



## БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ НЕАВТОНОМНОГО МАЯТНИКОВОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ синхронизации

*К.Г.Кивелева, Л.А.Фрайман*

Качественно-численным методом с использованием компьютерного моделирования проведен бифуркационный анализ периодических движений и гомоклинических структур в неавтономной системе дифференциальных уравнений, являющейся математической моделью систем фазовой синхронизации (СФС). Исследован вопрос хаотизации процессов в системе. Представлены бифуркационные диаграммы разбиения плоскостей параметров системы на области с качественно различным динамическим поведением. Приводится физическая интерпретация полученных результатов исследования системы применительно к СФС.

В работе рассматривается известная неавтономная система

$$\dot{\varphi} = \gamma, \tag{1}$$

$$\ddot{y} = -(\lambda + a \cos \varphi)y - \sin \varphi + \mu \sin \omega t,$$

эквивалентная уравнению второго порядка

$$\ddot{\varphi} + (\lambda + a \cos \varphi)\dot{\varphi} + \sin \varphi = \gamma + \mu \sin \omega t.$$

Система имеет широкий спектр приложений в радиотехнике [1], в электромеханике [2] и в теории сверхпроводимости [3] как математическая модель, описывающая динамику ряда конкретных физических устройств. В зависимости от физических приложений исследуемой модели могут быть интересны разные задачи, приводящие к необходимости изучения системы (1) в различных областях значений параметров. Для систем фазовой синхронизации, предназначенных для стабилизации частоты, это, как правило, поиск областей параметров  $\gamma$ ,  $\lambda$ , соответствующих режиму подстройки под эталонный сигнал, определяемому простыми колебательными движениями системы (1), и исследование бифуркационных механизмов изменения динамики системы при выходе из этих областей. Для электромеханических систем наиболее интересны значения параметров внешнего воздействия  $\mu$ ,  $\omega$ , соответствующие качанию синхронного мотора без перескока полюсов, а также условия, при которых в системе могут наблюдаться гистерезисные явления. Для систем со сверхпроводящим контактом наибольший интерес представляет определение размеров по параметру  $\gamma$  областей, соответствующих существованию периодических движений системы (1) с различными характеристиками вращения,

определяющих размеры ступеней вольт–амперных характеристик. Кроме того, интересно изучение влияния гомо– и гетероклинических структур на неустойчивость вольт–амперной характеристики сверхпроводящего контакта в неавтономном режиме. Следовательно, несмотря на множество результатов по исследованию систем, аналогичных (1), существенный интерес представляет детальный бифуркационный анализ модели (1), который проводится в этой работе на основе качественно–численного метода [4–6] с применением компьютерного моделирования [7–11]. Основное внимание уделяется исследованию системы (1) в связи с тем, что она является математической моделью системы фазовой синхронизации [1], где  $\varphi$ ,  $y$ ,  $t$  – соответственно, безразмерные разность фаз, разность частот эталонного и подстраиваемого генератора и время. Параметры системы в приложении к СФС имеют следующий смысл:  $\gamma$  – относительная начальная расстройка,  $\lambda$  – затухание,  $a$  – параметр фильтра,  $\mu$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота помехи. Случай  $a=0$  соответствует интегрирующему фильтру,  $a>0$  – пропорционально–интегрирующему фильтру в цепи управления СФС, а случай  $a < 0$  – приближенному учету запаздывания с интегрирующим фильтром.

Полное качественное исследование системы при  $\mu = 0$  (автономная система) для трех различных случаев  $a=0$ ,  $a>0$ ,  $a<0$  дано в работе [1]; при  $\mu<1$  в [4–5] качественными методами для этой системы получены бифуркационные диаграммы.

В настоящей работе система исследована при  $\mu \neq 0$ ,  $\lambda>0$  для каждого случая ( $a=0$ ,  $a>0$ ,  $a<0$ ) на основе теории бифуркаций динамических систем с помощью компьютерного моделирования. Изучены периодические движения системы и их инвариантные многообразия; определены границы областей существования, устойчивости колебательных и вращательных периодических движений и торов; исследован характер возникновения хаоса в системе; проанализировано влияние гомоклинических структур на ее динамическое поведение. Обнаружено, что границей области глобальной устойчивости могут быть не только границы рождения вращательных периодических движений, но и границы появления притягивающих гомоклинических структур. Установлено, что с ростом амплитуды внешнего воздействия  $\mu$  поведение траекторий системы сильно усложняется, появляются новые типы движений и бифуркаций. Результаты исследований системы представлены в виде бифуркационных диаграмм в плоскости параметров  $\gamma$ ,  $\lambda$  для случая малых ( $\mu=0.01$ ) и больших ( $\mu=1.0$ ) значений параметра  $\mu$  и фиксированных значениях параметров:  $a=0$ ,  $a=1$ ,  $a=-1$  при  $\omega = 1.0$ .

**1. Предельные множества.** Система рассматривается в цилиндрическом фазовом пространстве  $G(\varphi(\text{mod}2\pi), y, t(\text{mod}2\pi/\omega))$  и пространстве параметров  $\gamma, \lambda, \mu, \omega, a$ . Поскольку фазовое пространство системы периодически по  $t$ , его исследование сводится к исследованию отображения последования Пуанкаре цилиндра  $(\varphi, y)$  в себя, которое строится численным интегрированием системы на периоде неавтономного воздействия  $t=2\pi/\omega$ . Периодические движения в (1) однозначно характеризуются соответствующими им неподвижными точками (или циклом точек) отображения Пуанкаре (период такого движения определяет кратность неподвижной точки), сепаратрисные многообразия седловых периодических движений – сепаратрисными инвариантными кривыми седловых неподвижных точек, торондальные многообразия – замкнутыми инвариантными кривыми.

Основными типами простых предельных множеств, существующих в (1) при  $\mu \neq 0$  [6], являются устойчивые, седловые и неустойчивые периодические движения  $(q, p)$  колебательного ( $q=0$ ) или вращательного ( $q \neq 0$ ) типов

$$\begin{aligned} \varphi(t+p\tau) &= \varphi(t) + 2\pi q, \\ y(t+p\tau) &= y(t), \quad p=1,2,3, \dots, \quad q=0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Проекция наиболее типичных для системы (1) предельных множеств на плоскость  $t=0$  приведены на рис. 1.

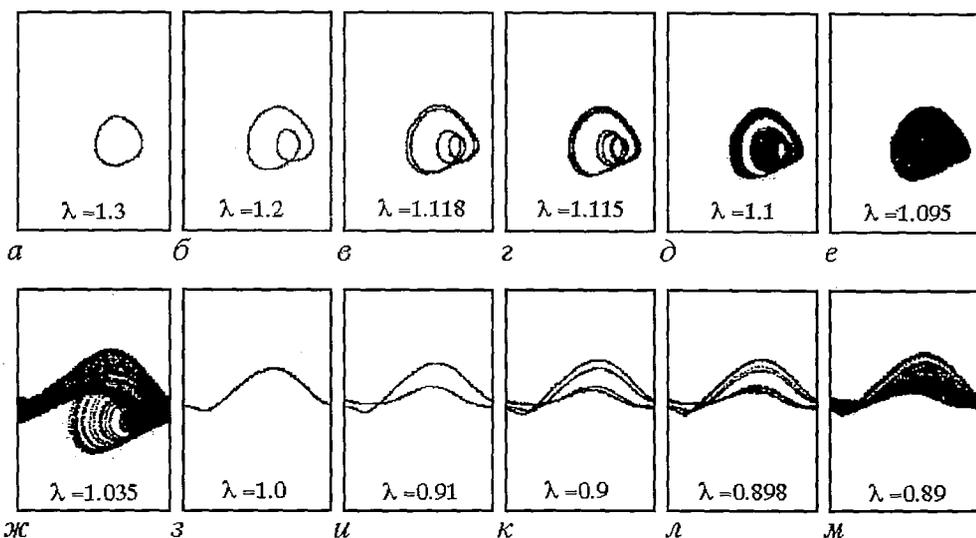


Рис. 1. Проекция предельных множеств системы (1) при фиксированных значениях параметров  $\omega=1.0, \mu=1.0, \gamma=0.7, a=-1$  и переменном значении параметра  $\lambda$

**2. Бифуркационный анализ.** Основу бифуркационного анализа системы составляют построение качественных особенностей для заданной точки пространства параметров и продолжение их по параметрам до бифуркационных границ. Для построения бифуркационных диаграмм и фазовых портретов использовались алгоритмы и программы [7–11] численного исследования отображения Пуанкаре, порождаемого траекториями неавтономной системы.

**2.1. Случай  $\mu=0.01$ .** На рис. 2 приведены бифуркационные диаграммы для системы (1), построенные с помощью продолжения по параметру  $\mu$  установленных в [1] качественных особенностей автономной системы.

Бифуркационные кривые, приведенные на этом рисунке, разбивают плоскость  $\gamma, \lambda$  на области с качественно различным поведением траекторий. Выше кривых  $b_1$  и  $b_6$  лежит область  $d_1$  глобальной асимптотической устойчивости колебательных движений; справа от кривой  $b_3$  – область  $d_6$  существования только вращательных движений. Область  $d_2$  расположена между кривыми  $b_2$  и  $b_3$ , а также кривой  $b_2'$  для случая  $a = 1$  и кривой  $b_5$  при  $a = -1$ ; область  $d_3$  – между кривыми  $b_4$  и  $b_5$ . Область  $d_4$  ограничена сверху кривой  $b_4$ , а область  $d_5$  лежит между кривыми  $b_1'$  и  $b_6$ . В областях  $d_1$  и  $d_2$  отсутствуют пересечения сепаратрисных инвариантных кривых седловых неподвижных точек  $(0,1)$ -типа. В областях  $d_2 \div d_5$ , наряду с колебательными существуют устойчивые вращательные движения с положительным вращением фазы, кроме того, в области  $d_4$  – с отрицательным вращением фазы, а в области  $d_5$  – неустойчивые с положительным вращением фазы.

**2.2. Случай  $\mu = 1.0$ .** На рис. 3 приведены бифуркационные диаграммы для различных значений параметра  $a$ . Кроме бифуркационных кривых  $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, S$ , описанных выше, при  $\mu = 1.0$  построены некоторые другие характерные бифуркационные границы, возникающие с ростом параметра  $\mu$ , а именно: кривые  $D_{b_0}, m_1^-, m_1^+, m_2^-, m_2^+, m_3^-, m_3^+, m_4^-, m_4^+, S_1, b_7$ . При всех значениях параметра  $a$  значительно увеличилась область между кривыми  $b_1$  и  $b_2$ , в результате чего появились новые области. Область  $d_3$  кривой  $b_2$  разделилась на две области: область, расположенную под кривой  $b_2$ , поведение траекторий в которой сохраняется такое же, как в области  $d_3$ , и область выше кривой  $b_2$ , в которой существует пересечение и верхних, и боковых сепаратрисных инвариантных

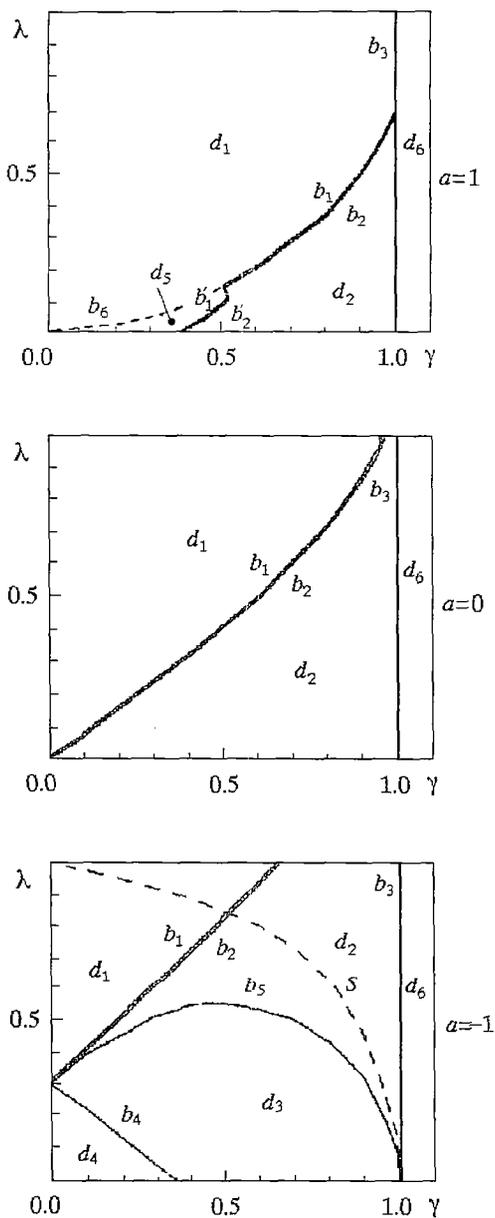


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы при  $\mu=0.01$  для значений  $a=1, a=0, a=-1$ . Кривые  $b_1, b_1', b_2, b_2', b_4, b_5$  соответствуют касанию сепаратрисных инвариантных кривых неподвижной точки  $(0,1)$  типа:  $b_1, b_1', b_2, b_2'$  — верхних,  $b_4$  — нижних,  $b_5$  — боковых. Кривые  $b_3, b_6, S$  соответствуют бифуркациям:  $b_3$  — седло-узловой неподвижной точки  $(0,1)$ -типа;  $b_6$  — полуустойчивого вращательного тора;  $S$  — смене устойчивости колебательного движения  $(0,1)$ -типа

кривой  $b_2$ ). Типичное поведение траекторий системы в этом случае представлено на рис. 4, *a*. Третий сценарий связан с образованием притягивающих гомоклинических структур, порождающих вращательно-колебательные хаотические движения в окрестности сепаратрисных поверхностей. Типичное

кривых седловой неподвижной точки  $(0,1)$ -типа. Область  $d_4$  разделилась кривой  $b_2$  на область ниже кривой  $b_2$ , для точек которой поведение траекторий аналогично области  $d_4$ , и область выше кривой  $b_2$ , для точек которой имеет место пересечение верхних, нижних и боковых (левых и правых) сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки  $(0,1)$ -типа. При  $a=-1$  в области  $d_4$  выделяется еще область, расположенная под кривой  $b_7$ , для точек которой нет пересечений боковых сепаратрис.

Как видно из сравнения рис. 2 и рис. 3, с ростом  $\mu$  в системе происходят следующие качественные изменения структуры параметрического пространства:

возникают последовательности бифуркаций удвоения периода устойчивых периодических движений, приводящие к образованию сложных предельных множеств (см. рис. 1, *a-e, з-м*);

в результате нарушения гладкости торов появляются области параметров с периодическими движениями  $(2,1), (3,1), (4,1), (3,2)$ -типов;

в пространстве параметров появляются большие области с гомо- и гетероклиническими структурами, взаимодействующими с периодическими движениями различной кратности и устойчивости, что обуславливает возможность появления притягивающих структур хаотического типа (соответствующие области на рис. 3 выделены штриховкой).

При исследовании системы при  $\mu=1.0$  обнаружены три сценария перехода к хаотическим движениям. Первый, наиболее простой, связан с последовательностью удвоений периода колебательных (см. рис. 1, *a-e*, ниже кривой  $D_{b_0}$ ) или вращательных (см. рис. 1, *з-м*) движений. Второй иллюстрирует теоретические результаты работы [5] и связан с образованием в системе кольца сложных движений вращательного типа, возникающего в результате разрушения пересечений верхних сепаратрисных кривых (ниже

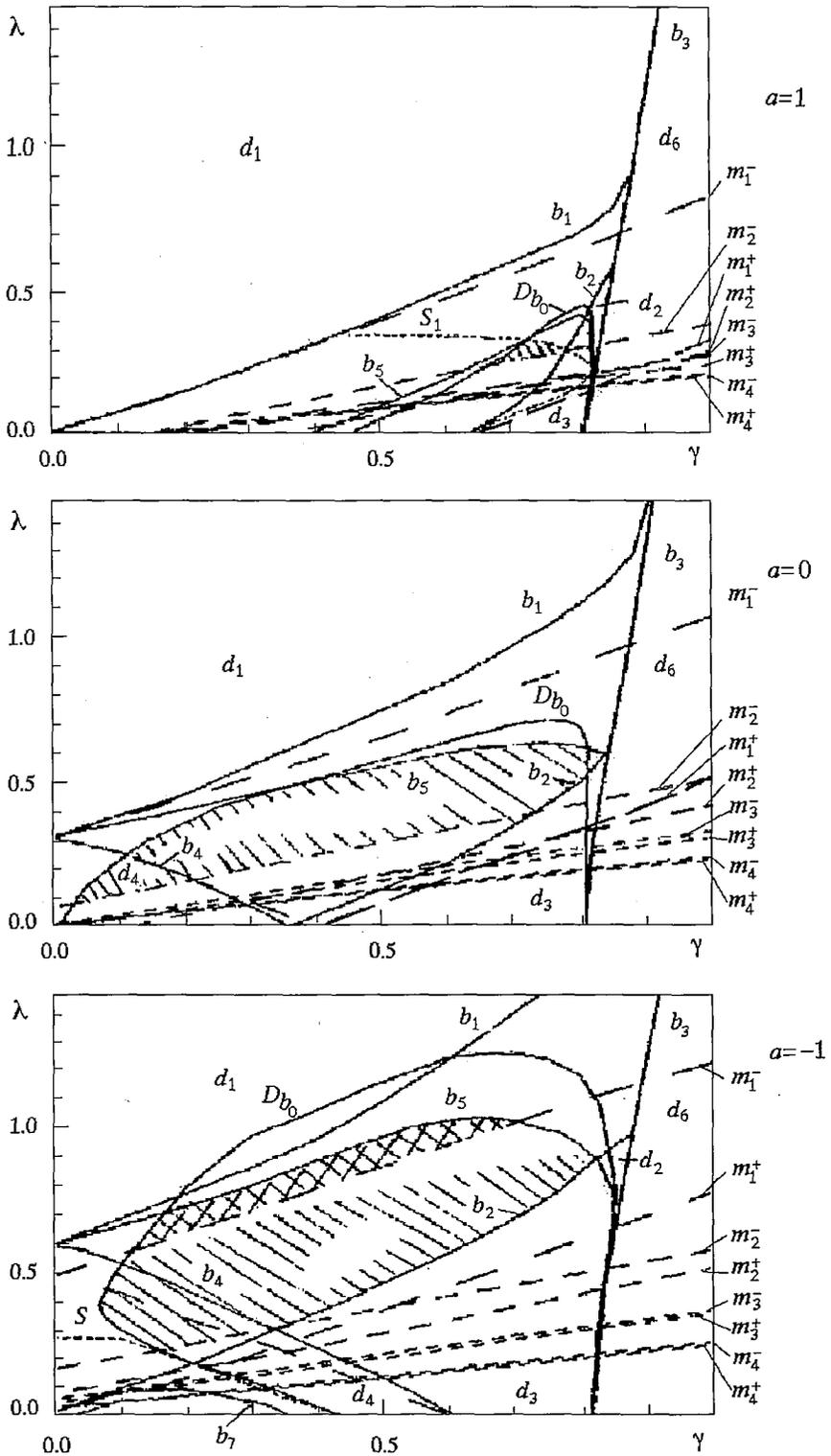
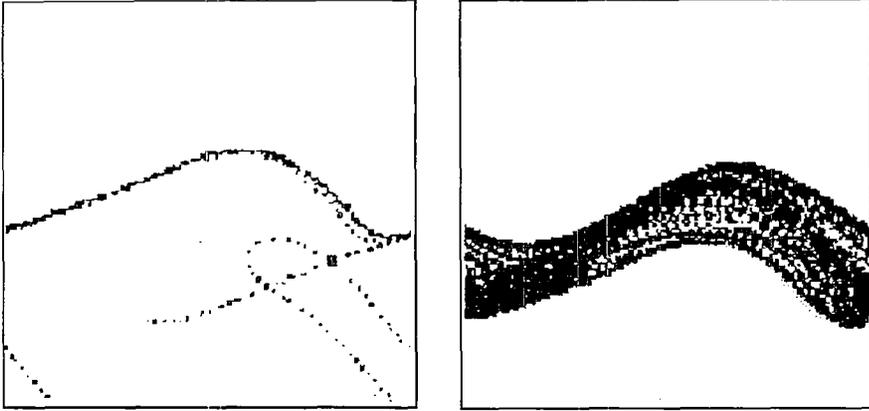
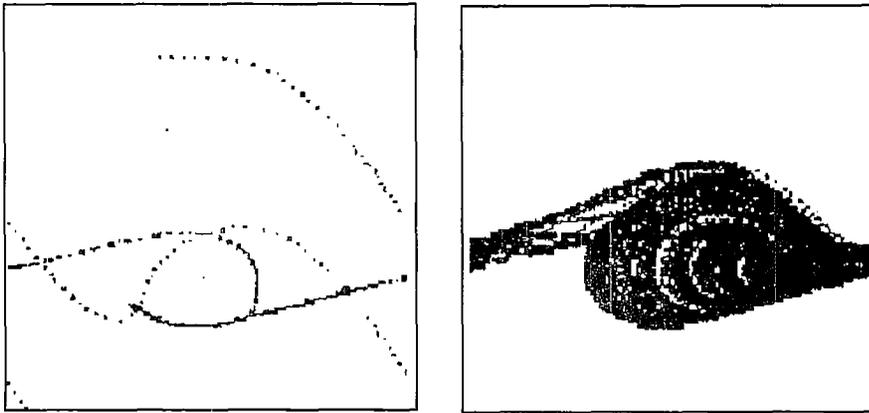


Рис. 3. Бифуркационные диаграммы при  $\mu=1.0$  для значений  $a=1, a=0, a=-1$ . Кривая  $D_{b_0}$  соответствует первому удвоению периода устойчивых периодических движений колебательного типа;  $b_7$  – касанию боковых сепаратрисных инвариантных кривых;  $S_1$  – смене устойчивости периодического движения (1,1)-типа;  $m_1^-, m_1^+, m_2^-, m_2^+, m_3^-, m_3^+, m_4^-, m_4^+$  – границы областей существования резонансов, соответственно (1,1), (2,1), (3,1), (4,1)-типов



а



б

Рис. 4. Поведение сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки  $(0,1)$ -типа в плоскости отображения Пуанкаре (слева) и проекция предельной траектории на плоскость  $t=0$  (справа) при значениях параметров: а-  $\gamma=0.7, \lambda=0.5, \omega=1.0, \mu=1.0, a=-1$ ; б-  $\gamma=0.55, \lambda=1, \omega=1.0, \mu=1.0, a=-1$

поведение траекторий, определяемое существованием такой структуры, изображено на рис. 4, б. В процессе численных экспериментов было установлено, что для появления притягивающих структур является необходимым выполнение минимум двух условий: наличие гомоклинических пересечений верхних и боковых сепаратрисных инвариантных кривых седловой неподвижной точки и существование последовательности удвоений кратности устойчивой неподвижной точки  $(0,1)$ -типа (должно быть не менее трех удвоений). Поведение предельного множества в этом случае можно объяснить следующим образом: в результате пересечения верхних сепаратрисных кривых происходит возникновение и хаотизация движений вращательного типа (в положительном направлении вращения фазы), а пересечение боковых сепаратрисных многообразий, охватывающих разрушенное устойчивое стационарное множество колебательного типа, обуславливает возвращаемость в его окрестность. Установлено, что нарушение эффекта притягивающих структур происходит с появлением в фазовом пространстве однократных колебательных или вращательных устойчивых резонансов или устойчивых инвариантных торов.

Анализ бифуркационной диаграммы и предельных траекторий для параметров из области между кривыми  $m_1$ - и  $b_5$  позволили обнаружить новый механизм выхода из области глобальной устойчивости периодического движения колебательного типа. Он заключается в том, что при переходе в эту область через кривую  $b_5$  возникает вращение траекторий из-за наличия притягивающих гомоклинических структур. Этот механизм реализуется, если при выходе из

области глобальной устойчивости последовательность бифуркаций удвоения периода и пересечение боковых сепаратрисных кривых неподвижной точки (0,1)-типа предшествуют бифуркации рождения устойчивых вращательных периодических движений (1,1)-типа.

### 3. Анализ поведения системы для различных случаев параметра $a$ .

Обнаруженные особенности поведения заключаются в следующем:

только при  $a < 0$  наблюдается смена устойчивого колебательного движения на вполне неустойчивое (кривая  $S$  на рис. 3);

только при  $a > 0$  наблюдается рождение на неустойчивом вращательном торе резонансов вращательного типа через неустойчивые седло-узлы (смена устойчивости происходит с возрастанием параметра  $\lambda$  на границе  $S_1$ , (см. рис. 3), вначале через мультипликатор, равный  $-1$ , а затем через последовательности бифуркаций от неустойчивого к устойчивому седло-узлу (см.[11]), реализующиеся в системе (1) для решений удвоенного периода);

только при  $a > 0$  обнаружена возможность сосуществования устойчивой неподвижной точки (0,1)-типа и резонансов (1,1), (2,1), (3,1), (4,1) с гладким устойчивым инвариантным тором. Фазовый портрет в плоскости отображения Пуанкаре для этого случая представлен на рис. 5. Установлено, что устойчивыми стационарными множествами при этих значениях параметров являются резонансы (0,1), (3,1) и (4,1)-типа и устойчивый вращательный тор. Резонансы (1,1) и (2,1) являются вполне неустойчивыми. Сепаратрисные инвариантные многообразия резонансов (0,1), (1,1), (2,1) и (3,1) пересекаются, образуя сложные гомо- и гетероклинические структуры, однако анализ поведения траекторий при различных начальных условиях не обнаружил их притягивающих свойств. В системе в зависимости от начальных условий практически реализуются два устойчивых предельных множества: неподвижная точка (0,1)-типа с бассейном притяжения, ограниченным сверху сепаратрисными многообразиями резонанса (3,1) и замкнутая инвариантная кривая (проекция тора на плоскость Пуанкаре),

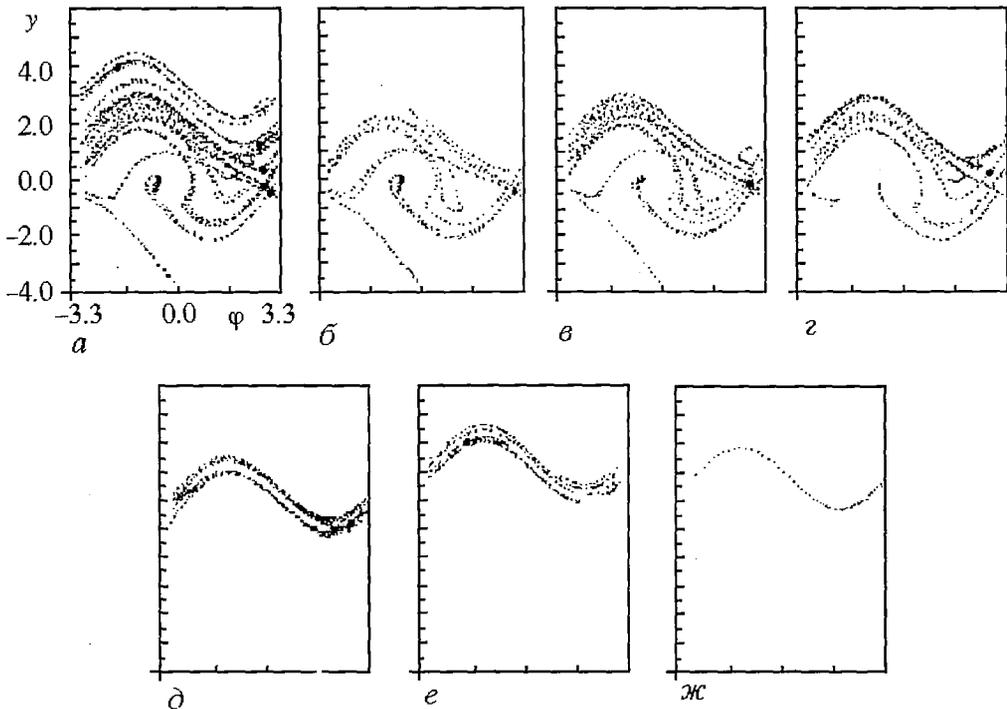


Рис. 5. Фазовые портреты в плоскости отображения Пуанкаре при значениях параметров  $\omega=1.0$ ,  $\gamma=0.325$ ,  $\lambda=0.05$ ,  $\mu=1.0$ ,  $a=1$ : а- полная картина; б-е - сепаратрисные инвариантные кривые седловых неподвижных точек соответственно (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1)-типов; ж - инвариантная кривая, охватывающая цилиндр, соответствующая устойчивому тору

притягивающая все остальные начальные условия, кроме малой узкой области, ограниченной пересекающимися сепаратрисными кривыми резонанса (4,1).

Наибольшую область глобальной асимптотической устойчивости система имеет при  $a > 0$ , причем не только за счет сдвига вниз кривой  $b_1$ , но и за счет добавления областей неустойчивости вращательных резонансов (1,1), (2,1), (3,1), (4,1)-типов.

**4. Физическая интерпретация полученных результатов применительно к СФС.** Проведенное исследование системы (1) дает возможность определить области существования различных режимов СФС и проследить зависимость их от параметров. В [1] установлена связь между режимами СФС и периодическими движениями вида (2). Основным рабочим режимом СФС является режим подстройки под эталонный сигнал, определяемый периодическим движением колебательного типа. Он реализуется в области  $d_1$  на рис. 2, 3. При значениях параметров ниже этой области, при переходе через кривую  $b_1$ , система входит в режим квазизахвата эталонным сигналом. Нарушение этого режима происходит с появлением вращательных движений при переходе через бифуркационную кривую  $m_1$  или с появлением при переходе через кривую  $b_5$  притягивающей гомоклинической структуры. Тогда захват становится невозможным, в СФС устанавливается соответственно, либо регулярный вращательный или колебательный режим в зависимости от начальных условий, либо режим хаотических биений. Вращательный режим определяет подстройку под боковые частоты, с частотой устойчивого вращательного периодического движения системы (1). В случае  $a > 0$  между кривыми  $m_1^-$  и  $m_1^+$ , ниже кривой  $S_1$  (см.рис. 3), выделяется область неустойчивости периодического движения (1,1)-типа, что приводит к увеличению области параметров, соответствующих режиму подстройки под эталонный сигнал.

Таким образом, динамические особенности и свойства СФС, описываемые моделью (1), при значениях параметров, интересующих исследователя, могут быть достаточно полно и детально получены и изучены с помощью бифуркационного анализа фазового и параметрического пространств математической модели.

Авторы благодарны В.Н.Белых за внимание и помощь в работе.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-16253).*

## Библиографический список

1. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре // Дифференциальные уравнения. 1973. Т.9, № 3. С. 403.
2. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд. ИЛ, 1952.
3. Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.N. Shunted-Josephson-junction model. 11. The non-autonomous case // Phys. Rev. B. 16. 1977. P. 4860.
4. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. О глобальной структуре разбиения цилиндрического фазового пространства одной неавтономной системы // Дифференциальные уравнения. 1973. Т.9, № 4. С.595.
5. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. Гомоклинические структуры, порождаемые простейшей моделью фазовой автоподстройки // Фазовая синхронизация / Под ред. В.В.Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1975. С. 97.
6. Белюстина Л.Н., Белых В.Н. О неавтономной фазовой системе уравнений с малым параметром, содержащей инвариантные торы и грубые гомоклинические кривые // Изв. Вуз. Сер. Радиофизика. 1972. Т.15, № 7. С. 1039.
7. Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Нахождение неподвижных точек точечного отображения плоскости в плоскость // Алгоритмы и программы. М.: ВНИИЦ, 1979. № 3 (29).

8. Кивелева К.Г., Фрайман Л.А. Нахождение характеристических чисел неподвижных точек и критических направлений сепаратрисных инвариантных кривых точечного отображения плоскости в плоскость, порождаемого решениями неавтономной периодической системы второго порядка // Алгоритмы и программы. М.: ВНТИЦ, 1979. № 3 (29).

9. Белюстина Л.Н., Ежевская Н.А. Программа вычисления координат неподвижных точек точечного отображения плоскости в плоскость на основе аналога метода секущих // Алгоритмы и программы. М.:ВНТИЦ, 1979. № 3 (29).

10. Фрайман Л.А. Алгоритмы качественно-численного исследования некоторых математических моделей систем фазовой синхронизации // Теоретическая электротехника: Республ. межвед. научно-технич. сб. Львов: Львовский гос.ун-т, 1986. Вып. 41. С. 30.

11. Фрайман Л.А. Исследование бифуркаций неавтономного уравнения фазовой синхронизации качественно-численным методом // Динамика систем. Численные методы исследования динамических систем: Межвуз. тематич. сб. науч. трудов / Под ред. Ю.И.Неймарка. Горький: Горьков. гос. ун-т, 1982. С. 127.

12. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

НИИ прикладной математики  
и кибернетики

Поступила в редакцию 29.04.94  
после переработки 12.07.94

## THE BIFURCATION ANALYSIS OF NONAUTONOMOUS PENDULUM EQUATION FROM THE THEORY OF PHASE-LOCKED LOOP

*K.G.Kiveleva, L.A.Fraiman*

The bifurcation analysis of periodic solutions and homoclinic structures in non-autonomous system of differential equations which models phase-locked loop (PLL) is carried out with the qualitative numerical method using computer modelling. The chaoticization of dynamics of the system is investigated. The bifurcation diagrams on the parameter plane with regions corresponding to different qualitative dynamics are presented. The achieved results are interpreted applying to PLL.



*Кивелева Клара Георгиевна* – родилась в 1937 году в Горьком, окончила Горьковский педагогический институт в 1960 году. Работает в НИИ прикладной математики и кибернетики с 1987 года, научный сотрудник. Область научных интересов – моделирование нелинейных динамических систем из теории синхронизации. Опубликовала в соавторстве 14 научных статей в журналах, межвузовских и республиканских сборниках. Соавтор двух коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации».



*Фрайман Людмила Алексеевна* – родилась в 1946 году в Горьком, окончила Горьковский государственный университет в 1969 году. После окончания университета работает в НИИ прикладной математики и кибернетики, старший научный сотрудник. Область научных интересов – динамические системы, численные методы исследования. Опубликовала в соавторстве 12 научных статей в журналах, межвузовских и республиканских сборниках. Соавтор двух коллективных монографий «Фазовая синхронизация» и «Системы фазовой синхронизации» и пяти учебно-методических работ.