



## МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ СТРУКТУР В СВЯЗАННЫХ ЦЕПОЧКАХ АВТОГЕНЕРАТОРОВ

Г.В.Осинов, М.М.Суццик

Представлен новый механизм образования локализованных структур в ансамблях автогенераторов, связанный с эффектами «вымирания» автоколебаний при разрушении режима их взаимной синхронизации.

**1.** Известно, что в цепочках автогенераторов с различающимися частотами при достаточно сильной диффузионной связи между элементами цепочки возможно образование локализованных структур или доменов с интенсивными взаимно синхронизованными колебаниями, сосуществующими рядом с областями, где эти колебания отсутствуют или пренебрежимо малы [1,2]. Один из механизмов формирования таких областей связан с эффектом «вымирания» автоколебаний [3,4], «... когда после срыва синхронизации влияние достаточно большой диссипативной связи приводит к увеличению потерь для каждого из автоколебаний». Из-за неоднородности расстройки частот или влияния концевых эффектов срыв синхронизации происходит локально, что и приводит к формированию локализованных структур и фронтов. В настоящей работе продемонстрировано, что в двух связанных цепочках при наличии зависимости частоты автоколебаний от амплитуды этот механизм может приводить к образованию локализованных структур даже в отсутствие концевых эффектов и неоднородности частотной расстройки вдоль цепочки.

**2.** Рассмотрение ведется на примере двух связанных цепочек автогенераторов, динамика которых в квазигармоническом приближении описывается уравнениями для медленно меняющихся комплексных амплитуд  $a_j$  и  $b_j$ :

$$\dot{a}_j = (p + i\Delta)a_j - (1 + i\alpha)|a_j|^2 a_j + d(a_{j+1} - 2a_j + a_{j-1}) + c(b_j - a_j), \quad (1)$$

$$\dot{b}_j = pb_j - |b_j|^2 b_j + d(b_{j+1} - 2b_j + b_{j-1}) + c(a_j - b_j), \quad (2)$$

$$j=1, \dots, N,$$

с граничными условиями:  $a_0 = a_1$ ;  $a_{N+1} = a_N$ ;  $b_0 = b_1$ ;  $b_{N+1} = b_N$ .

Здесь зависимые переменные  $a_j = |a_j|e^{i\varphi_a}$  и  $b_j = |b_j|e^{i\varphi_b}$  характеризуют амплитуды и фазы квазигармонических колебаний  $x_j$  и  $y_j$  в цепочках ( $x_j = a_j(\tau)\exp(it) + a_j^*(\tau)\exp(-it)$ ;  $y_j = b_j(\tau)\exp(it) + b_j^*(\tau)\exp(-it)$ ); точкой обозначена производная по медленному времени  $\tau = 1/2\epsilon t$ ;  $\Delta$  и  $\alpha$  описывают линейную и нелинейную расстройку частот генераторов;  $p$  – инкремент,  $d$  – связь между

элементами в цепочках, а  $c$  – между цепочками (здесь мы ограничиваемся случаем чисто активных связей  $d=|d|$ ,  $c=|c|$ ). Параметр малости  $\varepsilon$  характеризует близость колебаний в рассматриваемых автогенераторах к гармоническим. В данном конкретном случае прототипом являлись цепочки генераторов Ван-дер-Поля

$$\frac{d^2}{dt^2}x_j + \left(1 + \varepsilon\Delta - \frac{\varepsilon}{3}\alpha x_j^2\right)x_j = \varepsilon(p - x_j^2)\frac{d}{dt}x_j + \varepsilon\frac{d}{dt}[d(x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + c(y_j - x_j)], \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_j + y_j = \varepsilon(p - y_j^2)\frac{dy_j}{dt} + \varepsilon\frac{d}{dt}[d(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + c(x_j - y_j)], \quad j=1, \dots, N, \quad (4)$$

с граничными условиями:  $x_0 = x_1$ ,  $x_{N+1} = x_N$ ,  $y_0 = y_1$ ,  $y_{N+1} = y_N$ .

Хотя подробно исследовалась лишь система амплитудных уравнений (1),(2), контрольные расчеты показали, что система (3),(4) имеет подмножество решений, качественно совпадающих с решениями амплитудных уравнений (1),(2) вплоть до  $\varepsilon \sim 1$ .

3. Для качественного анализа режимов, наблюдавшихся в численных решениях для длинных цепочек, воспользуемся бифуркационной диаграммой для однородных ( $a_j = a$ ,  $b_j = b$ ) решений при  $\alpha = 0$ , которая совпадает с диаграммой для двух связанных генераторов и схематично изображена на рис. 1. В зависимости от качественных свойств решений на диаграмме можно выделить три основные области [4]: 1-область «вымирания» автоколебаний, в которой устойчивым является тривиальное решение (напомним, что здесь везде речь идет о случае, когда для изолированных генераторов ( $c=0$ ,  $d=0$ ) выполнены условия самовозбуждения  $p > 0$ ); 2 – область синхронизации ( $\varphi_a = \varphi_b$ ); 3 – область несинхронизованных колебаний ( $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1}(\varphi_a - \varphi_b) \neq 0$ ).

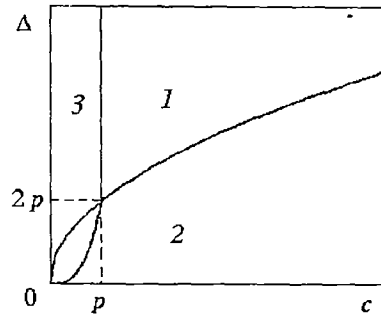


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма для двух связанных генераторов: 1 – область устойчивости тривиального равновесия; 2 – область синхронизации; 3 – область несинхронизованных колебаний

Переход между областями 2 и 3 имеет сложную структуру и, в общем случае, здесь возможны автоколебания как с регулярной, так и хаотической модуляцией. Переходы между областями 1 и 2 или 1 и 3 существенно проще и в рамках системы (1),(2) определяются из анализа малых возмущений, для собственных чисел  $\lambda$  которых имеем

$$\lambda_{1,2} = p - c + \frac{i\Delta \pm \sqrt{4c^2 - \Delta^2}}{2}. \quad (5)$$

Как видно из этого выражения, при сильной связи ( $c > p$ ) нарушение условий синхронизации при увеличении расстройки делает невозможным существование устойчивых колебаний с конечной амплитудой (фактически, уже при  $\Delta^2 > 4c^2 - 4(c-p)^2$  сдвиг фаз между  $a$  и  $b$  становится настолько большим, что слагаемые связи пропорциональные  $c$  в (1), (2) вносят потери, превышающие усиление). Однако, если хотя бы в одном из генераторов имеется нелинейный сдвиг частоты (пропорциональный  $\alpha|a|^2$ ), способный скомпенсировать линейную расстройку  $\Delta$ , то это эквивалентно смещению вниз на диаграмме рис.1 и при

$$4c^2 - 4(c-p)^2 < \Delta^2 < 4c^2 - 4(c-p)^2 + \left(\frac{1}{2} \Delta\alpha - 2(c-p)^2\right) \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right)^{-1},$$

$$\Delta\alpha - 4(c-p) > 0 \quad (6)$$

появляются еще два нетривиальных состояния равновесия для амплитуд [5]

$$|a_{1,2}^{(0)}| = |b_{1,2}^{(0)}| = \frac{\Delta\alpha - 4(c-p) \pm \sqrt{[\Delta\alpha - 4(c-p)]^2 - (1 + \alpha^2/4)[\Delta^2/4 - c^2 - (c-p)^2]}}{4(1 + \alpha^2/4)}. \quad (7)$$

Одно из этих состояний, соответствующее большим амплитудам, является устойчивым. Наличие тривиального и нетривиального асимптотических состояний, устойчивых в предположении однородности решения свидетельствуют, что при определенных ограничениях на величину связи в цепочках из этих состояний могут быть сформированы локализованные структуры. Этот вывод подтверждается приведенными ниже численными решениями.

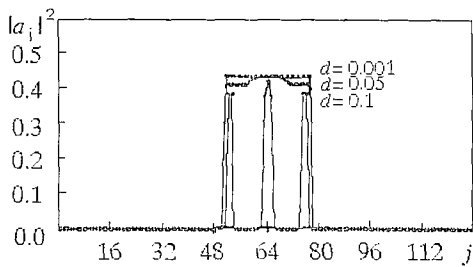


Рис.2. Стационарные структуры  $|a_j|^2$ , реализующиеся в системе (1),(2) при значениях параметров  $\Delta = 2.0$ ,  $\alpha = 5.75$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 0.5$  с начальными условиями  $\varphi_{aj} = \varphi_{bj}$  для всех  $j$ ,  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.434$  при  $j = 51, \dots, 78$ ;  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0$  при  $j = 1, \dots, 50$  и при  $j = 79, \dots, 128$

результатирующее распределение амплитуд существенно зависит от величины значения параметра связи (рис. 3) и величины начального значения амплитуды (рис. 4), несмотря на то, что это значение находится в области  $|a| \geq |a^{(0)}|$ , то есть при заведомо выполненных условиях жесткого возбуждения в каждом из отдельно взятых генераторов.

Пространственно-временные диаграммы на рис. 5 иллюстрируют процессы установления при задании в начальный момент распределения амплитуд в виде ступеньки. На этом рисунке представлены зависимости от времени квадрата модуля амплитуды колебаний на каждом элементе цепочки. Затемненные участки соответствуют  $|a_j(t)|^2 > 0.5 \max_{j,i} \{|a_j(t)|^2\}$ , а светлые  $|a_j(t)|^2 < 0.5 \max_{j,i} \{|a_j(t)|^2\}$ . Положение границы между ними фактически определяет фронт переброса автогенераторов из возбужденного состояния в невозбужденное, поскольку в переходной области содержится всего лишь несколько элементов цепочки. Средняя скорость фронта практически не зависела от  $c$  в интервале его изменения от 0.5 до 1.0 и имела характерную для критических явлений корневую зависимость от параметра связи  $v = 0.92\sqrt{d} - 0.09$  (рис. 6). Вблизи критического значения  $d_{кр} \approx 0.09$  одновременно с усложнением формирующихся структур (см. рис. 4) усложняется и переходной процесс (см. рис. 5, а).

4. На рис. 2 представлены структуры, которые формируются при задании в начальный момент амплитуды локализованных колебаний  $a_j = b_j = |a|$  согласно соотношениям (7). В случае слабой связи ( $d \approx 10^{-3}$ ) генераторов внутри цепочки распределение начальных и установившихся амплитуд практически совпадают. С ростом  $d$  сказывается влияние связи с невозбужденными генераторами и амплитуда  $|a|$  и, следовательно, нелинейная частотная расстройка пропорциональная  $\alpha |a|^2$  становятся зависящими от положения в цепочке. При  $d \approx 0.1$  эта расстройка возрастает настолько, что приводит к локальному срыву синхронизации и образованию более мелких структур. Вблизи критического значения параметра связи  $d_{кр}$

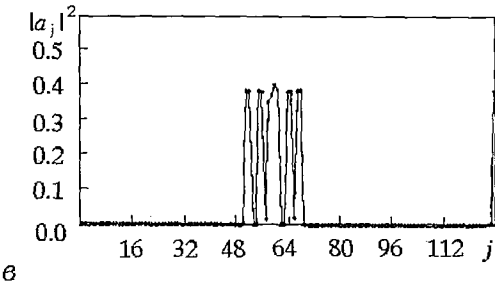
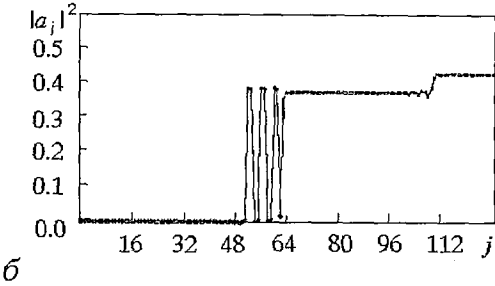
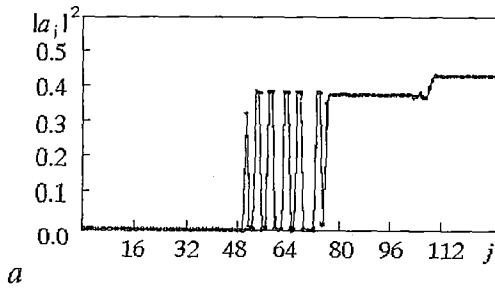


Рис. 3. Стационарные структуры  $|a_j|^2$ , реализующиеся в системе (1),(2) при  $\Delta=2.0$ ,  $\alpha=5.75$ ,  $p=0.5$ ,  $c=0.51$  с начальными условиями  $\varphi_{a,j} = \varphi_{b,j}$  для всех  $j$ ,  $|a_j|^2 = |b_j|^2$  при  $j=51, \dots, 128$ ;  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$  при  $j=1, \dots, 50$ ;  $a-d=0.095$ ; б -  $d=0.0985$ ; в -  $d=0.102$

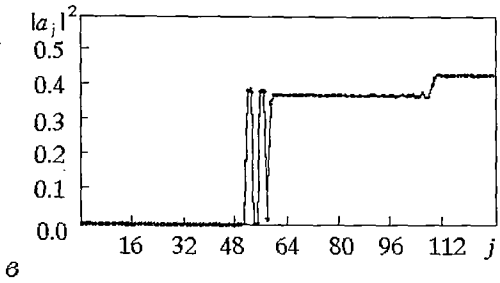
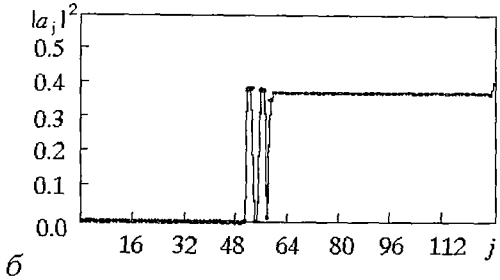
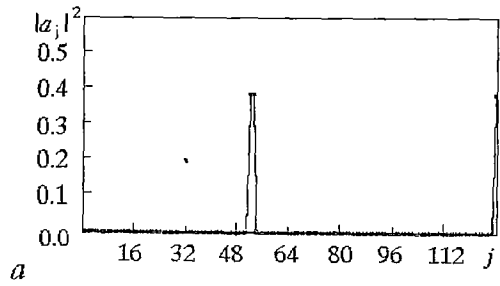
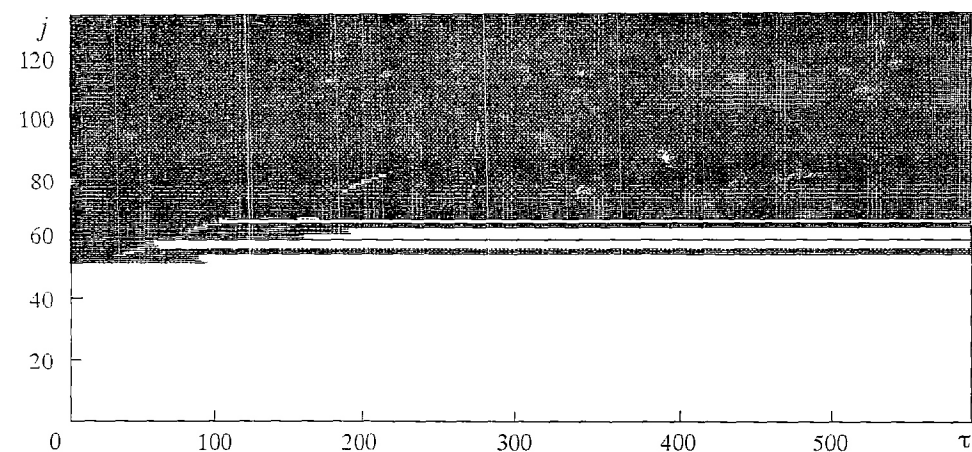
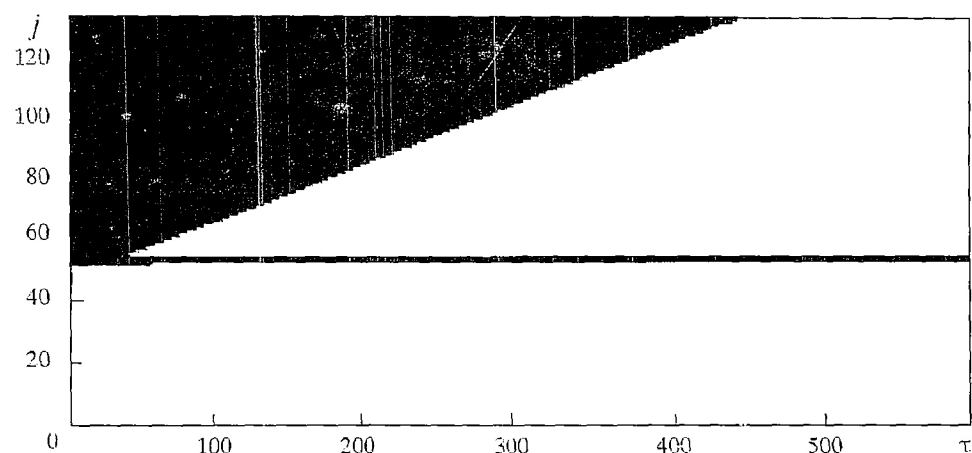


Рис. 4. Стационарные структуры  $|a_j|^2$ , реализующиеся в системе (1),(2) при  $\Delta=2.0$ ,  $\alpha=5.75$ ,  $p=0.5$ ,  $c=0.51$ ,  $d=0.099$  с начальными условиями:  $\varphi_{a,j} = \varphi_{b,j}$  для всех  $j$ ,  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = a^2$  при  $j=51, \dots, 128$ ,  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$  при  $j=1, \dots, 50$ ;  $a-a^2=2.0$ ; б -  $a^2=0.72$ ; в -  $a^2=0.5$

**5.** Рассмотренный выше механизм формирования локализованных структур может представлять интерес как для прикладных задач, так и для более глубокого понимания происхождения маломерного хаоса в многомерных и распределенных системах. В частности, в больших ансамблях  $N$  автогенераторов (в том числе с различающимися параметрами) часто образуются слабо связанные кластеры с  $m < N$  элементами. При этом, как можно ожидать с учетом приведенного выше рассмотрения, в определенной области параметров возможно выживание лишь кластеров с синхронизованными (по крайней мере, хотя бы частично) элементами. В результате эффективное число степеней свободы, достаточное для описания динамики системы, существенно уменьшается. Предварительный анализ подтверждает, что при определенных условиях этот механизм эффективен также при стохастической синхронизации и приводит к формированию локализованных структур с маломерной хаотической динамикой. С другой стороны, наблюдавшееся формирование разнообразных сложных паттернов при сравнительно простых, но неоднородных начальных условиях, свидетельствует, что рассмотренное явление может быть также ответственно за формирование пространственного беспорядка при распространении фронтов в цепочках автогенераторов.



a



б

Рис. 5. Пространственно-временные диаграммы установления стационарных структур в системе (1), (2) при значениях параметров  $\Delta=2.0$ ,  $\alpha=5.75$ ,  $p=0.5$ ,  $c=0.51$  с начальными условиями  $\varphi_{a,j} = \varphi_{b,j}$  для всех  $j$ ,  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.72$  при  $j=51, \dots, 128$ ,  $|a_j|^2 = |b_j|^2 = 0.0$  при  $j=1, \dots, 50$ ;  $a-d = 0.095$ ,  $\bar{\sigma} - d = 0.1$

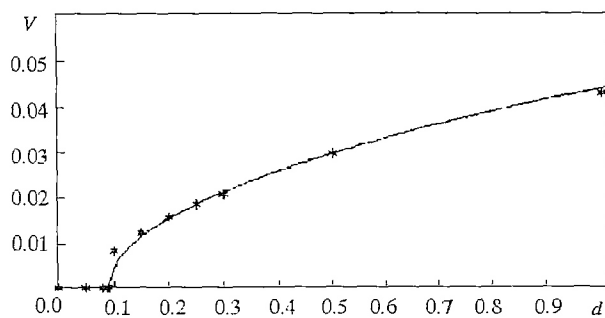


Рис. 6. Скорость распространения фронта перехода из возбужденного состояния в невозбужденное при  $\Delta = 2.0$ ,  $\alpha = 5.75$ ,  $p = 0.5$ ,  $c = 0.51$  в зависимости от величины параметра связи  $d$

Отметим также, что ввиду простоты и общности механизма вымирания автоколебаний все сформулированные выводы без особого труда могут быть перефразированы на случай связанных многомерных решеток при наличии частотных линейных и нелинейных расстройек. Кроме того, трактуя две связанные цепочки как предельный случай сильно неоднородной двумерной решетки, на основании приведенного выше можно сделать вывод, что в двумерных системах введение неоднородности (напри-

мер, частотной расстройки) по одной из координат может приводить к появлению состояний, локализованных по обеим координатам.

*Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-02-15424).*

## Библиографический список

1. Дрендель С.Д., Хорс Н.П., Васильев В.А. Режим синхронизации клеток гладкомышечных тканей // Динамика клеточных популяций. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1984. С. 108.

2. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. Автоволновые процессы. М: Наука, 1987.

3. Bar-Eli K. On the stability of coupled chemical oscillators // Physica D. 1985. Vol. 14. P. 242.

4. Ermentrout G.B. Oscillator death in populations of «all to all» coupled nonlinear oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P.219.

5. Aronson D.G., Ermentrout G.B. and Kopell N. Amplitude response of coupled oscillators // Physica D. 1990. Vol. 41. P. 403.

*Институт прикладной физики РАН  
Нижегородский государственный  
университет*

*Поступила в редакцию 22.03.94  
после переработки 29.04.94*

## THE MECHANISM OF THE FORMATION OF LOCALIZED STRUCTURES IN COUPLED CHAINS OF SELF-EXCITED OSCILLATORS

*G.V.Osipov, M.M.Sushchik*

We present a new mechanism responsible for the formation of localized structures in ensembles of self-excited oscillators that is associated with the effects of oscillator death as result of breaking of the phase-locking regime.



*Осипов Григорий Владимирович* – родился в 1960 г. в г. Горьком, окончил Горьковский госуниверситет в 1982 г. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 1989 г. Доцент Нижегородского госуниверситета. Область научных интересов – нелинейная теория колебаний и волн, теория бифуркаций, структурообразование, вычислительный эксперимент в нелинейной динамике. Соавтор монографии «Устойчивость, структуры и хаос в нелинейных сетях синхронизации».



*Суцук Михаил Михайлович* – родился в 1941 г. в г. Городня Черниговской обл., окончил радиофизический факультет Горьковского госуниверситета в 1965 г. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в 1972 г. Старший научный сотрудник Института прикладной физики РАН. Область научных интересов – автоколебательные процессы в гидродинамических течениях, когерентные структуры, динамические модели турбулентности.