



## ДИНАМИКА ДЕФЕКТОВ В СТРУКТУРЕ ТИПА «МИШЕНЬ» И ФОРМИРОВАНИЕ СПИРАЛЕЙ С ВЫСОКИМ ТОПОЛОГИЧЕСКИМ ЗАРЯДОМ

*Л.Н. Корзинов, А.С. Никулин, М.И. Рабинович*

В недавних экспериментах на конвекции в газе  $\text{CO}_2$  были получены спирали с высоким топологическим зарядом (1÷13). Мы предлагаем модель, описывающую формирование таких спиралей и показываем их устойчивость. Многозарядная спираль является результатом эволюции дефектов на фоне концентрической системы роликов (структура типа «мишень»). Дефекты, в результате взаимодействия друг с другом и с цилиндрической структурой, движутся к центру мишени и формируют многозарядную спираль, топологический заряд которой равен сумме топологических зарядов дефектов. В качестве основной модели рассматривается градиентное уравнение Свифта – Хоенберга с комплексным параметром порядка. Принимая во внимание слабонегативные добавки в этой модели, можно объяснить вращение многозарядной спирали, которое также наблюдается в эксперименте.

### Введение

В последнее время наблюдается усиливающийся интерес к исследованию многомерных пространственных структур во многих областях физики. С точки зрения экспериментатора важна возможность визуального наблюдения за поведением системы, что выражается во множестве экспериментов в гидродинамике [1–4]. И хотя полное описание таких экспериментов требует исследования системы уравнений Навье – Стокса, задачи формирования структур и их динамика могут описываться существенно более простыми модельными уравнениями [5]. Одной из наиболее общих моделей, описывающих формирование структур в слабонеровновесных средах, является уравнение Свифта – Хоенберга (SH)[6]. Градиентный вариант этого уравнения описывает формирование конвективных структур (таких как ролики, гексагоны, решетки), а также мультистабильные состояния, когда возможно их сосуществование. Мы предлагаем использовать модель SH без каких-либо дополнительных слагаемых для описания формирования структур типа «мишень» и спиралей (часть 1) с произвольным топологическим зарядом (часть 2). Использование именно этой модели оправдано экспериментальными данными [4], из которых следует, что спирали и мишени существуют в тех же областях параметров, где ролики и гексагоны.

Градиентный характер модели SH не позволяет объяснить многие явления в системах, далеких от равновесия. Такими эффектами являются, в частности, вращение спиральных структур (наблюдалось в экспериментах на конвекции в газе  $\text{CO}_2$  [4]), вращающиеся кольца пламени [12] и др. Неградиентное обобщение модели SH, позволяющее объяснить эти эксперименты, излагается в части 3.

## 1. Структуры роликов и фазовые уравнения

Рассмотрим уравнение ШН для комплексного параметра порядка в случае суперкритической бифуркации [6,7]

$$u_t = u - |u|^2 u - (k_0^2 + \Delta)^2 u, \quad (1)$$

которое можно представить в градиентной форме

$$u_t = \frac{\delta V}{\delta u^*}, \quad (2)$$

где

$$V = \int_{\Omega} \left\{ -|u|^2 + \frac{1}{2}|u|^4 + |(k_0^2 + \Delta)u|^2 \right\} dr. \quad (3)$$

Будем интересоваться решением уравнения (1), отвечающим структуре типа «мишень» или, что то же, «цилиндрические ролики»:

$$u = ae^{ivr}. \quad (4)$$

где  $a$  – медленная функция координаты и времени. Линейный анализ показывает, что устойчивы будут решения с  $v = k_0$  (далее будем предполагать  $v = k_0 = 1$ ). Подставляя решение в форме (4) в уравнение (1) и усредняя по «быстрым» колебаниям  $e^{ivr}$ , можно получить уравнение для  $\dot{a}$

$$\dot{a}_t = a - |a|^2 a - [\Delta + i(2\partial/\partial r + 1/r)]^2 a \quad (5)$$

или

$$\dot{a}_t = -\frac{\delta G}{\delta a^*}.$$

$$G = \int_{\Omega} \left\{ -|a|^2 + \frac{1}{2}|a|^4 + |[\Delta + i(2\partial/\partial r + 1/r)]a|^2 \right\} dr.$$

Легко видеть, что для больших  $r$  это уравнение переходит в хорошо известное уравнение Ньюэлла – Уайтхеда [6], описывающее структуру из параллельных роликов. В этом же пределе ( $r \gg 1$ ) можно получить выражение для  $a$

$$a = \sqrt{1 - 1/r^2}.$$

Это амплитуда поля для структуры типа мишени, изображенной на рис. 1. Будем интересоваться поведением топологических дефектов на фоне такой структуры (рис. 2), которые описываются уравнением для фазы. Для этого представим  $a$  в виде  $a = Ae^{i\varphi}$  и получим из (5) уравнение для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \varphi_t = & -\Delta^2 \varphi + \Delta \varphi (\nabla \varphi)^2 + 2 \nabla \varphi \nabla (\nabla \varphi)^2 + 2 [2 \Delta \varphi \varphi_r + \partial/\partial r (\nabla \varphi)^2 + 2 \nabla \varphi \nabla \varphi_r + \\ & + \frac{1}{r} (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2r^3}] + 4 [\varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{2}{r^3} \varphi_r]. \end{aligned} \quad (6)$$

В уравнении (6) учтено, что  $A \approx 1$ , исключая области, близкие к центру дефекта и центру мишени [9,10]. Рассмотрим решение (6) в виде топологического дефекта

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{Y - Y_0}{X - X_0} \right).$$

Это решение удовлетворяет (6) вплоть до слагаемых порядка  $1/r^2$ , что можно

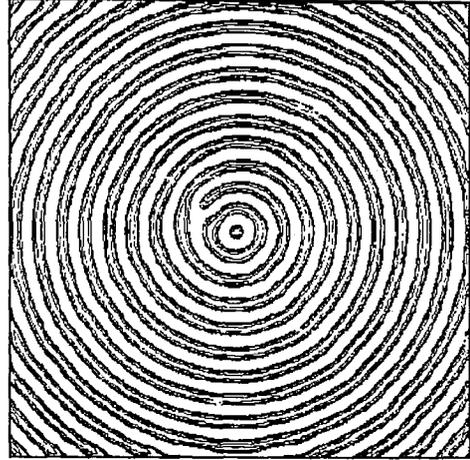
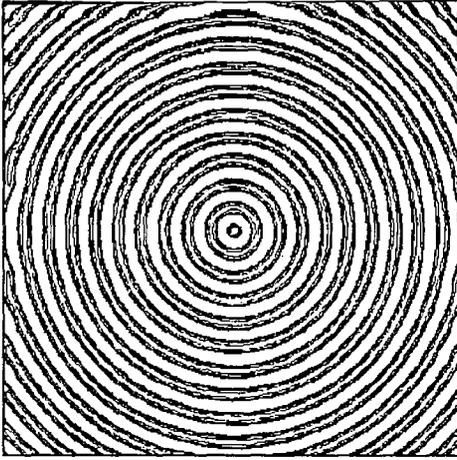


Рис. 1. Структура типа «мишень»,  $t = 1000$ .  $t$  – временной интервал интегрирования уравнения (1) в безразмерных единицах

Рис. 2. Топологический дефект на фоне мишени,  $t = 150$

считать достаточной точностью, поскольку характерная длина этой системы равна  $2\pi$  (длина волны роликов), а уравнение (6) примет вид

$$\varphi_t = 4\left[\varphi_{rr} + \frac{1}{r}\varphi_r\right] \quad (7)$$

или

$$\varphi_t = \frac{\delta F}{\delta \varphi}; \quad F = 2 \int_{\Omega} \varphi_r^2 r dr d\theta.$$

Рассмотрим динамику дефекта в рамках уравнения (7). Будем предполагать, что дефект движется медленно и не меняет своей структуры. Это означает, что во времени меняются только координаты центра дефекта. Представим решение типа дефекта в полярных координатах

$$\varphi = S \operatorname{arctg} \left( \frac{r \cos \theta - R \cos \psi}{r \sin \theta - R \sin \psi} \right), \quad (8)$$

где  $S$  – топологический заряд,  $R$  и  $\psi$  – координаты центра дефекта. Используя вариационную форму уравнения (7), получим уравнения для  $R$  и  $\psi$

$$\int_{\Omega} (\varphi_R \dot{R} \varphi_{RR} S R + \varphi_{\psi} \dot{\psi} \varphi_{\psi\psi} S \psi) r dr d\theta = - \frac{\partial V}{\partial R} \delta R - \frac{\partial V}{\partial \psi} \delta \psi, \quad (9)$$

где

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{R^2 + r^2}{r |r^2 - R^2|} dr = \pi (\ln R + \text{const}).$$

Тогда из (9) следует

$$\begin{cases} m_R \dot{R} = -\frac{\pi}{R} \\ m_{\psi} \dot{\psi} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где  $m_R$  и  $m_{\psi}$  – положительные константы

$$m_R = \int_{\Omega} \varphi_R^2 r dr d\theta, \quad m_{\psi} = \int_{\Omega} \varphi_{\psi}^2 r dr d\theta.$$

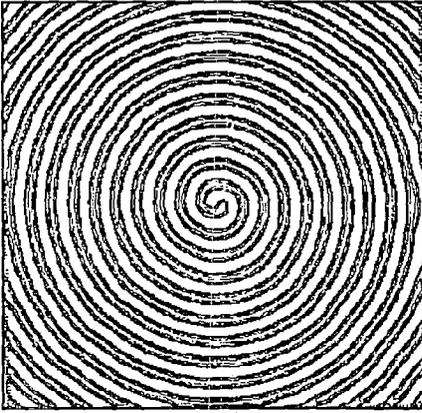


Рис. 3. Спираль с топологическим зарядом, равным 1,  $t=1000$

Из уравнений движения (10) видно, что дефект движется поперек роликов к центру мишени независимо от топологического заряда [11]. Когда дефект приходит в устойчивое состояние равновесия ( $R = 0$ ), формируется спираль с топологическим зарядом, равным 1 (рис. 3). Такой механизм формирования спиралей качественно отличается от способа возникновения спиралей в модели Гинзбурга – Ландау, где сначала появляется топологический дефект, являющийся ведущим центром, от которого «раскручивается» спираль.

## 2. Формирование спиралей с большим топологическим зарядом

Рассмотрим формирование многозарядных спиралей на основе динамики двух взаимодействующих дефектов. Будем интересоваться динамикой дефектов в двух случаях:

- 1) расстояния  $R_1$  и  $R_2$  удовлетворяют условию:  $R_1, R_2 \gg |R_1 - R_2|$ ;
- 2) нет ограничений на  $R_1, R_2$ , но центры дефектов и центр роликов лежат на прямой линии. Второй случай интересен для исследования динамики дефектов с одинаковыми топологическими зарядами, которые отталкиваются друг от друга и, двигаясь к центру мишени, располагаются на одной линии с центром мишени. Дефекты же с противоположными топологическими зарядами притягиваются друг к другу и аннигилируют.

Процедура получения уравнений движения дефектов аналогична описанной в части 1, но решение представляется в виде

$$\varphi = S_1 \arctg\left(\frac{r \cos \theta - R_1 \cos \psi_1}{r \sin \theta - R_1 \sin \psi_1}\right) + S_2 \arctg\left(\frac{r \cos \theta - R_2 \cos \psi_2}{r \sin \theta - R_2 \sin \psi_2}\right), \quad (12)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – топологические заряды. В первом случае мы получаем уравнения

$$m_R \dot{R}_i = -\frac{\partial V}{\partial R_i}, \quad m_{\psi_i} R_i^2 \dot{\psi}_i = -\frac{\partial V}{\partial \psi_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$V = \pi \ln(R_1 R_2) + S_1 S_2 (4\pi(\pi - \psi) \cos \frac{\psi}{2} + \frac{\pi R^2}{R_1 R_2 \sin^2(\psi/2)}), \quad (13)$$

где  $R = |R_1 - R_2|$  и  $\psi = \psi_1 - \psi_2$ .

Исследование потенциала  $V$  подтверждает предположение, что дефекты движутся к центру и  $\psi$  стремится к  $\pi$  для дефектов одинакового знака. Но эти уравнения не справедливы для малых  $R_1, R_2$  поэтому мы должны рассмотреть второй случай.

Для  $\psi = \pm \pi$  получаем

$$m_{R_1} \dot{R}_1 + m(R_1 R_2) \dot{R}_2 = - \frac{\partial V}{\partial R_1},$$

$$m_{R_2} \dot{R}_2 + m(R_1 R_2) \dot{R}_1 = - \frac{\partial V}{\partial R_2},$$

$$V = \pi [\ln(R_1 R_2) + S_1 S_2 (-\ln(R_1 + R_2) + \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \ln \frac{R_1}{R_2} + \ln(R_1 R_2))]. \quad (14)$$

Потенциал  $V$  – возрастающая функция от  $R_1, R_2$  при любых  $S_1, S_2$ . Следовательно, дефекты движутся к центру мишени независимо от знаков топологических зарядов. Такое же поведение дефектов наблюдалось и в компьютерном эксперименте.

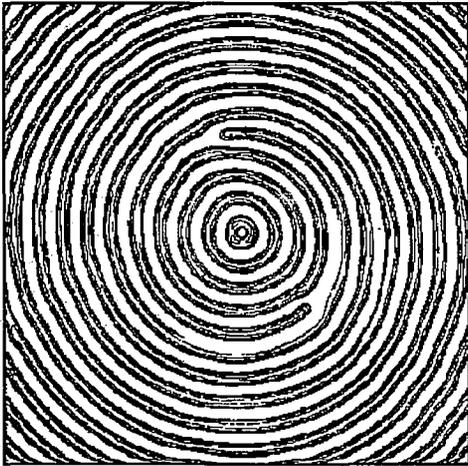


Рис. 4. Два топологических дефекта на фоне мишени,  $t=150$

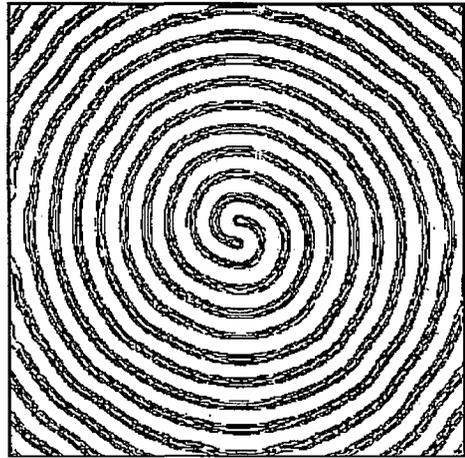


Рис. 5. Спираль с топологическим зарядом, равным 2,  $t=1000$

Таким образом, мы показали, что два дефекта формируют двухзарядную спираль (рис. 4, 5). Формирование многозарядных спиралей происходит по тем же законам, что и двухзарядных, поскольку потенциал  $V$  квадратичен по  $\phi$  и, следовательно, является суперпозицией двухчастичных взаимодействий (рис. 6). Поскольку спираль является устойчивой структурой, то формирование нескольких спиралей в одном резонаторе также возможно. Картинка, подобная полученной нами в численном эксперименте (рис.7), наблюдалась в эксперименте [3].

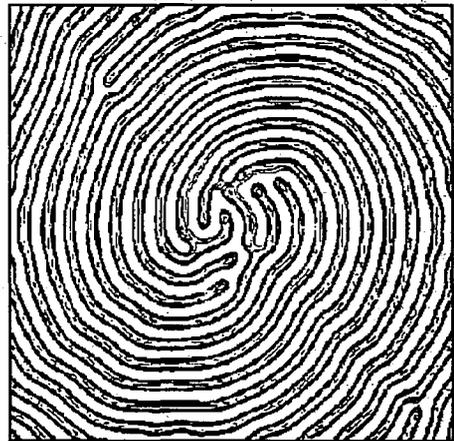


Рис. 6. Спираль с большим топологическим зарядом,  $t=1000$

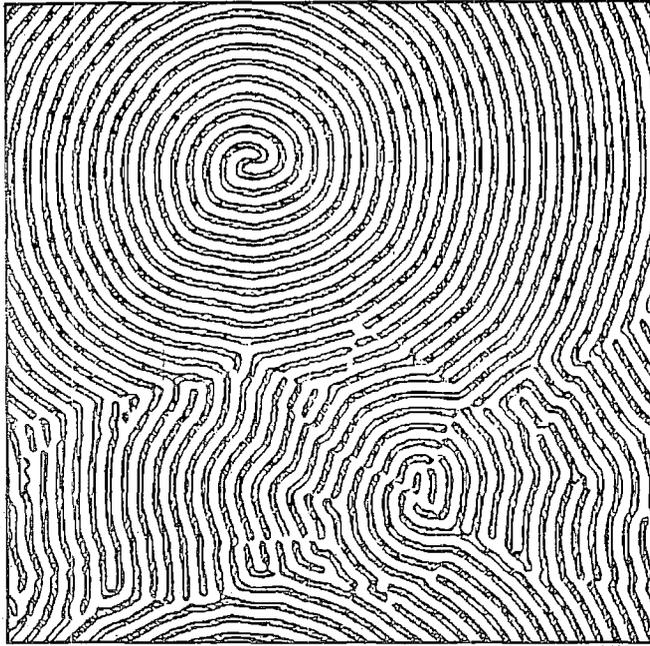


Рис. 7. Несколько спиралей в одном резонаторе,  $t=1000$

#### 4. Эффект непотенциальных слагаемых

Рассмотрим влияние малых неградиентных слагаемых на динамику спиралей. Рассмотрим обобщенное уравнение SH:

$$u_t = u - (1 + ib)|u|^2u - (1 + ic)(1 + \Delta)^2u, \quad (18)$$

которое может быть получено, например, из уравнений Максвелла – Блоха, описывающих динамику лазера. Амплитудное уравнение, соответствующее (18), будет иметь вид

$$a_t = a - (1 + ib)|a|^2a - (1 + ic)\left[\Delta + i\left(2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right]^2a. \quad (19)$$

Рассмотрим сначала случай  $c = 0$ . Будем искать решение в форме

$$\tilde{a} = ae^{i\omega t}, \quad (20)$$

где  $\tilde{a}$  есть решение уравнения (5). Предполагая, что  $\delta$  близка к единице (исключая области, близкие к центрам дефекта и мишени), легко получить, что

$$\omega = -b.$$

Это означает, что спираль вращается со скоростью  $\omega$ . Такое поведение спиралей было обнаружено в эксперименте [4], а также при численном исследовании уравнения SH с учетом среднего течения. Теперь рассмотрим случай  $b=0$ ,  $c \neq 0$ . В этом случае появится дополнительное слагаемое в фазовом уравнении

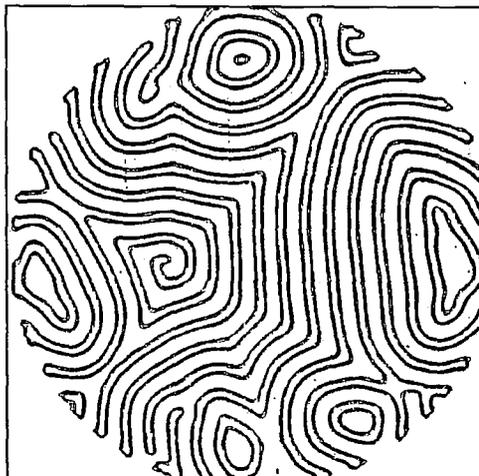
$$\varphi_t = 4(c\varphi_r^2 + \varphi_{rr} + (\varphi_r/r)) \quad (21)$$

и в уравнениях движения

$$m_R \dot{R} = -\pi(1 + \epsilon) \frac{1}{R}; \quad m_\psi R^2 \dot{\psi} = \frac{1}{2} \pi c S, \quad (22)$$

Рис. 8. Образование вращающихся мишеней в рамках модели (18),  $b=0, c=0.3, t=200$

где  $\varepsilon$  – малый параметр, пропорциональный  $cS$ . Из (22) видно, что дефекты движутся к центру и, кроме того, вращаются вокруг центра мишени. При увеличении  $c$  их угловая скорость возрастает, и при  $c \approx 0.3$  дефекты (как частицы, обладающие «массой») за счет «центробежных» сил начинают двигаться не к центру, а от него. В результате формируется структура, состоящая только из мишеней (рис. 8).



### Заключение

В результате аналитического и численного исследования динамики дефектов в структуре типа «мишени» нами показано, что для градиентной (и близкой к градиентной) модели дефекты движутся к центру мишени и формируют спираль с высоким топологическим зарядом. Такой механизм формирования многозарядных спиралей достаточно общий, поскольку для исследования выбрана модельная система без каких-либо дополнительных слагаемых. Предлагаемое обобщение модели SH позволяет объяснить вращение спиралей и образование устойчивых мишеней, также наблюдаемое в эксперименте.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 93-02-15424).*

### Библиографический список

1. Croquette V., Pocheau A. Wavenumber selection in Rayleigh – Benard convective structures. // Cellular structures in instabilities/ Eds. J.E. Westfreid and S.Zaleski (Lect. Notes in Physics 210) Berlin: Springer-Verlag, 1984. P. 104.
2. Cross M.C., Newell A.C. // Physica 10D. 1984. P. 299.
3. Bodenschatz E., de Bruyn J.R., Ahlers G., Carnell D.S. // Phys. Rev.Lett. 1991. Vol.67. P. 3078.
4. Bodenschatz E., Cannel D.S., Ecke R., Hu Yu-Chou, Lerman Kristina, Ahlers Guenter. Experiments on three systems with nonvariational aspects. Preprint. Dept. of Phys., Univ. of California, Santa Barbara, 1991.
5. Haken H. Advanced synergetics, instability hierarchies of selforganizing systems and devices. New York: Springer, 1983.
6. Gaponov-Grekhov A.V., Lomov A.S., Osipov G.V., Rabinovich M.I. Pattern formation and dynamics of two-dimensional structures in nonequilibrium dissipative media // Nonlinear waves / Eds. A.V.Gaponov-Grekhov, M.I.Rabinovich and J.Engelbrecht. Berlin: Springer-Verlag, 1989. P. 65.
7. Aranson I.S., Gorshkov K.A., Lomov A.S., Rabinovich M.I. // Physica 43D. 1990. P. 435.
8. Aranson I.S., Beilin K.E. // Physics Letters A. 1990. Vol. 148. P. 171.
9. Sigga E., Zippelius A. // Phys. Rev. A. 1981. Vol. 24. P. 1036.
10. Pesch W., Kramer L. // Physica 32D. 1988. P. 135.

11. *Croquette V.* // *Contemp. Phys.* 1989. Vol. 30. P.153.

12. *Gorman M., Hamill C.F., el-Hamdi M., Robbins K.A.* Rotating and modulated rotating states of sellular flames. Preprint. Dept. of Phys., Univ. of Houston, 1993.

НИИ прикладной математики  
и кибернетики  
Институт прикладной физики РАН

Поступила в редакцию 29.04.94  
после переработки 31.05.94

## DYNAMICS OF DEFECTS IN TARGET PATTERN AND ORIGIN OF SPIRALS WITH A HIGH TOPOLOGICAL CHARGE

*L.N. Korzinov, A.S. Nikulin, M.I. Rabinovich*

Recently, Ahlers and his group demonstrated remarkable experiments on the convection of gaseous  $\text{CO}_2$  in a large aspect ratio cylindrical cell. They discovered formation of stable multiarmed spirals (with the topological charge from 1 to 13). In this work it is shown that the multiarmed spiral is a result of the evolution of defects against the background of a cylindrical target. As a result of the interaction of the defects with the cylindrical structure and with each other the defects come to the target center and a stable multiarmed spiral is formed. The topological charge of this spiral depends on the initial number of defects of different signs. Analysis of the pattern evolution in the framework of the Swift – Hohenberg (SH) equation confirms this scenario of spiral formation. Taking into account small nonpotential terms in the frame of complex SH model it is possible to describe rotation of multiarmed spirals.



*Корзинов Лев Николаевич* закончил Нижегородский государственный университет в 1992 году. В настоящее время работает в Институте прикладной физики РАН младшим научным сотрудником. Область научных интересов – нелинейная динамика распределенных систем, пространственно-временной хаос. Имеет 7 публикаций в отечественных и зарубежных изданиях.



*Никулин Андрей Сергеевич* (1972 – 1994) – с 1989 по 1994 г. учился в Нижегородском государственном университете на факультете высшей школы общей и прикладной физики. В 1994 г. получил президентскую стипендию. С 1992 по 1994 г. работал в отделе нелинейной динамики в ИПФ РАН. Имел 2 публикации в зарубежных изданиях.