



ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА ЦЕПОЧКИ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.А. Макаров, В.И. Некоркин

Проведено исследование пространственно-временного поведения цепочки диффузионно связанных автоколебательных элементов с жестким режимом возбуждения. Установлено существование пространственного беспорядка и показана его эволюционность.

1. Одной из актуальных задач нелинейной физики, привлекающей постоянное внимание исследователей, является изучение детерминированного хаоса. Сейчас особый интерес вызывает феномен конечномерного пространственного беспорядка (пространственного хаоса) [1,2]. Обычно при изучении этого явления используют модели в виде нелинейных уравнений в частных производных. В последнее время большую популярность также получили системы в виде неограниченного или очень большого числа идентичных, взаимосвязанных точечных отображений или обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [3–7]). Эти системы можно трактовать как совокупность взаимодействующих активных элементов, расположенных в узлах дискретной решетки в пространстве. При этом номер элемента играет роль пространственной координаты. Такие системы принято называть решеточными динамическими моделями. В настоящей работе рассматривается одномерная решеточная (то есть цепочечная) модель следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= y_j, \\ y_j &= -x_j - \mu[\alpha f(x_j)y_j - d(y_{j-1} - 2y_j + y_{j+1})], \quad j = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

$$y_0 = y_1, \quad y_{N+1} = y_N, \quad (2)$$

где $0 < \mu \ll 1$, $\alpha > 0$, $f(x)$ – параметры и функция, характеризующие динамику отдельного элемента цепочки, а d – коэффициент связи между этими элементами. Для определенности будем считать, что функция $f(x) = ax^4 - ax^2 + 1$, где параметр $a > 10^*$. Используя обычный асимптотический метод [8], нетрудно показать, что при $d = 0$ каждый элемент цепочки (1) представляет собой автоколебательную систему с жестким режимом возбуждения. Другими словами, на фазовой

* Обратим внимание на то, что используемая ниже техника исследования амплитудных уравнений может быть перенесена на широкий класс полиномов и других видов $f(x)$.

плоскости отдельного элемента цепочки (1), (2) имеется два аттрактора – состояние равновесия в начале координат и предельный цикл, области притяжения которых отделены неустойчивым предельным циклом.

Система (1), (2) принадлежит классу базовых моделей нелинейной динамики и описывает, в частности, такие канонические объекты, как цепочки взаимодействующих генераторов Ван-дер-Поля [6], автоколебательные химические реакции [9,10] и др. Временная динамика таких систем изучена достаточно хорошо (см., например, [6,9,10] и др.). В последнее время появились работы и по исследованию пространственного поведения цепочек вида (1). Среди них отметим работу [6], в которой для цепочки типа (1) при больших значениях коэффициента связи d с помощью компьютерного моделирования обнаружена нетривиальная зависимость скорости волновых фронтов от d . Основной целью настоящей работы является исследование феномена пространственного беспорядка в цепочке (1), (2).

2. Применяя к (1),(2) метод усреднения [6], получим систему усредненных уравнений для амплитуд r_j и фаз φ_j колебаний

$$\begin{aligned} 2\dot{r}_j &= -\mu\{\alpha F(r_j) - d[r_{j-1}\cos(\varphi_{j-1} - \varphi_j) - 2r_j + r_{j+1}\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j)]\}, \\ 2r_j\dot{\varphi}_j &= \mu d[r_{j-1}\sin(\varphi_{j-1} - \varphi_j) + r_{j+1}\sin(\varphi_{j+1} - \varphi_j)], \\ r_0 &= r_1, \quad r_{N+1} = r_N, \quad \varphi_0 = \varphi_1, \quad \varphi_{N+1} = \varphi_N, \end{aligned} \quad (3)$$

где $j=1,2,\dots,N$, а функция $F(r) = 2ar^5 - ar^3 + r$. Система (3) является градиентной и имеет 2π – периодическую функцию Ляпунова вида [6]

$$V(r,\varphi) = \sum_{j=1}^N \{G(r_j^2) + d[r_{j+1}^2 - 2r_{j+1}r_j\cos(\varphi_{j+1} - \varphi_j) + r_j^2]\}.$$

Следовательно, при любых начальных условиях траектории системы (3) стремятся к одному из состояний равновесия. Найдём координаты этих состояний равновесия. Прежде всего заметим, что устойчивыми могут быть только состояния равновесия, у которых $\varphi_{j-1} - \varphi_j = 0$ (справедливость этого утверждения можно проверить, анализируя экстремумы функции V). Последнему условию, очевидно, удовлетворяют решения $\varphi_j = \varphi^0$, где φ^0 – произвольная константа, то есть в фазовом пространстве системы (3) существует инвариантная прямая. Остальные координаты этих состояний равновесия являются решениями системы уравнений

$$d(r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1}) - \alpha F(r_j) = 0, \quad (4)$$

$$r_0 = r_1, \quad r_{N+1} = r_N. \quad (5)$$

Вводя обозначения $u_j = r_{j-1}$, получим систему

$$u_{j+1} = r_j, \quad (6)$$

$$r_{j+1} = 2r_j - u_j + \alpha F(r_j)/d,$$

которую будем трактовать как динамическую систему на плоскости, определяемую диффеоморфизмом S

$$(u,r) \rightarrow (r, 2r - u + \alpha F(r)/d).$$

Тогда кусок дискретной траектории $L: \{(u_2, r_2), \dots, (u_N, r_N)\}$ отображения S , соединяющий на фазовой плоскости (u,r) кривые

$$L_2: \{r = u + \alpha F(r)/d\}, \quad L_N: \{u = r + \alpha F(r)/d\},$$

определяет решения системы (4),(5) и, следовательно, координаты состояний равновесия системы (3). Отображение S является отображением типа Хенона. В работах [7,11], для такого типа отображений развита техника, позволяющая выделять параметры, при которых отображение на фазовой плоскости действует подобно известному отображению «подкова Смейла» (см., например, [12]). Применим эту технику к отображению S . Рассмотрим это отображение в области параметров D , выделяемой неравенствами

$$d < \frac{\alpha(a-10)}{20}, \quad a > 10, \quad \Phi(u_{\max}) > 2r_3^0,$$

$$d < \frac{\alpha F(r_{\max})}{2(r_3^0 - r_{\max})}, \quad d < -\frac{\alpha F(r_{\min})}{2(r_3^0 + r_{\min})},$$

где $r_{\min} = ((3a \pm (9a^2 - 40a)^{1/2})/(20a))^{1/2}$, $r_3^0 = ((a + (a^2 - 8a)^{1/2})/(4a))^{1/2}$,

$$u_{\max} = ((3a \mp (9a^2 - 40a(1+2d/\alpha))^{1/2})/(20a))^{1/2}, \quad \Phi(u) = 2u + \alpha F(u)/d.$$

Заметим, что величины r_{\min} , r_{\max} и r_3^0 являются абсциссами экстремумов и наибольшего нуля функции $F(r)$, а u_{\max} – абсцисса максимума функции $\Phi(u)$. Если параметры системы (6) принадлежат области D , то на фазовой плоскости (u, r) существует прямоугольник Π , на котором S действует подобно отображению «подкова Смейла» (рис. 1). При этом размеры Π – величины β и γ –

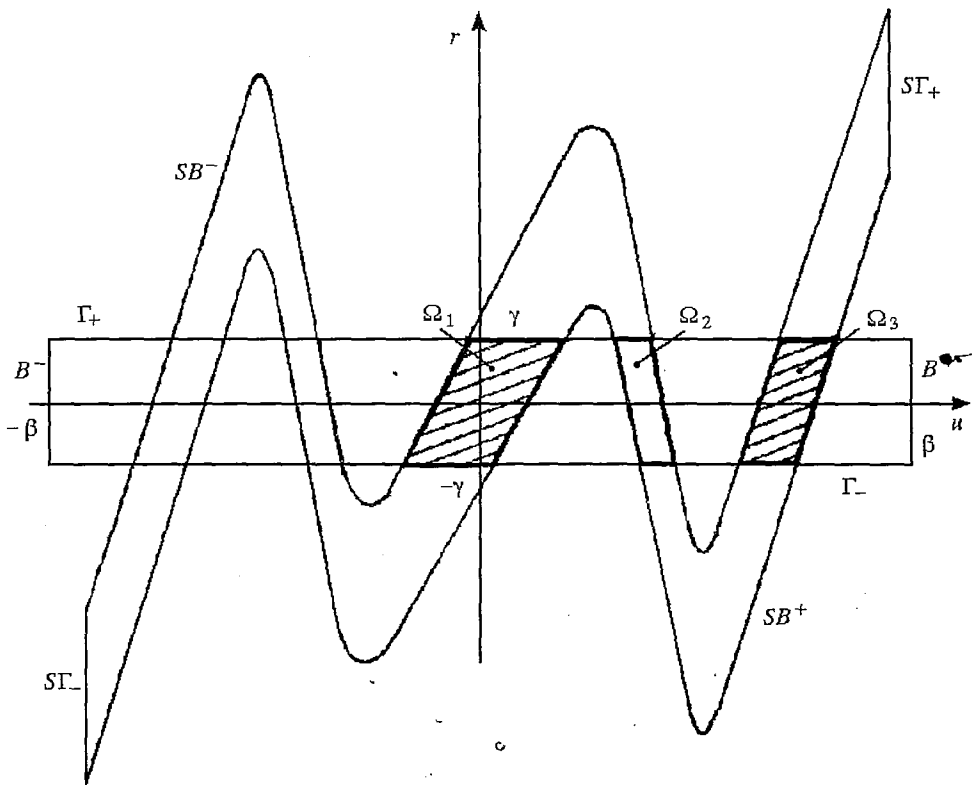


Рис.1.

удовлетворяют неравенствам

$$\gamma > r_3^0, \quad \beta > \gamma, \quad (7)$$

$$\beta < \Phi(\gamma) - \gamma, \quad \beta < -\gamma + \Phi(u_{\max}),$$

а образы его границ (см. рис.1) при действии S имеют вид

$$\begin{aligned} S\Gamma_{\pm} &= \{(u,r) \mid u = \pm \gamma, \quad |r - \Phi(\pm\gamma)| \leq \beta\}, \\ SB^{\pm} &= \{(u,r) \mid r = \Phi(u) \mp \beta, \quad |u| \leq \gamma\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь, как преобразуется начальная кривая L_2 при действии отображения S . Поскольку все $r_j \geq 0$, то будем интересоваться частью L_2 , которая расположена в первом квадранте плоскости (u,r) . Из (8) следует, что при $0 \leq u \leq \gamma$ кривая L_2 заключена между SB^+ и SB^- (см.рис. 1). Поэтому пересечение L_2 с прямоугольником $\Pi^+ = \Pi \cap \{u \geq 0, r \geq 0\}$ состоит из трех компонент. Эти компоненты расположены в $\Omega_i^+ = \Omega_i \cap \{u \geq 0, r \geq 0\}$, $i = 1,2,3$ и соединяют прямые $r=0$ и Γ^+ (см. рис. 1). Обозначим через L_2^0 и L_2^1 кривые, расположенные в Ω_1^+ и Ω_3^+ , соответственно. Ниже будет установлено, что решения системы (4), (5), отвечающие траекториям отображения S , проходящим через Ω_2^+ , являются неустойчивыми. Поэтому, исключим из дальнейшего рассмотрения часть L_2 , лежащую в Ω_2^+ , а так же все ее образы, попадающие в Ω_2^+ . Поскольку L_2^0 лежит в Ω_1^- и принадлежит прямоугольнику Π , на котором S действует подобно отображению «подкова Смейла», то итерирование L_2^0 происходит по правилам «подковы». Именно, за одну итерацию L_2^0 преобразуется в кривую L_3 , которая имеет по одной компоненте в Ω_1^+ и Ω_3^+ . Обозначим эти компоненты соответственно через L_3^{00} и L_3^{01} . Эти компоненты также являются монотонно возрастающими кривыми, соединяющими прямые $r=0$ и Γ^+ . Заметим, что в принятой нами записи $L_k^{0m_1 \dots m_{N-2}}$, $m_i \in \{0;1\}$, $i = 1,2,\dots, N-2$, верхние индексы, принимающие значения 0 или 1, характеризуют «путь», пройденный компонентой L_2^0 при итерировании, а индекс k связан с числом итераций, равным $k-2$. Рассуждая аналогично и действуя теперь отображением S на L_3^{00} , получим две компоненты L_4^{000} и L_4^{001} , а на L_3^{01} — компоненты L_4^{010} и L_4^{011} . Качественный вид этих компонент представлен на рис. 2, а. Итак, отображение S «расщепляет» каждую кривую, расположенную в Ω_1^+ или Ω_3^+ на две. Этот процесс «расщепления» можно схематически изобразить с помощью диаграммы, представленной на рис. 3. Таким образом, после $(N-2)$ итераций, получается множество, состоящее из 2^{N-2} монотонно возрастающих кривых вида $L_N^{0m_1 m_2 \dots m_{N-2}}$, $m_i \in \{0;1\}$, соединяющих прямые $r=0$ и Γ^+ и расположенных в областях Ω_1^+ и Ω_3^+ . Аналогичный процесс происходит и при преобразовании компоненты L_2^1 . Результатом итерирования L_2^1 будет

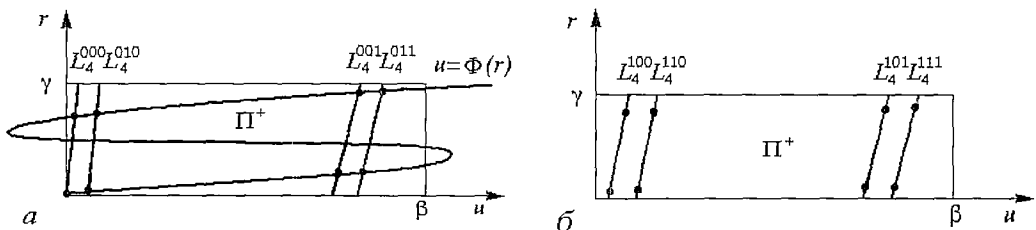


Рис. 2

множество, состоящее из 2^{N-2} кривых вида $L_N^{1m_1 m_2 \dots m_{N-2}}$, $m_i \in \{0;1\}$, соединяющих прямые $r=0$ и Γ^+ (см. рис. 2, б, где $N=4$). Таким образом, за $(N-2)$ итерации L_2^0 и L_2^1 образуется множество, состоящее из 2^{N-1} кривых вида $L_N^{0m_1 \dots m_{N-2}}$ и $L_N^{1m_1 \dots m_{N-2}}$. С другой стороны, мы интересуемся кусками траекторий отображения S , которые «стартовали» на L_2^0 и L_2^1 , после $(N-2)$ итерации «попадают» на L_N . Нетрудно видеть, что в Π^+ L_N имеет две монотонно возрастающие кривые, соединяющие прямые $u=0$ и B^+ . Поэтому, L_N пересекает каждую из компонент $L_N^{0m_1 \dots m_{N-2}}$ и $L_N^{1m_1 \dots m_{N-2}}$ в двух местах. Результатом этого пересечения является 2^N точек (см. рис. 3), расположенных на возрастающих участках линии L_N (точки, лежащие на убывающем участке L_N не рассматриваются, так как им соответствуют максимумы функции V и неустойчивые решения системы (1), (2)). Следовательно, существует 2^N кусков траекторий отображения S , соединяющих L_2 и L_N и расположенных на фазовой плоскости (u, r) в первом квадранте. Координаты точек этих кусков траекторий и определяют 2^N наборов решений $r_j = r_j^*$, $j = 1, 2, \dots, N$ системы (4), (5). Заметим, что среди этих наборов имеется два, независимых от j — $\{r_j^* = 0\}$ и $\{r_j^* = r_3^0\}$.

Итак, система (3) имеет 2^N состояний равновесия, координаты которых следующие:

$$r_j = r_j^*, \quad \varphi_j = \varphi^0,$$

где $j = 1, 2, \dots, N$, а φ^0 — произвольная константа (произвольность фазы связана с тем, что правая часть системы (3) зависит только от разностей фаз). Исследуем устойчивость этих состояний равновесия. Выберем одно из них и рассмотрим линеаризованную систему для возмущений $\xi_j = r_j - r_j^*$, $\eta_j = \varphi_j - \varphi^0$.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= -(d + \alpha F'(r_1^*))\xi_1 + d\xi_2, \\ \dot{\xi}_k &= d\xi_{k-1} - (2d + \alpha F'(r_k^*))\xi_k + d\xi_{k+1}, \\ \dot{\xi}_N &= d\xi_{N-1} - (d + \alpha F'(r_N^*))\xi_N, \\ \dot{\eta}_1 &= -dr_2^* \eta_1 / r_1^* + dr_2^* \eta_2 / r_1^*, \\ \dot{\eta}_k &= dr_{k-1}^* \eta_{k-1} / r_k^* - d(r_{k-1}^* + r_{k+1}^*) \eta_k / r_k^* + dr_{k+1}^* \eta_{k+1} / r_k^*, \\ \dot{\eta}_N &= dr_{N-1}^* \eta_{N-1} / r_N^* - dr_{N-1}^* \eta_N / r_N^*, \end{aligned} \tag{9}$$

где $k = 2, 3, \dots, N-1$. В уравнения для ξ_j не входят переменные η_j и наоборот. Поэтому их можно анализировать отдельно. Матрицу линейной системы для ξ_j обозначим через A , а для η_j — через B . Исследуя с помощью элементарных преобразований $\det B$, можно показать, что одно из собственных значений матрицы B равно нулю и соответствует направлению «вдоль» инвариантной прямой. Расположение остальных собственных значений матриц A и B установим с помощью теоремы Гершгорина [13]. Согласно этой теореме все собственные значения матриц A и B на комплексной плоскости $\{z \in C\}$ заключены в объединении N кругов

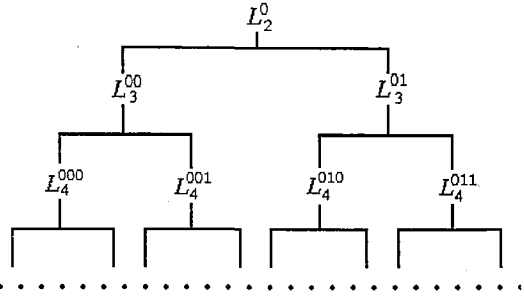


Рис. 3. Схема «расщепления» линии L_2^0 при действии отображения S

$$\begin{aligned}
|z + d + \alpha F'(r_i^*)| &\leq d, \\
|z + 2d + \alpha F'(r_k^*)| &\leq 2d, \\
|z + dr_{2,N-1}^*/r_{1,N}^*| &\leq d(r_{2,N-1}^*/r_{1,N}^*), \\
|z + d(r_{k-1}^* + r_{k+1}^*)/r_k^*| &< 2d(r_{k-1}^* + r_{k+1}^*)/r_k^*,
\end{aligned} \tag{10}$$

где $i = 1, N$; $k = 2, 3, \dots, N-1$. Из (9), (10) получаем, что все круги, отвечающие матрице B , проходят через начало координат и расположены в левой полуплоскости, а круги, соответствующие матрице A , будут целиком лежать в левой полуплоскости, если

$$F'(r_j^*) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{11}$$

Из (11) следует, что устойчивыми будут лишь те состояния равновесия, которые удовлетворяют неравенствам

$$r_j^* < r_{\max}, \quad r_j^* > r_{\min}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{12}$$

Поскольку $r_{\max} < u_{\max}$, а $r_{\min} > u_{\min}$, где u_{\min}, u_{\max} – абсциссы минимума и максимума функции $\Phi(u)$, то этим неравенствам удовлетворяют только те из состояний равновесия, координаты которых соответствуют кускам траекторий отображения S , целиком лежащим в $(\Omega_1 \cap \omega_1) \cup (\Omega_3 \cap \omega_3)$, где $\omega_i = S^{-1}\Omega_i$. Таких состояний равновесия 2^N , и они расположены на возрастающих участках функции $u = \Phi(r)$. На рис. 2 это темные точки.

3. Проведенное исследование усредненной системы (3) позволяет сделать следующие выводы о динамике цепочечной модели (1), (2). При любых начальных условиях в цепочке (1), (2) происходит синхронизация колебаний, это означает, что парциальные переменные, характеризующие поведение отдельных элементов цепочки, периодически изменяются во времени с одной и той же частотой и фазой (конечно, с точностью до величин порядка μ^2). Распределение амплитуд колебаний «вдоль» пространственной координаты j определяется кусками траекторий отображения S и может быть описано последовательностью из двух символов: $(0 \ m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{N-2})$, $(1 \ m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{N-2})$, где $m_i \in \{0; 1\}$. Причем, символ «0» соответствует амплитуде колебаний близкой к нулю, а «1» – амплитуде близкой к амплитуде устойчивого предельного цикла парциального элемента. Число таких движений равно $2^N - 1$, следовательно, система (1), (2) является мультистабильной. Поскольку S демонстрирует хаотическую динамику, чередование символов 0 и 1 в этих последовательностях будет весьма разнообразным и при $N \rightarrow \infty$ может быть описано с помощью схемы Бернулли из двух символов. Следовательно, колебания в цепочке (1), (2) являются регулярными во времени и беспорядочными в пространстве. Так как усредненная система (3) является градиентной, то конечномерный пространственный беспорядок в цепочке (1), (2) является эволюционным, то есть может реализоваться из порядка.

Библиографический список

1. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л., Цимринг Л.Ш. Конечномерный пространственный беспорядок // УФН. 1992. Т. 162, № 8. С. 1.
2. Collet P., Eckmann J-P. Space-time behaviour in problems of hydrodynamic type: a case study // Nonlinearity. 1992. Vol. 5. P. 126.
3. Арансон И.С., Гапонов-Грехов А.В., Рабинович М.И., Роговский А.В., Сагдеев Р.В. Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред. Препринт N163. Горький: Ин-т прикладной физики АН СССР, 1987. 24 с.

4. *Bunimovich L.A., Sinai Ya.G.* Space–time chaos in coupled map lattices // *Non–linearity*. 1988. Vol. 1. P. 581.
5. *Kaneko K.* Spatiotemporal chaos in one– and two–dimensional coupled map lattices // *Physica D*. 1989. Vol. 37. P. 60.
6. *Defontaines A–D., Pomeau Y., Rostand B.* Chain of coupled bistable oscillators : a model // *Physica D*. 1990. Vol. 46. P. 201.
7. *Афраймович В.С., Некоркин В.И.* Устойчивые состояния в цепочечных моделях неограниченных, неравновесных сред // *Математическое моделирование*. 1991. Т. 3, № 12. С. 65.
8. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
9. *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.* Математическое моделирование в биофизике. М.: Наука, 1975.
10. *Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г.* Автоволновые процессы. М.: Наука, 1987.
11. *Некоркин В.И.* Пространственный хаос в дискретной модели радиотехнической среды // *Радиотехника и электроника*. 1992. Вып. 4. С. 651.
12. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. М.: Мир, 1975.
13. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

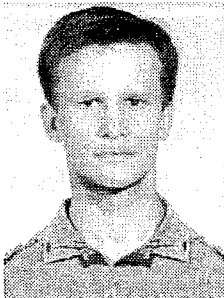
*Нижегородский государственный
университет*

*Поступила в редакцию 17.01.94
после переработки 22.03.94*

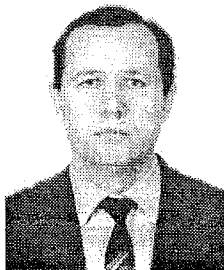
SPATIAL–TIME DYNAMICS OF AUTO–OSCILLATION ELEMENTS CHAIN

V.A. Makarov, V.I. Nekorkin

The investigation of spatial–time behaviour of the chain of diffusionally bounded auto–oscillation elements with a rigid state of excitation is carried out. It is stated that there is spatial disorder and its evolutionary character is demonstrated.



Макаров Валерий Анатольевич – родился в 1970 году в Сыктывкаре, окончил Нижегородский государственный университет в 1992 году. После окончания работает в ННГУ. В 1993 году поступил в аспирантуру при ННГУ. Область научных интересов – теория колебаний и волн, динамика неравновесных сред.



Некоркин Владимир Исаакович – родился в 1948 году в г. Куты Иваново–Франковской области, окончил Горьковский государственный университет в 1971 году. После окончания работает в ННГУ. Защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук в ГГУ (1981) и доктора физико–математических наук (1992) в области теории колебаний и волн. Доцент ННГУ. Область научных интересов теория колебаний и волн, теория бифуркаций. Автор монографии «Устойчивость, структуры и хаос в сетях синхронизации». Имеет свыше 60 научных публикаций.