «питаются» от разных источников), то такое дополнительное затухание незначительно. Именно так обстоит дело, например, в задаче о капиллярной ряби, при возбуждении на двух разных частотах или для конвекции с плохой теплопроводностью от нижней части слоя к верхней. При этом SHE недостаточно адекватно описывает ситуацию, и нелинейность, ответственная за стабилизацию неустойчивости, должна

теплопроводностью между ними, как показано на рис. 15 [13].

Таким образом мы познакомились с двумя возможными динамическими механизмами формирования кристаллических паттернов. Один из них связан со слабой конкуренцией, допускающей сосуществование и устойчивость режима совместной генерации мод. Такие кристаллы мы назвали «мягкими». Другой механизм связан с резонансным взаимодействием мод, когда моды не просто «не мешают», но и индуцируют друг друга. Такие кристаллы естественно назвать «жесткими». В качестве примера можно привести известную нам решетку из шестигранников.

Одно из наиболее очевидных, и в то же время наиболее принципиальных, свойств кристаллов – это свойство симметрии, определяемое наличием решетки. Однако не всякая симметрия свойственна кристаллам. К примеру, симметрия пятого порядка не может реализовываться кристаллической решеткой, но, в то же время, типична для «элементов жизни». Вспомним цветы яблони или вишни, розу, наконец! Симметрия пятого порядка характерна и для колоний вирусов, строящих «жизнь». Одно время даже бытовало мнение, что живая природа «выбрала» симметрию пятого порядка именно потому, чтобы не быть захваченной в «мертвую кристаллическую решетку». Однако столь тривиальный признак разделения «живого» и «неживого» оказался недееспособен. И виною этому, в частности, квазикристаллы. Это квазипериодические решетки, для которых симметрия пятого порядка столь же естественна, как, скажем, симметрия четвертого порядка для кристаллов.

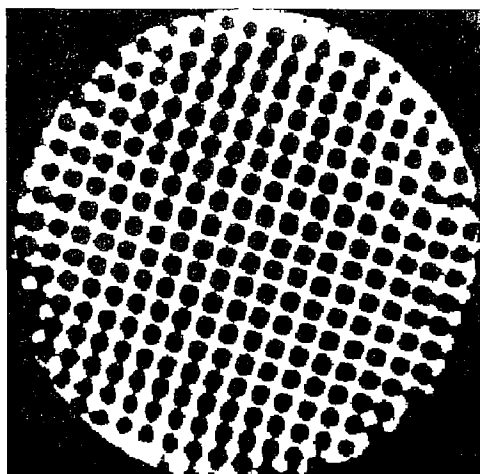


Рис. 15. Экспериментально наблюдавшаяся в круглой кювете кристаллическая решетка в виде суперпозиции взаимно ортогональных семейств роликов [13]

## 2. «Квазикристаллы» и «турбулентные кристаллы»

Это число является не чем иным, как отношением, известным под названием «золотого сечения», играющим столь важную роль в попытках сведения красоты пропорций к математической формуле.

*Герман Вейль. Симметрия. 1952*

Спроецируем периодическую структуру в виде решетки из  $M$ -мерных кубических ячеек на плоскость меньшей размерности  $m$ . При  $M = 5$  и  $m = 2$  и большинстве углов проецирования мы получим на плоскости удивительный по красоте неперiodический узор, изображенный на рис. 16 [14]. Это знаменитый паркет Пенроуза. Он составлен из ромбов двух видов с острыми углами  $36^\circ$  и  $72^\circ$ . Паркет Пенроуза иногда называют геометрической игрушкой, однако такой квазикристалл с симметрией пятого порядка наблюдается в природе (см. также [15–17]). Сейчас известны двумерные квазикристаллы с симметрией 4-го порядка в тонких пленках сплавов, 5-го порядка в слоистых веществах и 6-го порядка в малых твердых частицах. Известная «алгебраическая» модель двумерного квазикристалла связана с представлением стационарного распределения плотности

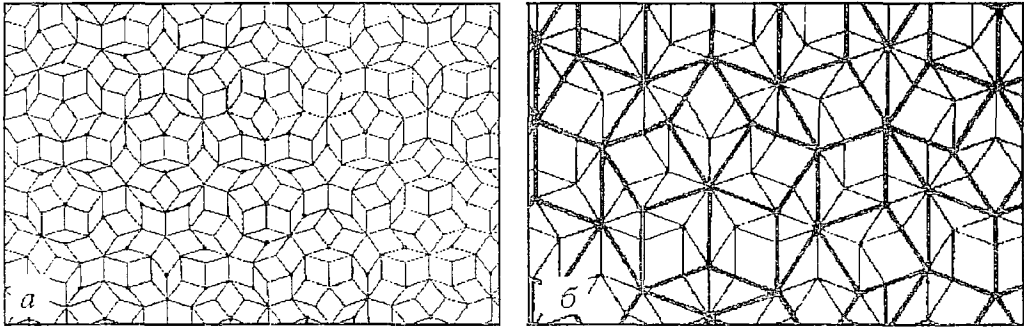


Рис. 16. Паркет Пенроуза: *a*–расположение атомов в двумерном «квазикристалле»; *б*–пример самоподобных структур с симметрией 5-го порядка

вещества (или параметра порядка) в формуле (3)  $A_k = \sum_{j=1}^{2N} A_j \delta_{k-k_j}$ , при условии, что проекции векторов  $k$  на любую ось являются взаимно несоизмеримыми<sup>2</sup>. Именно базис из пяти стоячих волн (волновых векторов) с равными углами в  $72^\circ$  между соседями и порождает паркет Пенроуза. Подобно обычным кристаллам структура на рис. 16 обладает дальним порядком (это следует хотя бы из того, что такой рисунок получен как проекция строгого кристалла). Однако паркет Пенроуза обладает и локальной симметрией относительно поворота вокруг некоторой оси на угол  $72^\circ$ <sup>3</sup>, а это уже несовместимо с необходимой для кристаллов трансляционной инвариантностью. Добавим, что в узоре на рис. 16 можно найти сколь угодно большие фрагменты с симметрией пятого порядка, а если сравнить соотношение масштабов подобных структур, то станет понятно, откуда красота пропорций – масштабы отличаются в  $\mu = (1 + \sqrt{5})/2$  раз. Число  $\mu$  – это и есть золотое сечение!

Реально наблюдаемый пространственный Фурье–спектр квазикристалла несколько отличается от (3). Он содержит не только  $N$  главных мод, проекции которых несоизмеримы, но и их высшие и комбинационные пространственные гармоники

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{2N} A_j e^{i\mathbf{k}_j \mathbf{r}} + (\text{высшие и комбинационные пространственные гармоники}). \quad (20)$$

Таким образом спектр квазикристалла, состоящий из дискретных компонент, может содержать их сколь угодно много и они могут быть расположены сколь угодно плотно, образуя канторовское множество. Однако особенных пиков, отвечающих несоизмеримым периодическим модам, формирующим квазикристаллы, может быть немного. Именно эти пики и обнаруживаются в экспериментах по Брэгговскому рассеянию в металлических сплавах.

Хотя за последние десять лет появилось множество экспериментов, позволяющих наблюдать квазикристаллические структуры, все они были связаны с микрофизическими объектами, прежде всего, с металлическими сплавами. Первые наблюдения квазикристаллического порядка в макрофизике были сделаны только в 1992 году [6, 7]. Это устойчивые квазикристаллические паттерны на поверхности слоя жидкости в осциллирующем гравитационном поле

<sup>2</sup> Квазипериодическое покрытие плоскости можно осуществить не только разными ромбами, но и другими фигурами, например, двумя «цыплятами», как это сделал тот же Пенроуз. Как заметил В.Е. Корепин [18], возможное объяснение «цыплят» связано с тем, что стороны ромбов (или в более общем случае параллелограммов), покрывающих плоскость, можно произвольным образом искривлять, оставляя на месте вершины параллелограммов и сохраняя параллельность их сторон.

<sup>3</sup> Вообще локальная симметрия  $N$ -ого порядка определяется углом поворота, где  $\chi = \pi/N$ .

(квазикристаллы ряби, о которых мы говорили во Введении). Копенгагенская группа обнаружила устойчивые октагоны – квазикристаллы с симметрией четвертого (восьмого) порядка ( $N = 4$ ), образованные четырьмя стоячими капиллярными волнами, развернутыми под углом  $45^\circ$  (см. рис. 6 [6]). Эксперименты проводились с вязкой жидкостью в цилиндрической ячейке большого диаметра в  $d \sim 50\lambda$  (где  $\lambda = 2\pi/k_0$  – длина параметрически возбуждаемых капиллярных волн). Французская группа наблюдала квазикристалл, образованный шестью стоячими волнами, угол между которыми составлял  $30^\circ$  (см. рис. 7 [7]). В этом эксперименте специально изменялась форма большой ячейки и, как видно из рисунка, и в круглой кювете, и в ячейке с границами, повторяющими карту Франции (где расстояние от Бордо до Женевы было 5 см), форма квазикристаллических паттернов не менялась. Существенной особенностью этого эксперимента была бигармоничность накачки. В результате одновременно могли возбуждаться моды с  $|k| = k_0$  и с  $|k| = k_0 + \delta k$ , где  $\delta k/k_0 \approx 0.17$ . Проистекающие отсюда следствия весьма важны, и мы их обсудим специально чуть ниже.

**Октагоны ( $N=4$ ), декагоны ( $N=5$ ) и додекагоны ( $N=6$ ).** Обратимся вновь к системе (3), описывающей динамику кристаллических или квазикристаллических паттернов с дискретным набором  $2N$  Фурье-компонент. Для амплитуд этих мод как функций времени из (5) можно получить [19]

$$\dot{A}_j = [\gamma_0 - 4\rho(0)|A_j|^2 - 8\sum_{l \neq j}^N \rho(\theta_{jl})|A_l|^2]A_j + \beta' A_{j+2}^* A_{j+4}^* \quad (21)$$

Здесь  $\beta' \neq 0$  только в случае, когда  $N = N/6$ ;  $\theta_{jl} = \pi(j-l)/N$  – угол между векторами  $k_j$  и  $k_l$ ; и, как и прежде,  $\rho(\theta) = \rho(\pi - \theta) = \rho(\theta + \pi t)$ . Ясно, что динамическая система (21) имеет смысл только в случае, если число взаимодействующих мод не слишком велико. Действительно, мы можем выделить лишь такие моды, угол между волновыми векторами которых значительно превосходит относительную ширину пакета взаимодействующих мод, пропорциональную  $\varepsilon^{1/2}$ .

При  $N=4$  динамика системы (21) характеризуется двумя контрольными параметрами

$$\gamma_1 = 2\rho(\pi/4)/\rho(0) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\rho(\pi/2)/\rho(0). \quad (22)$$

Квазикристаллам с  $N=4$  (октагонам) отвечает состояние равновесия (21)

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \left[ \frac{\gamma_0}{1 + 2\gamma_1 + \gamma_2} \right]^{1/2}. \quad (23)$$

Анализ устойчивости этого состояния в рамках системы (21) дает нам необходимые критерии устойчивости октагонов

$$\gamma_1 < (1 + \gamma_2)/2, \quad \gamma_2 < 1. \quad (24)$$

Полный анализ устойчивости по отношению к произвольным возмущениям должен проводиться на основе линеаризованного вблизи решения (23) уравнения (5) (ввиду громоздкости мы его здесь опускаем, см. работу [19]).

Квазикристалл с  $N=5$  изображен на рис. 15. Его, также как и октагоны, можно описать с помощью лишь амплитудных уравнений (21) при  $\beta'=0$ . В этом случае мы имеем два независимых параметра

$$\gamma_1 = 2\rho(\pi/5)/\rho(0) \quad \text{и} \quad \gamma_2 = 2\rho(2\pi/5)/\rho(0). \quad (25)$$

Квазикристаллической структуре отвечает состояние равновесия с равным значением амплитуд всех мод

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_8 = [\gamma_0 / (1 + 2\gamma_1 + 2\gamma_2)]^{1/2} \quad (26)$$

и произвольными фазами мод. Необходимые условия устойчивости (в рамках (21)) также легко находятся [19]

$$1 + \psi\gamma_1 - \mu\gamma_2 > 0, \quad 1 + \psi\gamma_2 - \mu\gamma_1 > 0, \quad (27)$$

где  $\mu = 2\cos\frac{\pi}{5}$  – золотое сечение, а  $\psi = 2\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Квазикристаллы с  $N=6$  – додекагоны – при  $\beta' = 0$ , как и квазикристаллы с более низкой симметрией ( $N=4,5$ ), не несут никакой информации о фазах образующих их мод. Фазы произвольны. Однако, при  $\beta' \neq 0$  квазикристаллические структуры, обнаруженные в эксперименте [6], представляют собой композицию уже не стоячих волн, а гексагонов, которые в данном случае можно рассматривать как нормальные формы. Внутри каждой резонансной тройки мод  $k_j + k_l + k_1 = 0$  фазы  $\phi_j$  связаны независимыми соотношениями

$$\sin \phi_j = 0, \quad (28)$$

здесь  $j$  – четно для одной тройки волн (одной подрешетки) и нечетно для другой.

Мы уже упоминали еще об одном проявлении квадратичной нелинейности в уравнениях типа (5) или (21) – с такой нелинейностью связан механизм взрывной неустойчивости. Существенно, что взрывная неустойчивость приводит, в частности, к жесткому возбуждению структур, то есть к их генерации в «субкритическом» случае, когда  $\gamma_0 < 0$ . Подобный механизм возбуждения характерен и для гексагонов.

В заключение этого раздела вернемся к обсуждавшемуся выше эксперименту о наблюдении «капиллярных квазикристаллов» с  $N=6$ . Как мы сейчас знаем, додекагоны можно рассматривать как композицию двух гексагонов с примерно равными амплитудами и развернутыми друг относительно друга на  $30^\circ$ . Для устойчивого сосуществования таких гексагонов необходимо, чтобы они слабо конкурировали друг с другом. Одна из возможностей реализовать это в эксперименте – доставлять энергию разным гексагонам из разных источников. Именно это и осуществляется в работе [6] при возбуждении капиллярных квазикристаллов однородной накачкой с двумя разными, но близкими частотами.

**«Турбулентный кристалл».** Квазикристаллы с  $N=4,5,6 \dots$  – это простейшие квазипериодические пространственные структуры, уже содержащие элементы неопределенности фазы мод. Вспомним здесь известную модель турбулентности Ландау – Хопфа [20,21]. В рамках этой модели турбулентность представлялась как набор мод с несоизмеримыми частотами и произвольными фазами. Соответствующая временная реализация – наблюдаемая

$$u(t) = \sum_{j=1}^N A_j e^{i(\omega_j t + \phi_j)} + c.c. \quad (29)$$

при достаточно большом  $N$  выглядит абсолютно случайной и вполне подходит для моделирования нерегулярных и непредсказуемых турбулентных пульсаций. Корреляционная функция процесса (29) достаточно быстро спадает и вновь становится близкой к единице лишь через время возврата  $T$ , которое очень велико:

время возврата Пуанкаре  $T \sim e^{\alpha N}$  ( $\alpha \sim 1$ ) очень быстро растет с ростом  $N$ . Подобная модель случайных временных пульсаций (ее математический образ – незамкнутая

намотка на  $N$ -мерном торе в фазовом пространстве некоторой динамической системы) действительно имела бы право на жизнь, однако, как показывают математические исследования, выполненные в конце 60-х годов, квазипериодические движения динамической системы с  $N=3$  обычно неустойчивы. Незамкнутая намотка на торе либо замыкается, образуя периодический аттрактор – предельный цикл, либо разрушается сам  $N$ -тор и вместо него рождается другой аттрактор – странный, который и служит математическим образом устойчивых хаотических пульсаций, порождаемых динамической системой (подробнее см., например, [22]).

Вышеприведенное обсуждение относилось к сосуществованию несоизмеримых временных мод. Обратимся теперь к пространственным модам. Очень вероятно, что устойчивое сосуществование 6-ти мод, а если говорить не о самих модах, а о волнах, то и 12-ти, возможно. Значительно увеличим  $N$ . Тогда дальний порядок можно будет обнаружить лишь на столь далеких расстояниях (напомним, «длина возврата»  $L \sim e^{aN}$ ), что это теряет всякий физический смысл. Таким образом, это будет уже не квазикристалл, а хаотическое «турбулентное» распределение параметра порядка в пространстве, которое можно назвать «турбулентный кристалл» [23].

Рассмотрим в качестве примера эволюцию параметра порядка  $u(r,t)$ , определяемую вариационной моделью с функционалом свободной энергии вида [21]

$$F = \int dx dy \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla^2 + 1)u]^2 - \frac{1}{2} \epsilon u^2 + \alpha_1 (\nabla^2 u)^4 + \alpha_2 (\nabla u)^4 + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^n \frac{1}{2} [(\nabla^2 + q_m^2)u_m]^2 + \frac{1}{2} \mu^2 u_m^2 + \mu \Gamma_m u_m u^2 \right\}. \quad (30)$$

Здесь  $u_m$  – некоторые вторичные поля, которые играют важную роль в снижении конкуренции между отдельными модами, формирующими квазикристалл. Формально это связано с «организацией» такой зависимости коэффициента  $\rho(\theta)$ , которая дает возможность сосуществовать очень большому числу мод. Добавим, что, например, в конвекции роль одного из полей  $u_m$  может играть среднее течение. Представим  $u$  в виде

$$u = \sum_{j=1}^N (A_j e^{ik_j r} + c.c.) + O(\epsilon^{3/2}), \quad (31)$$

где  $A_j$  имеют порядок  $\epsilon^{1/2}$ . Поле  $u_m$  запишем так:

$$u_m = \epsilon u_{m1} + \dots \quad (32)$$

Ньюэлл и Помо показали, что при  $\mu \ll \epsilon^2$  коэффициент  $\rho(\theta)$  описывается выражением [23]

$$\rho(\theta) = 24\alpha_1 + (8 + 16\cos^2\theta)\alpha^2 - \sum_{m=1}^n 8r_m^2 \left( \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (q_m^2 - 2 - 2\cos\theta)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + (q_m^2 - 2 + 2\cos\theta)^2} + \frac{\epsilon^2}{\epsilon + q_m^4} \right). \quad (33)$$

Если число вторичных полей  $n$  большое, то можно реализовать ситуацию, когда  $\rho(\theta) < \frac{1}{2}\rho(0)$  (см.(3)), что и необходимо для существования «турбулентного кристалла».

Внешне пространственное распределение поля в «турбулентном кристалле»

должно напоминать беспорядок, изображенный на рис. 1 [1]. Их статистические характеристики также будут похожи. Действительно, в установившемся режиме равных амплитуд мод

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\langle \rho \rangle}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j^N \cos(k_j r + \phi_j), \quad (34)$$

где  $\langle \rho \rangle = \frac{\rho_0 + \dots + \rho_{N-1}}{N}$ . Поскольку фазы  $\phi_j$  имеют случайное распределение с нулевым средним, параметр порядка  $u$  распределен по Гауссу с нулевым средним. При вычислении двухточечной пространственной корреляции  $\langle u(x,y), u(x',y') \rangle$  вследствие вращательной инвариантности можно положить  $y = y' = 0$ . Тогда получаем [5]

$$\begin{aligned} \langle u(x,0), u(x',0) \rangle &= \left\langle \frac{\varepsilon}{\langle \rho \rangle} \frac{1}{N} \cos(x \cos \theta_j + \phi_j) \cos(x' \cos \theta_j + \phi_j) \right\rangle = \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \langle \rho \rangle} \frac{1}{N} \sum_j \cos((x-x') \cos \theta_j) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2 \langle \rho \rangle} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(x-x') \cos \theta] d\theta = \\ &= \frac{\varepsilon}{2 \langle \rho \rangle} J_0(|x-x'|) \end{aligned} \quad (35)$$

(ср. с (2)). Таким образом пространственные корреляции экспоненциально быстро затухают. Как мы видели (см. Введение), для этого достаточно  $N \sim 100$ .

### 3. От «квазикристаллов» к динамическому беспорядку

Попытки конструирования «турбулентного кристалла» – это естественное желание использовать наиболее наглядный путь построения «статистического» пространственного беспорядка. В то же время сам факт существования квазикристалла – уже предвестник динамического детерминированного пространственного беспорядка. Действительно, незамкнутые «намотки на торе» в фазовом пространстве динамической системы обычно структурно неустойчивы, и при сколь угодно малом изменении параметров топология траекторий качественно меняется: образуется периодическая (замкнутая) траектория либо стохастическое множество. На основании пространственно-временной аналогии можно сказать, что первая возможность соответствует «кристаллу», а вторая – пространственному беспорядку. Теперь представим себе, что у нас есть управляющий параметр, например, амплитуда внешнего периодического в пространстве поля. Если этот параметр увеличивается, то, поскольку в некотором фазовом пространстве незамкнутая намотка на торе может разрушиться, кажется весьма правдоподобным, что при этом (как и в одномерном случае) произойдет переход от квазипериодичности к конечномерному пространственному беспорядку.

Сформулированная выше двумерная задача не только никем не решалась, но даже и не ставилась. Несомненно, в ближайшее время задачу о рождении пространственного беспорядка при увеличении управляющего параметра удастся решить, хотя она требует введения довольно тонких математических понятий, связанных именно с двумерностью или трехмерностью пространства. Например, необходимо ввести такое понятие, как незамкнутая намотка на торе в некотором матричном пространстве.

Как нам сейчас кажется, эту задачу можно поставить несколько более



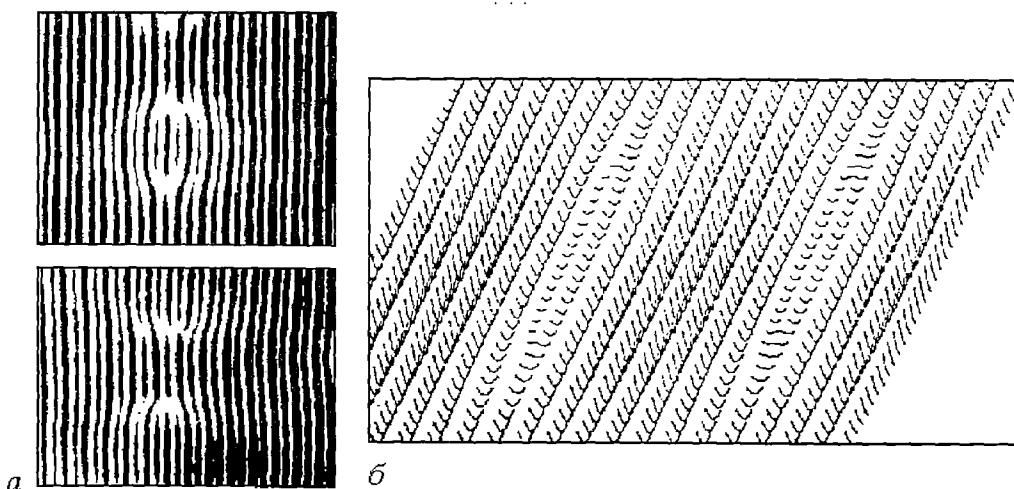


Рис. 17. «Волновые» дефекты: *a* – наблюдаемые при электрогидродинамической конвекции в жидком кристалле [24]; *б* – формируемые функцией вида  $u(x,y) = \cos x + 1.3\cos y \cos(1.26x)$ ,  $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . [25]

просто. Как известно, во многих экспериментах, например, с жидкими кристаллами или в конвекции Бенара, наблюдаются весьма интригующие картины неупорядоченного расположения дефектов. Часто сами дефекты могут быть принципиально неоднородными, например, типа «розеточек», но могут быть и дефекты попроще – волнового типа, изображенные на рис. 17. Подобные дефекты можно рассматривать в рамках почти одномерной задачи, если по одной из координат взять небольшое число мод (например, исследуя магнитогидродинамическую конвекцию в узкой «полосе» жидкого кристалла [24]), а вторую координату считать безграничной. Тогда мы получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений по этому безграничному направлению. Так можно сконструировать периодическую дорожку дефектов из небольшого числа мод. Это сделано Экманом и Прокаччиа [25]. Но здесь еще нет динамического беспорядка. Если же приложить контролируемое внешнее периодическое поле (в данном случае мы имеем дело с незамкнутой намоткой на торе в обычном, векторном, фазовом пространстве системы обыкновенных дифференциальных уравнений), то можно получить и пространственный беспорядок подобных дефектов. В работе [9] можно найти краткое обсуждение проблемы динамического беспорядка.

### Библиографический список

1. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа / Пер. с англ; Под ред. Г.И.Баренблатта и В.П.Шидловского. М.: Мир, 1986.
2. Bodenschats E., de Bruyn J.R., Ahlers G., Cannell D. // Phys.Rev. Lett. 1991. Vol. 65. P. 2370.
3. Blumel R., Davidson I.H., Reinhardt W.P. // Phys.Rev. A., 1992, Vol. 45. P. 2641.
4. O'Connor P., Gehlen J., Heller E.J. // Phys.Rev.Lett. 1987. Vol. 58. P. 1296.
5. Berry M.V. // Chaotic Behaviour of Deterministic Systems/ Eds. G.Looss, R.Hellerman, R. Stora. North Holland, N.Y., 1983. P. 171.
6. Christiansen B., Alstrom Preben, Levinson M.T. // Phys.Rev.Lett. 1992. Vol. 68. P. 2157.
7. Edwards W.S., Rauve S. // Phys.Rev. E. 1993. Vol. 47. P. 788.
8. Cross M.C., Hohenberg P.C // Rev.mod.Phys. 1993. Vol. 65. P. 3.

9. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л., Цимринг Л.Ш. // УФН. 1992. Т. 162, № 8.
10. Гапонов–Грехов А.В., Ломов А.С., Осипов Г.В., Рабинович М.И. // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова–Грехова и М. И. Рабиновича. М.: Наука, 1987. С. 61.
11. Ouyang Q., Swinney H. // Chaos. 1991. Vol. 1. P. 411.
12. Bestehorn M. // Evolution of Dynamical Structures in Complex Systems / Eds. R. Friedrich, A. Wunderlin. Springer, Berlin, 1992. Springer Proceedings in Physics. Vol. 69. P. 166.
13. Le Gal P., Pochen A., Croquette V. // Phys. Rev. Lett. 1985, Vol. 54. P. 2501.
14. Penrose R. // Bull. Inst. Math. Appl. 1974. Vol. 10. P. 266; Math. Intelligencer. 1979. Vol. 2. P. 32.
15. Shechtman D., Bleck L., Gratias K., Cahn I.W. // Phys. Rev. Lett. 1984. Vol. 53. P. 1951.
16. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.С. Слабый хаос и квазипериодические структуры. М.: Наука, 1991.
17. Manneville P. Dissipative Structures and Weak Turbulence. Academic Press, Boston, 1990.
18. Корепин В.Е. Записки научных семинаров ЛОМИ. Л.: Наука, 1986. Т. 155. С. 116.
19. Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.И. // ЖЭТФ. 1989. Т. 96. С. 684.
20. Ландау Л.Д. ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 339.
21. Hopf E. // Comm. Pure and Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 3031.
22. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
23. Newell A., Pomo Y. Turbulent crystal. Preprint. Tucson, 1993.
24. Kai S., Chizumi N., Hohno M. // Phys. Rev. 1989. A 40. P. 6554.
25. Eckman J.P., Procaccia I. // Nonlinearity. 1991. Vol. 4. P. 542.

Нижегородский государственный  
университет

Поступила в редакцию 17.12.93  
после переработки 29.04.94



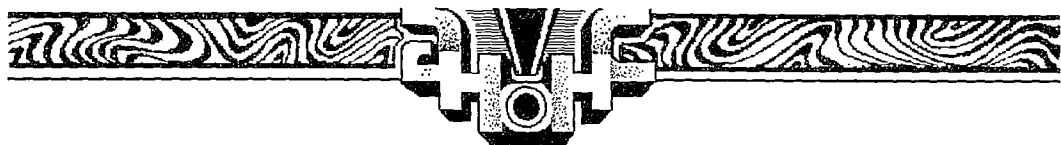
Генри Д.И. Абарбанель – профессор физики и физик–исследователь Института океанографии Скриппса в Калифорнийском университете, Сан–Диего, UCSD, США. Получил степень доктора в Принстонском университете и преподавал в Принстоне, Станфорде, Нортвестерне, Чикаго и Калифорнийском университете в Беркли, с 1983 г. работает в Калифорнийском университете в Сан–Диего. Занимается анализом хаотических явлений в геофизических и лабораторных установках. Директор Института нелинейных наук при UCSD.



Михаил Израилевич Рабинович – 1941 г. рождения, д.ф. – м.н., член–корр. РАН, зав. отделом Института Прикладной Физики РАН. Область научных интересов: динамическая теория жидкости; проблемы хаоса и структурообразования; нелинейные волны в неравновесных средах. Общее число публикаций – более 200; из них 5 книг, около 10 обзоров, учебные пособия и курсы лекций; статьи в отечественных и иностранных журналах.



*Цимринг Лев Шулимович* – родился в 1959 г. в Саратове, окончил радиофизический факультет Горьковского государственного университета. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности «океанология» (1985). Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН (в настоящее время – по контракту в Институте нелинейных исследований Калифорнийского университета в Сан-Диего, США). Область научных интересов – пространственно-временной хаос в неравновесных средах и методы его диагностики.



Редакция журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» планирует выпуск специального номера, посвященного исследованиям роли флуктуаций в динамике нелинейных систем. Предполагаются следующие основные разделы:

- влияние флуктуаций на бифуркации и эволюцию нелинейных систем со сложной динамикой;
- нелинейное броуновское движение;
- стохастический резонанс в автоколебательных и других нелинейных системах;
- диагностика нелинейных систем по статистическим характеристикам на основе экспериментальных данных.

Ответственный редактор выпуска – профессор *Вадим Семенович Анищенко*.

Авторов, заинтересованных в опубликовании статей в выпуске, просим сообщить об этом заранее. Оформленные по принятым для журнала правилам рукописи должны быть представлены не позднее 1 декабря 1994 г.

