



ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ПРОСТОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ СХЕМЫ (лабораторная работа)

М.В.Баженов, М.И.Рабинович, С.В.Кияшко

Дается описание лабораторной работы по исследованию сложных хаотических режимов в схеме простого генератора шума. Работа включает в себя подробное введение в исследуемый вопрос, качественный анализ генератора шума и описание стандартной процедуры обработки эксперимента на ЭВМ. Предлагаемый материал предназначен прежде всего для студентов, изучающих хаотическую динамику, однако, последние разделы, посвященные анализу временных последовательностей на ЭВМ и описанию предназначенного для этих целей комплекса «Chaos», могут быть интересны специалистам в указанной области.

1. Введение. Рождение случайного в неслучайных системах

Из обыденной жизни и из традиционного обучения мы вынесли очевидное представление о том, что сложное, нерегулярное, запутанное поведение возможно только в очень сложных системах. Примером может служить неупорядоченное движение огромного множества молекул в баллоне с газом или поведение толпы разъяренных болельщиков при внезапной отмене футбольного матча. Именно в сложных системах мы обычно не умеем находить однозначной связи между причиной и следствием, то есть не в состоянии предсказать их детальное поведение и рассматриваем его как случайное. Правда, всегда оставалась надежда, что в принципе такая случайность и непредсказуемость могут быть устранены, если мы будем располагать более полным знанием. Долгое время считали, что если уточнить детали взаимодействия всех элементов сложной системы, собрать более подробную информацию об их начальных состояниях, то можно предсказать ее поведение в сколь угодно отдаленном будущем, и «случайности будет все меньше». Это не что иное, как знаменитый «лапласовский детерминизм» – одна из самых старых догм естествознания.

В последние десятилетия математиками и физиками было сделано замечательное открытие. Оказалось, что очень простые системы – системы, развивающиеся или живущие по очень простым правилам и имеющие малое число составных элементов, то есть степеней свободы, – могут порождать случайное поведение. Эта случайность есть свойство самой системы, а не навязано ей окружающей средой или неучтенными силами. От нее нельзя избавиться, изучая системы более детально. Такую случайность (порождаемую простой регулярной системой) назвали динамическим хаосом. Подчеркнем сразу, что основная трудность, которую нам предстоит преодолеть, знакомясь с явлением динамического хаоса, – психологическая. Мы привыкли, что простая система

(качели, шарик на пружине и т.п.) ведет себя очень просто. Зная правила поведения простой системы и начальные условия, мы можем предсказать, как поведет она себя в сколь угодно отдаленное время. Например, воспользовавшись законами Ньютона, мы можем перечислить все будущие затмения Солнца не только на ближайшие несколько сотен, но и несколько тысяч лет! Чтобы это сделать, понадобится относительно немного времени, т.е. это действительно прогнозирование, или «предвычисление». Откуда же в подобной простой системе, живущей по простым правилам, может взяться непредсказуемость, нерегулярность, случайность? Чтобы разобраться, начнем с совсем простого примера.

Пожалуй, одни из таких самых простых систем, с которыми мы знакомимся еще в школе, это числовые последовательности: арифметическая $x_{n+1} = x_n + a$ и геометрическая $x_{n+1} = bx_n$ (здесь под x можно понимать, например, численность некоторого биологического вида в n (или $n+1$) году, a и b – постоянные, характеризующие скорость увеличения этого вида). Последовательности мы тоже будем называть системами. Поведение этих систем действительно очень просто. Об этом можно судить хотя бы потому, что их состояния полностью предсказуемы в сколь угодно отдаленный момент времени, то есть при сколь угодно большом $n - x_{n+1} = x_1 + na$, либо $x_{n+1} = b^n x_1$. Таким образом, чтобы узнать состояние этих систем при $n \rightarrow \infty$, не нужно следить за промежуточными этапами их «жизни», достаточно вычислить x_{n+1} . Всегда ли так?

Рассмотрим почти столь же простую последовательность, задаваемую правилом $x_{n+1} = \{2x_n\}$, где знак $\{...\}$ означает дробную часть числа (целая часть отбрасывается). Очевидно, что все x_n – это точки на отрезке числовой оси от 0 до 1. Возьмем в качестве x_1 , к примеру, число $1/5$. Тогда $x_2 = 2/5$, $x_3 = 4/5$, $x_4 = 3/5$, $x_5 = 1/5 = x_1$. Действительно, все просто: наблюдаем чисто регулярное движение и при $x_1 = 1/5$ можем предсказать состояние нашей системы (последовательности) в сколь угодно отдаленном времени (при больших n). Теперь в качестве начального рассмотрим число π , точнее, его дробную часть: $x_1 = (\pi - 3)$. Предоставим читателю с помощью карманного калькулятора самому убедиться в том, что цепочка x_2, x_3, \dots, x_n никогда не замкнется, а последовательность чисел будет похожа на случайную. Прогнозировать, или предвычислить состояние системы, даже на несколько шагов вперед мы уже не сможем. Чтобы узнать x_{n+1} , мы должны досчитать («дойти» вместе с системой) до $(n+1)$ -го шага (года), поэтому время вычисления оказывается равным времени предсказания. Это и есть непредсказуемость (хаотичность), характерная для настоящей случайной

последовательности. Так будет с любым x_1 , если это иррациональное число. В интервале $0 \div 1$ таких чисел огромное множество.

Движение нашей простой системы можно изобразить графически (рис. 1). На осях отложены соответственно значения x_{n+1} и x_n . Отрезки прямых $x_{n+1} = 2x_n$ и $x_{n+1} = -1 + 2x_n$, лежащие внутри единичного квадрата, есть графические выражения простой операции – начальный отрезок растягивается вдвое, и остается только дробная часть. Биссектриса на рисунке нужна для удобства – отразив от нее траекторию, можно конечный результат предыдущего шага вычисления превратить в

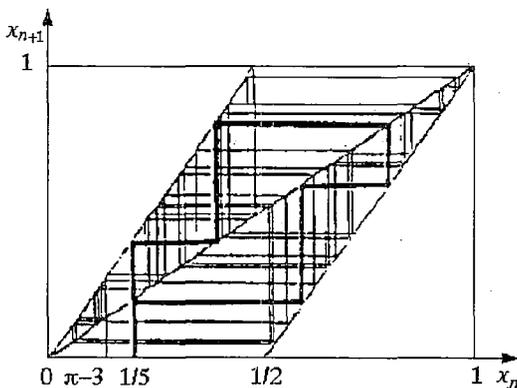


Рис. 1. Построенные на персональной ЭВМ периодическая (жирная линия) и случайная (тонкая линия) траектории в виде последовательности шагов (ступенек) в простой системе $x_{n+1} = \{2x_n\}$

начальное значение следующего шага. Периодическим движениям системы отвечают замкнутые траектории (жирные), никогда не замыкающиеся траектории (тонкие) есть образ сложного хаотического движения.

Так наша простая система, живущая по вполне определенным правилам (детерминированная система), действительно рождает хаос.

Точки x_n, x_{n+1}, \dots случайным образом блуждают на отрезке $0 \div 1$. Однако в этом хаосе есть свой порядок. Чтобы представить себе это более наглядно, перейдем от последовательности действительных чисел к последовательности комплексных ($x = \text{Re}x + i\text{Im}x$), порождаемых, к примеру, системой $x_{n+1} = x_n^3 + c$ (здесь $\text{Re}x$ — действительная часть комплексного числа x , Im — его мнимая часть, а c — постоянное комплексное число).

В этом случае множество точек будет лежать уже не на отрезке, а на плоскости $\text{Re}x_n, \text{Im}x_n$. При $n \sim 10^6$ оно выглядит, как на рис. 2. Каждая из последовательностей точек $\text{Re}x_1, \text{Re}x_2, \dots, \text{Re}x_n, \dots$ и $\text{Im}x_1, \text{Im}x_2, \dots, \text{Im}x_n, \dots$ — случайна. Но само множество трудно назвать совершенно случайным — оно мало напоминает, например, случайный рисунок из песчинок от брошенной наугад горсти песка. Удивительная красота этого рисунка как раз и есть следствие того, что случайная последовательность в данном случае порождена детерминированной системой — в ней есть порядок, т.е. оказывается, что динамический хаос «организован». Сейчас мы должны ответить на естественный вопрос: поскольку среди множества последовательностей, большинство из которых случайны, есть и периодические, может только они и реализуются в действительности?

Нет. Они неустойчивы — при сколь угодно малой неточности задания x_1 мы будем иметь уже совсем другую последовательность (см. рис.1). Здесь проявляется еще одна принципиальная сторона динамического хаоса — очень сильная чувствительность к изменению начальных условий. Таким образом, несмотря на то, что периодических последовательностей много, даже бесконечно много (но непериодических все равно много больше), наблюдать их практически невозможно. Однако и непериодические траектории неустойчивы, почему же они наблюдаются (реализуются)? Дело в том, что их почти непрерывное множество, и они в некотором смысле неразличимы. Действительно, пусть из-за малого возмущения (и неточности задания x) мы получили «не ту» последовательность, но и та, которая получилась, тоже принадлежит тому же множеству неустойчивых траекторий. То есть какая-то из них всегда наблюдается. Таким образом, мы приходим к замечательному выводу: хотя каждая индивидуальная траектория нашего множества, которое мы будем называть стохастическим, из-за неустойчивости ненаблюдаема или нереализуема, само это множество устойчиво и какая-нибудь из его траекторий наблюдается!

Почему же случайно поведение неслучайных систем не видели раньше? Может быть, то, о чем мы говорили, относится только к «искусственным» примерам, а в жизни совсем не так? И реальные системы «с хаосом» описываются другими уравнениями? Например, уравнения Ньютона, может быть, гарантируют только регулярное поведение механических систем?

Рассмотрим очень простой пример — движение качелей. Конечно, оно

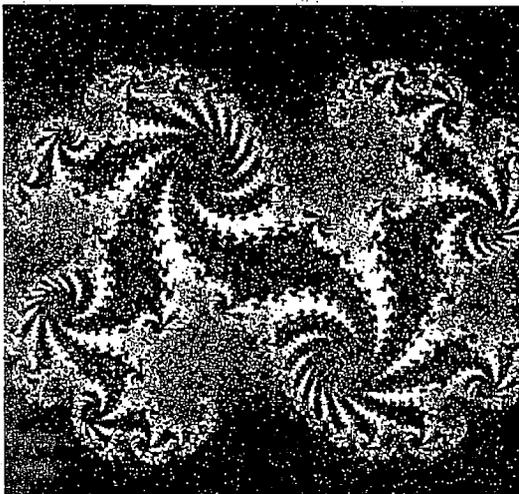


Рис. 2. Фрактальное множество, порожденное простой системой $x_{n+1} = x_n^3 + c$, но уже не действительных, а комплексных чисел ($c = 0.32 + i0.43$)

удовлетворяет обычным уравнениям механики, с которыми мы познакомились еще в школе. Но похоже, пример неудачный: как мы знаем, движение качелей периодическое, а если быть более точными, то их период определяется желанием катающегося, который, вставая и приседая, меняет эффективную длину качелей и тем самым их раскачивает или (вставая не в фазе) тормозит. Лишим катающегося свободы выбора. Пусть это будет механический человек, который приседает и встает строго периодически! Что же будет происходить? Качели начнут колебаться совершенно нерегулярно, без всяких случайных воздействий! Приседая строго периодически, «механический человек» будет не в фазе «удлинять» или «укорачивать» качели и, следовательно, добавлять или забирать у качелей (маятника) энергию. Наблюдаемая нами случайность определяется тем, что качели при разных углах отклонения двигаются с существенно разной скоростью, например, вблизи положения «вверх ногами» они, вообще говоря, останавливаются или сильно замедляются. Итак, и реальная механическая система, подчиняющаяся ньютоновским законам, ведет себя хаотически, т.е. генерирует случайность! По поводу же вопроса «Почему не видели это раньше?», пожалуй, правильно будет сказать: «Видели, но не осознавали». Традиционные представления не позволяли всерьез принимать отдельные (не укладывающиеся в рамки существовавших теорий) эксперименты по наблюдению хаоса в простых системах. Так или иначе, они объяснялись спасительным «не поддающимся учету» влиянием шума или собственными флуктуациями.

Перейдем теперь к более строгому описанию динамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение во времени (отображения можно рассматривать как динамическую систему с дискретным временем). Как уже отмечалось, фазовое пространство таких систем содержит стохастическое множество – замкнутое притягивающее множество траекторий, на котором все принадлежащие ему траектории неустойчивы. Такое множество называют странным аттрактором. Снова вернемся к отображению

$$x_{n+1} = \{2x_n\} \quad (1)$$

и рассмотрим на его примере некоторые характерные свойства странных аттракторов.

Если координата x_1 – число рациональное, то, начиная с некоторого символа (например, n -го), последовательность нулей и единиц будет повторяться: это n -кратная периодическая точка отображения. Нетрудно проверить, что множество периодических точек у нашего отображения является плотным и бесконечным, и что точки этого множества все неустойчивы. Здесь открывается свойство, типичное для всяких странных аттракторов: внутри ограниченной области, откуда траектории не выходят, имеется счетное множество неустойчивых циклов, «перебрасывающих изображающую точку от одного к другому».

Убедиться, что растягивающее отображение отрезка в себя имеет счетное множество неустойчивых, периодических точек, проще всего, построив последовательные итерации этого отображения: при двукратном применении этого отображения неподвижных точек будет уже четыре, при трехкратном – 2^3 и т.д. По этому поводу имеются математические теоремы, из которых, в частности, следует, что если непрерывное (в том числе и не гладкое) растягивающее отображение отрезка в себя имеет цикл периода три, то оно имеет цикл с любым периодом [1]. Известно [2], что задаваемые последовательности нулей и единиц будут периодическими лишь для множества рациональных чисел, а для почти всех иррациональных, т.е. большинства точек отрезка $(0,1)$, эта последовательность будет случайной в том же смысле, что и последовательность выпадения «орла» или «решки» в классическом вероятностном эксперименте с подбрасыванием монеты.

Таким образом, движения динамической системы, описываемые отображением типа приведенного на рис. 1, действительно сводятся к случайной последовательности, то есть являются стохастическими. Стохастические характеристики такого отображения находятся совсем просто. Непосредственно из

формулы отображения $x_{n+1} = F(x_n)$ следует, что после однократного отображения начальная плотность вероятности, заданная на отрезке $\rho_j(x)$, преобразуется в плотность

$$\rho_{j+1}(F(x)) = \sum P_j(x) |dF(x)/dx|^{-1}, \tag{2}$$

где суммирование проводится по всем ветвям функции $F(x)$. Смысл этой связи таков: начальное распределение становится в dF/dx раз менее плотным (отображение растягивающее), но в одни и те же интервалы dx отрезка попадают после преобразования точки из нескольких участков исходного отрезка (отсутствие взаимной однозначности). Отображения этого типа имеют инвариантное распределение вероятности $P(x)$, которое, очевидно, может быть найдено из условия $\rho_{j+1} = \rho_j = P$, то есть $P(x)$ должно удовлетворять уравнению

$$P(F(x)) = \sum p(x) |dF(x)/dx|^{-1}. \tag{3}$$

Для кусочно-линейных отображений вида $x_{n+1} = \{2x_n\}$, как можно убедиться прямой подстановкой, $P(x) = \text{const}$. Полагая (из условия нормировки полной вероятности на 1) $P=1$, находим для отображения среднее $\langle x \rangle = \int_0^1 x dx = 1/2$, дисперсию $D = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = 1/12$ и корреляционную функцию [3]

$$K(j) = D^{-1} \langle [(x_i - \langle x \rangle)(x_{i+j} - \langle x \rangle)] \rangle = 12 \int_0^1 (x - 1/2)(\{2^j\} - 1/2) dx = \exp[-j \ln 2].$$

Видно, что в нашем случае корреляции со временем спадают экспоненциально. Показатель экспоненты, то есть показатель Ляпунова, характеризующий скорость спадания корреляций (одновременно и скорость разбегания траекторий), – это энтропия Колмогорова – Синяя. В данном случае энтропия $h = \ln 2$.

2. Генератор шума. Качественное описание и эксперимент

Исследование стохастичности конкретных динамических систем методами теории колебаний предполагает: выяснение структуры стохастического множества, понимание механизмов возникновения хаоса, нахождение критериев его существования и, наконец, приближенное (на основании выделения тех или иных малых параметров) описание поведения системы в стохастической области. Реализация этой программы возможна лишь для сравнительно простых систем с трехмерным фазовым пространством, допускающих описание с помощью двумерных, а приближенно – и одномерных отображений Пуанкаре. Рассмотрим в качестве примера работу простого радиотехнического генератора стохастических колебаний.

Что такое периодические автоколебания, мы хорошо знаем. Стохастические автоколебания – это неупорядоченные, случайные движения неконсервативных динамических систем, совершающиеся под действием неслучайных источников энергии. Математическим образом стохастических автоколебаний в фазовом пространстве является странный аттрактор, о котором мы говорили в начале. Добавим здесь, что термин «странный», придуманный математиками Рюэлем и Такенсом в связи со сложной – фрактальной – структурой аттрактора [4], сейчас ассоциируется просто со сложным неупорядоченным поведением неустойчивых траекторий на аттракторе.

Схема генератора шума, о котором мы сейчас будем вести речь, изображена на рис. 3. От привычного нам генератора Ван-дер-Поля с контуром в цепи сетки она отличается лишь туннельным диодом, включенным последовательно с индуктивностью. Работа схемы описывается следующими уравнениями [5]:

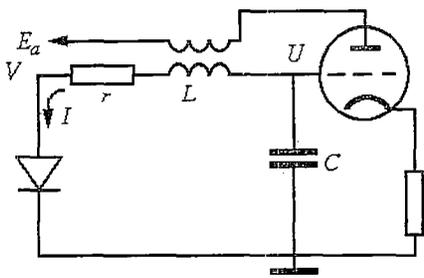


Рис. 3. Схема простого генератора шума. Параметры контура: $C = 1.5$ мкФ, $L = 5.7$ мГн; безразмерные параметры схемы: $g = 2.4$, $\epsilon \approx 4.8 \times 10^{-5}$; минимальные потери определяются сопротивлением $r_0 \approx 8.2$ Ом

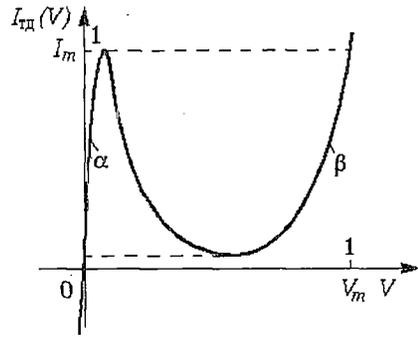


Рис. 4. Вольт-амперная характеристика туннельного диода, используемого в схеме простого генератора шума

$$\begin{aligned} LCdI/dt &= (MS - rC)I + C(U - V), \\ CdU/dt &= -I, \quad C_1 dV/dt = I - I_{тд}(V), \end{aligned} \quad (4)$$

здесь C_1 – емкость туннельного диода, M – взаимная индуктивность, S – крутизна характеристики лампы. При рассмотрении работы схемы характеристику лампы будем считать линейной. Это оправдано тем, что в интересующем нас режиме колебания ограничиваются нелинейной характеристикой туннельного диода $I_{тд}(V)$ (рис. 4) на таком уровне, когда нелинейность лампы не сказывается.

Качественно работу генератора можно описать следующим образом. Пока ток I и напряжение V малы, туннельный диод не оказывает существенного влияния на колебания в контуре, и они нарастают. При этом через туннельный диод течет ток I , а напряжение на нем определяется участком α характеристики $I_{тд}(V)$. Когда же ток I достигает значения I_m , происходит почти мгновенное переключение туннельного диода (быстрота переключения связана с малостью емкости C_1) – скачком устанавливается напряжение V_m . Затем ток через туннельный диод уменьшается и происходит его обратное переключение – с участка β на α . В результате двух переключений туннельный диод почти полностью поглощает поступившую в контур энергию, и колебания начинают снова нарастать.

Таким образом, генерируемый сигнал $U(t)$ представляет собой последовательность пиков нарастающих колебаний; конец каждого пика сопровождается импульсом напряжения $V(t)$. Из приведенного описания, конечно, не ясно, будет ли установившийся режим периодическим или стохастическим. Разобраться в этом можно, исследуя уравнения; это мы сделаем ниже, а сейчас приведем результаты эксперимента [5].

Схема рис. 3 в данной работе реализована на половине триода 6Н1П и на четырех параллельно соединенных туннельных диодах 3И306Г. Инкремент нарастания колебаний в контуре удобно было изменять, варьируя сопротивление r . Минимально достижимые потери в контуре определялись сопротивлением самих элементов схемы $r_0 \approx 8.2$ Ом. При $R = r - r_0 \approx 14.5$ Ом в контуре возбуждались чисто периодические колебания, которые ограничивались нелинейностью лампы на столь низком уровне, что диоды не переключались ($I < I_m$). При $R \approx 13.5$ Ом амплитуда колебаний достигала порогового значения, и сигнал $U(t)$ представлял собой длинные пачки колебаний, изредка прерываемые переключениями диодов. И только при $R < 11$ Ом нелинейность триода не сказывалась – генерировался сигнал в виде пиков, внутри каждого из них колебания экспоненциально нарастали, а переход от одного пика к другому сопровождался импульсом напряжения на туннельном диоде $V(t)$. Ни при одном значении $R < 11$ Ом не удалось обнаружить

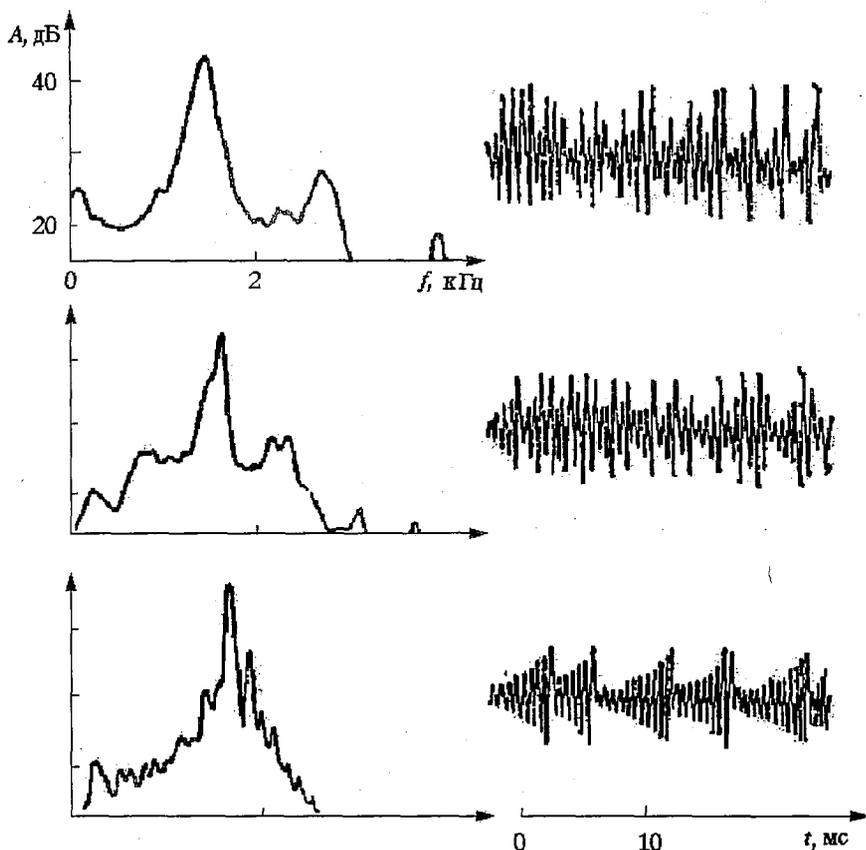


Рис. 5. Спектры и осциллограммы выходного сигнала автогенератора шума при различных значениях $R < 11$ Ом (верхнему рисунку соответствует наименьшее R)

периодический режим – генерировался случайный сигнал со сплошным спектром. Из представленных на рис. 5 спектров и осциллограмм видно, как с уменьшением R растет инкремент колебаний h и уменьшается средняя длительность цуга – при этом в спектре сглаживаются пики на частотах повторения цугов. Большая часть энергии содержится в главном максимуме, соответствующем частоте колебаний контура.

При исследовании уравнений (4) перейдем к безразмерным переменным $x = III_m$, $z = V/V_m$, $y = U\sqrt{C}/(I_m\sqrt{L})$, $\tau = r\sqrt{LC}$. В результате получим

$$\dot{x} = 2hx + y - gz, \quad \dot{y} = -x, \quad \mu\dot{z} = x - f(z), \quad (5)$$

$\mu \ll 1$. Здесь $h = 0.5(MC - rC)\sqrt{LC}$ – инкремент нарастания колебаний в контуре в отсутствие диода, $g = V_m\sqrt{C}/(I_m\sqrt{L})$ – параметр, определяющий степень влияния туннельного диода на процессы в контуре; $\mu = gC_1/C$ – малый параметр, пропорциональный емкости туннельного диода, $f(z) = I_{тд}(V_m z)/I_m$ – нормированная характеристика диода (см. рис. 4).

Система (5) имеет малый параметр μ при производной, поэтому все движения в фазовом пространстве (рис. 6) можно разделить на быстрые – переключения диода (прямые $x = \text{const}$,

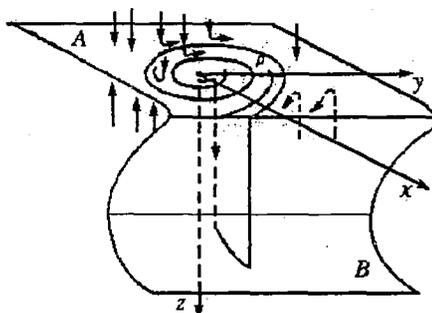


Рис. 6. Фазовое пространство системы, описываемой уравнениями (5)

$y = \text{const}$) – и медленные, при которых напряжение на диоде следит за током (соответствующие траектории лежат на поверхностях A ($x=0$) и B ($x=f(z)$, $f'(z) > 0$), соответствующих участкам α и β характеристики диода).

Система имеет одно неустойчивое (при $2h > g/f'(0)$) состояние равновесия $x=y=z=0$ типа «седло». Траектории, лежащие на поверхности A , раскручиваются вокруг неустойчивого фокуса и в конце концов достигают края поверхности B . Здесь происходит срыв изображающей точки по линии быстрых движений на поверхность B . Пройдя по B , изображающая точка срывается обратно на поверхность A и попадает в окрестность состояния равновесия – начинается новый цикл нарастающих колебаний. Построенная картина движения и соответствует реализациям, представленным на осциллограммах рис. 5.

3. Стохастический аттрактор в модели простого генератора шума

Рассматриваемый нами генератор шума при $\mu = 0$, как показано ниже, также описывается невязимно однозначным отображением отрезка в себя. Оно сложнее, чем, например, отображение рис. 1. Поэтому аналитически найти инвариантное распределение вероятностей, решая уравнения (5), для такого генератора не удастся. Однако, провести качественное исследование с помощью отображения отрезка в себя совсем несложно.

Итак, построим точечное отображение, соответствующее уравнениям (5) при $\mu \rightarrow 0$. Рассмотрим преобразование точек полуплоскости $x=0$, $y>0$ в себя (см.рис. 6). При $\mu \rightarrow 0$ эта полуплоскость пересекается только траекториями, лежащими на поверхности медленных движений, поэтому отображение получается одномерным – это отображение полупрямой $y>0$, $x=z=0$ в себя: $y_{j+1} = F(y_j)$. В случае произвольной нелинейности «переключательного» элемента (например, туннельного диода) это отображение аналитически описать не удастся, поэтому воспользуемся кусочно–линейной аппроксимацией

$$f(z) = \begin{cases} \alpha^{-1}z, & z < \alpha, \\ (1-\alpha-z)/(1-2\alpha), & \alpha < z < (1-\alpha), \\ (z-1+\alpha)/\alpha, & (1-\alpha) < z. \end{cases} \quad (6)$$

В этом приближении A и B – полуплоскости, уравнения медленных движений на которых имеют вид (ср. с (5))

$$\dot{x} = 2vx + y, \quad \dot{y} = -x \text{ на плоскости } A, \quad (7a)$$

$$\dot{x} = 2vx + y - b, \quad \dot{y} = -x \text{ на плоскости } B. \quad (7б)$$

Здесь $v = h - \alpha g/2$, $b = g/(1-\alpha)$. Эти уравнения линейны, поэтому с их помощью легко получить явный вид отображения, сшивая участки траектории, лежащие на плоскостях A и B .

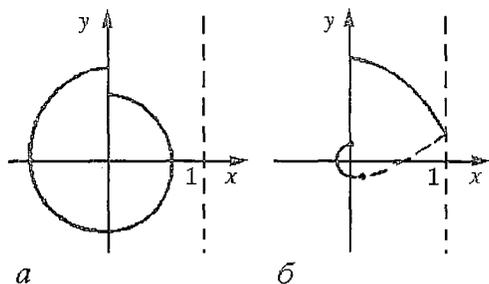


Рис. 7. Построение отображения Пуанкаре для системы уравнений (7): а – траектория располагается на одной поверхности медленных движений; б – траектория срывается на вторую поверхность медленных движений и возвращается обратно

Отображение будет состоять из двух частей: функция $F_1(y_j)$ описывает ту часть отображения, которая дается траекториями, не заходящими в полуплоскость B (рис. 7, а), а функция $F_2(y_j)$ – часть, задаваемую траекториями, располагающимися на обеих плоскостях (рис. 7, б). Из уравнений (7а) сразу получаем

$$y_{j+1} = F_1(y_j) = \exp(2\pi v)y_j \equiv ky_j. \quad (8)$$

Функция $F_2(y_j)$ так просто из уравнений

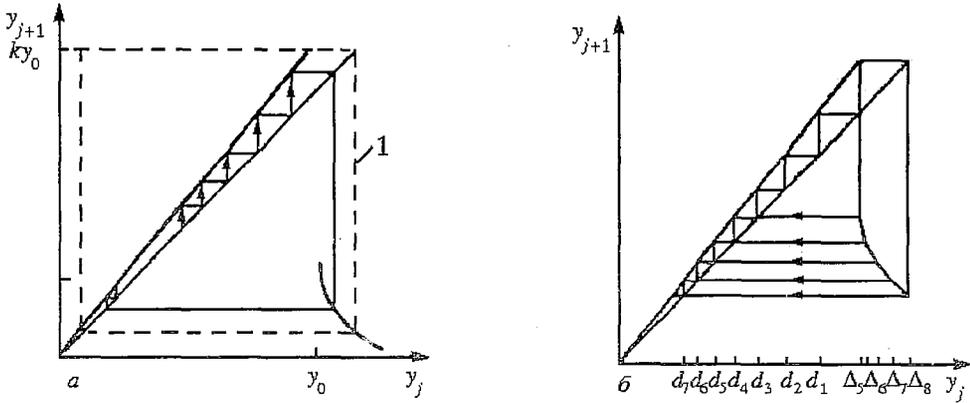


Рис. 8. Отображение Пуанкаре для системы, описываемой уравнениями (5) при $\mu=0$; 1 – граница аттрактора (а); кусочно-линейная аппроксимация отображения (диаграмма Ламерея) (б)

(7б) не выражается. Поэтому мы аппроксимируем ее формулой, качественно правильно описывающей поведение траектории в режиме стохастических колебаний

$$y_{j+1} = F_2(y_j) = y_0 - (y_j - y_0)^{1/2}. \quad (9)$$

Итак, при значениях $y_j < y_0$ используется ветвь (8) отображения; при $y_j > y_0$ – ветвь (9). Степень $1/2$ в (9) отражает то обстоятельство, что траектории подходят к линии срыва $x=1$ почти по касательной. Константа y_0 описывает сдвиг траекторий при движении на плоскости B . Объединяя (8) и (9), получим отображение $y_{j+1} = F(y_j)$, представленное на рис. 8. Это отображение имеет притягивающую область – аттрактор: $y_0 - (ky_0 - y_0)^{1/2} < y < ky_0$. Если $0 < k - 1 < (4y_0)^{-1}$, то отображение внутри аттрактора растягивающее, то есть $[dy_{j+1}/dy_j] > 1$.

Таким образом, в той области параметров, в которой система (5) при $\mu \rightarrow 0$ описывается отображением (8), (9), в ее фазовом пространстве имеется стохастический аттрактор, на котором существует инвариантное распределение вероятностей, а движение обладает свойством перемешивания.

Для доказательства стохастичности необходимо убедиться, что все движения внутри аттрактора неустойчивы. Это заведомо выполняется, если отображение растягивающее, то есть $|dy_{j+1}/dy_j| > 1$. Однако это условие является несколько завышенным: достаточно, чтобы движения были неустойчивы не на каждой итерации, а в среднем, то есть за много итераций.

В заключение кратко остановимся на сценарии перехода к хаосу в описанной выше модели простого генератора шума. Как показывают численные и натурные эксперименты, указанный переход, как правило, реализуется путем последовательных бифуркаций удвоения периода. В этом случае, в начальном состоянии система совершает основное периодическое движение. Затем, по мере изменения одного из параметров эксперимента – назовем его λ – происходит бифуркация или изменение движения на периодическое с периодом, в два раза превышающим период исходных колебаний. С дальнейшим изменением λ в системе возникает последовательность бифуркаций, при каждой из которых период удваивается. Замечательное свойство этого процесса в том, что критические значения λ , при которых происходят последовательные удвоения периода, подчиняются при $n \rightarrow \infty$ следующему автомодельному соотношению:

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \rightarrow \delta = 4.6692016,$$

здесь δ – число Фейгенбаума. На практике отношение сходится к δ уже при третьей или четвертой бифуркации.

Процесс удвоения периода имеет точку сгущения вблизи некоторого критического значения параметра, после которого движение становится

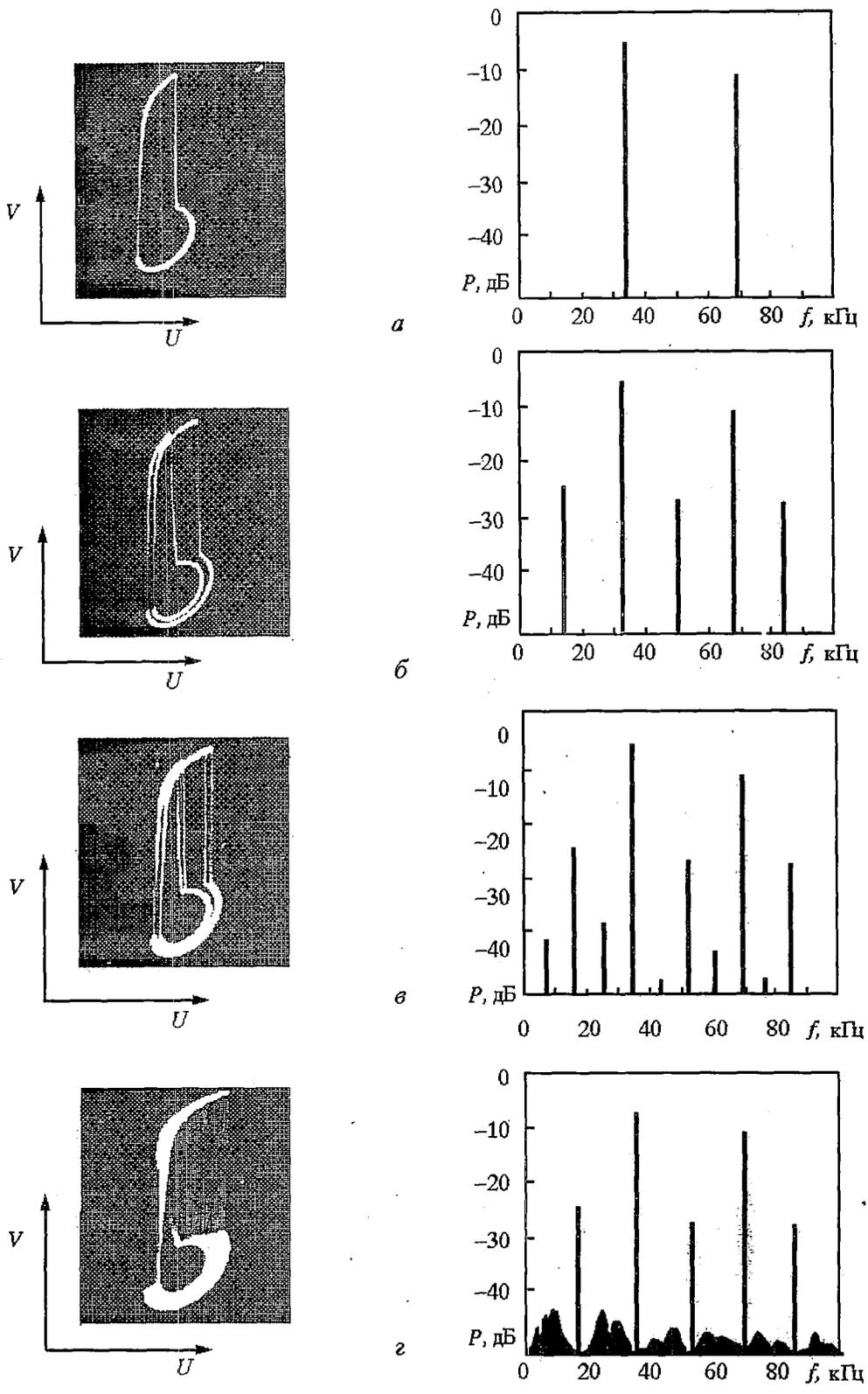
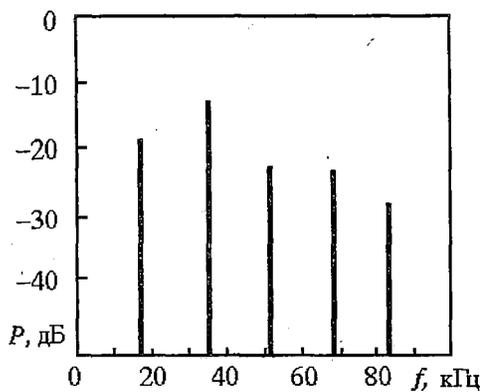
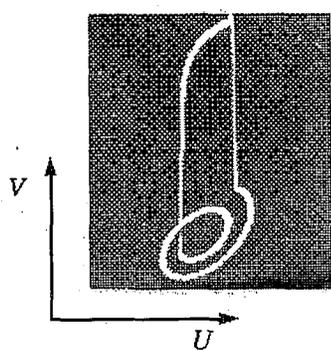
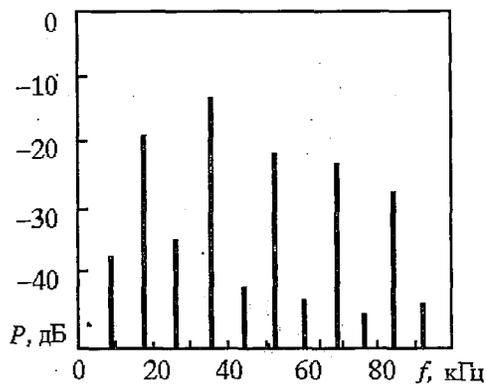
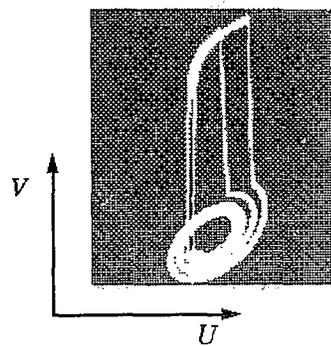


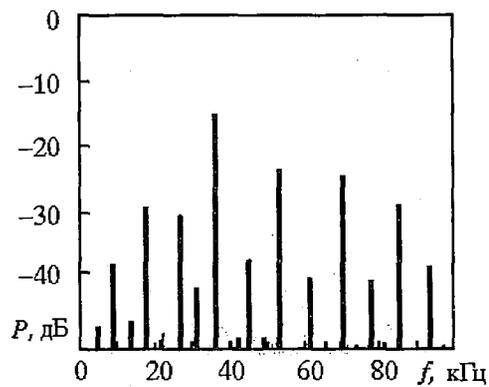
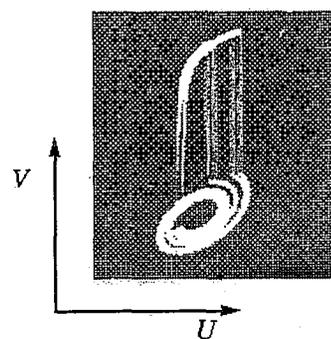
Рис. 9. Эволюция фазовых портретов и спектров мощности (натурный эксперимент[9]):
 а - (0:1), б - (0:2), в - (0:4), г - (хаос)



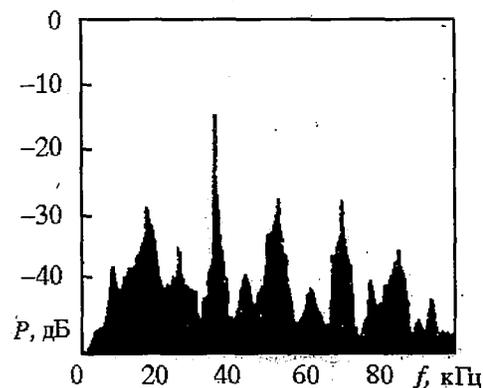
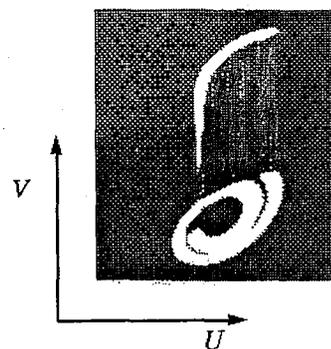
a



б



в



г

Рис. 10. Эволюция фазовых портретов и спектров мощности (натурный эксперимент[9]):
 а - (1:1), б - (2:2), в - (4:4), г - (хаос)

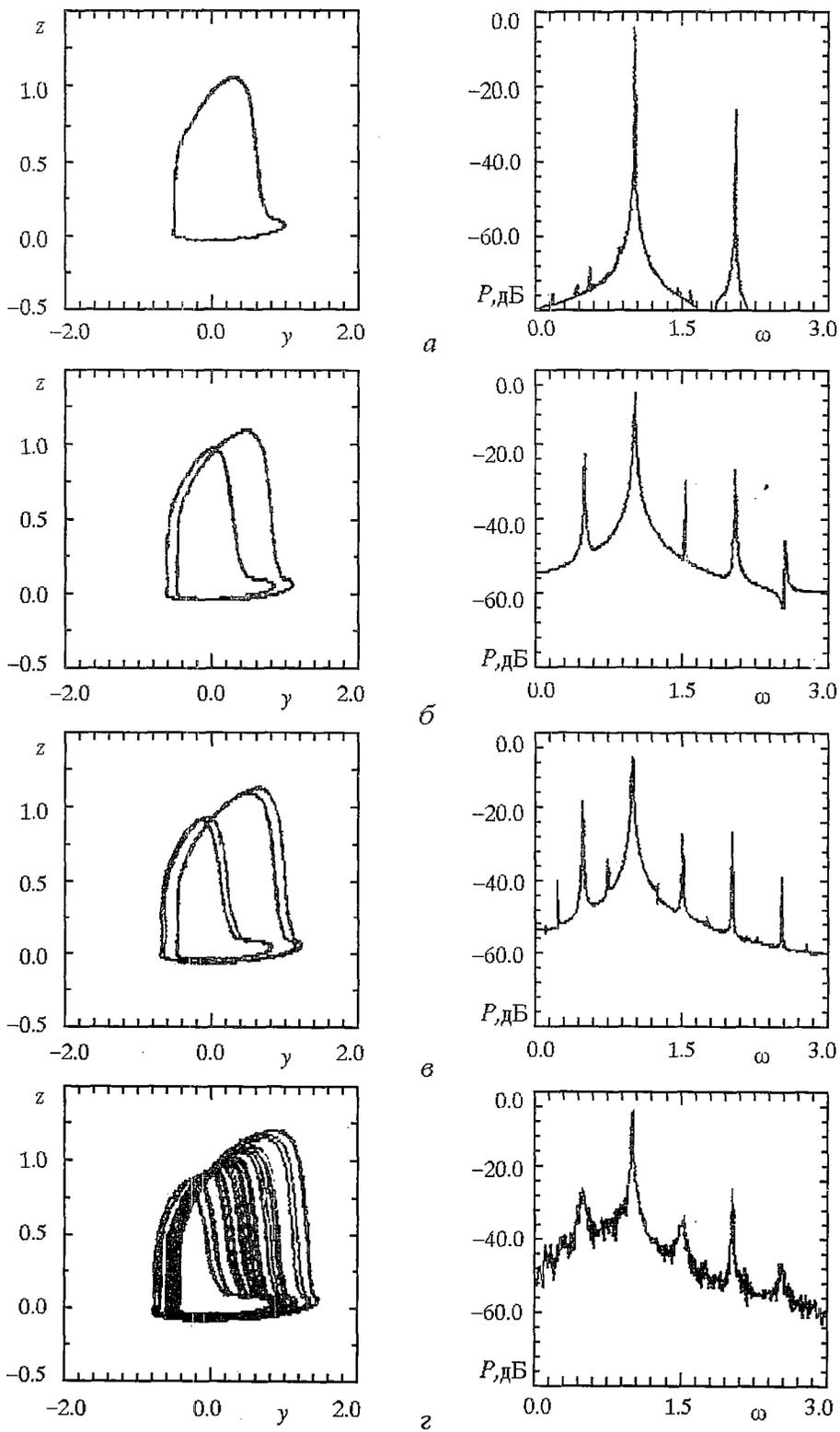


Рис. 11. Фазовые портреты и спектры мощности для системы аналогичной (5), (6) (численный эксперимент [9]): а - $\delta = 0.000$ (0:1), б - $\delta = -0.01$ (0:2), в - $\delta = -0.015$ (0:4), г - $\delta = -0.0185$ (хаос)

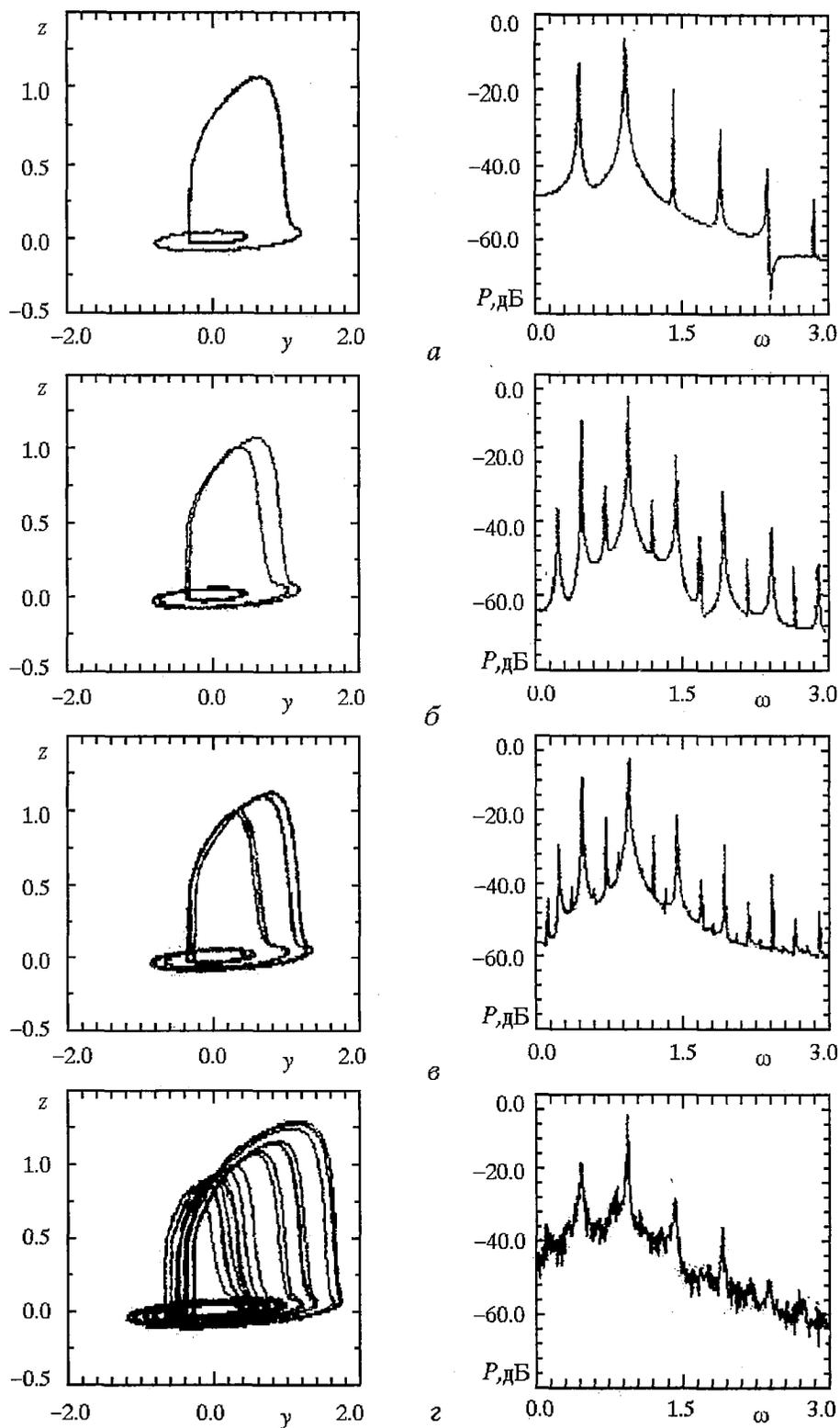


Рис. 12. Фазовые портреты и спектры мощности для системы аналогичной (5), (6) (численный эксперимент [9]): а - $\delta = -0.060$ (1:1), б - $\delta = -0.067$ (2:2), в - $\delta = -0.07$ (4:4), г - $\delta = -0.076$ (хаос)

хаотическим. Более подробно этот и другие возможные сценарии перехода к хаосу описаны в [6, 7, 8].

На рис. 9,10 представлены результаты натурального эксперимента с генератором шума [9], собранным по схеме близкой к приведенной на рис. 3. Отчетливо прослеживается последовательность бифуркаций удвоения периода и, как итог, переход к хаосу. Результаты, полученные в численном эксперименте с системой аналогичной (5), (6), приведены на рис. 11, 12 [9].

4. Обработка результатов эксперимента на ЭВМ

Аналоговый сигнал, полученный со стохастического генератора, представляет собой непрерывную зависимость какой-либо из физических переменных (например, напряжения) от времени $x(t)$. Для обработки этого сигнала на ЭВМ он должен быть представлен в виде последовательности значений измеряемой физической величины в дискретные моменты времени и введен в ЭВМ. Этой цели служит аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Непрерывный сигнал, поступающий на его вход, дискретизируется с некоторым шагом дискретизации Δt и запоминается в памяти ЭВМ в виде дискретной последовательности чисел $\{x_j\}$, $j = 1, \dots, n$, где x_j – соответствующим образом нормированная величина сигнала в момент времени $t_j = j\Delta t$. При этом величина $t_{\max} = n\Delta t$ будет представлять собой общую продолжительность сигнала (длительность эксперимента). Выбор величин n и Δt определяется практическими соображениями такими, как приемлемая продолжительность эксперимента, характерная скорость изменения физических величин в эксперименте, емкость памяти, в которой хранятся результаты эксперимента, быстродействие ЭВМ и пропускная способность устройств, обрабатывающих измерения (АЦП).

Дальнейшая обработка дискретной временной последовательности на ЭВМ включает три основных этапа: 1) вычисление спектра мощности; 2) построение функции взаимной информации и определение характерного временного масштаба; 3) вычисление корреляционной размерности и K_2 –энтропии.

К сожалению, ограниченный объем работы не позволяет нам достаточно подробно рассмотреть указанную задачу. Поэтому ниже мы ограничимся сжатым изложением основных результатов, а заинтересованного читателя отошлем к работам [7, 8].

4.1. Спектр мощности. Рассмотрим дискретную временную последовательность $\{x_j\}$, $j = 1, \dots, n$. Определим преобразование Фурье дискретного временного ряда $\{x_j\}$ как операцию, порождающую соответствующий ему дискретный ряд \bar{x}_k такой, что

$$\bar{x}_k = 1/\sqrt{n} \sum_{j=1}^n x_j \exp(-i \frac{2\pi jk}{n}), \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

По определению, спектром мощности временной последовательности $\{x_j\}$ называется зависимость величины $|\bar{x}_k|^2$ от частоты $f = k\Delta t$. Здесь $\bar{x}_k = \bar{x}(k\Delta t)$ и $\Delta t = 1/n\Delta t$. Следовательно, разрешение по частоте тем лучше, чем больше общая длина временной последовательности $n\Delta t$. Наибольшая частота спектра равна $f_n = 1/\Delta t$. Чтобы расширить исследуемый диапазон частот, надо уменьшить Δt . В силу соотношения $|\bar{x}_k|^2 = |\bar{x}_{n-k}|^2$ спектр всегда симметричен относительно точки $f = (1/2)f_n$. Таким образом, полезный диапазон частот простирается только от 0 до $1/(2\Delta t)$.

Вид спектра мощности, как нетрудно понять, зависит от того, как именно сигнал $x(t)$ изменяется со временем. Действительно, пусть $x(t)$ – синусоидальный сигнал с периодом T и $t_{\max} = pT$. Тогда компоненты Фурье преобразования сосредоточены на частотах $f_k = k/pT$ ($\Delta f = 1/pT$) и, как легко убедиться, спектр

мощности содержит только одну ненулевую компоненту на частоте $f_p = 1/T$. В общем случае, если сигнал периодический, но несинусоидальный, то его спектр содержит компоненты на всех частотах m/pT , где $m=1,2, \dots$.

Более сложный спектр имеет квазипериодический сигнал. Простейшим его примером является сумма двух синусоидальных сигналов с разными периодами T_1 и T_2 . Спектр такого сигнала будет содержать компоненты на частотах $1/T_1$ и $1/T_2$. Если квазипериодический сигнал имеет более двух основных частот и не представим в виде суммы синусоидальных (или хотя бы периодических) сигналов на этих частотах, то его спектр может быть очень сложным, поскольку будет содержать помимо основных частот $1/T_1, 1/T_2, \dots, 1/T_r$ и их гармоник $m_1/T_1, m_2/T_2, \dots, m_r/T_r$, также кратные частоты вида $|m_1/T_1 + m_2/T_2 + \dots + m_r/T_r|$, где m_i – произвольные целые числа.

Если сигнал не является ни периодическим, ни квазипериодическим, то его называют аperiodическим или стохастическим. Спектр мощности стохастического сигнала непрерывен. Однако сложность состоит в том, что по спектру Фурье различить стохастический и аperiodический сигнал очень сложно, поскольку последний может содержать очень большое (в пределе – бесконечное) число частот. С другой стороны, даже если предположить, что сигнал квазипериодический, возникает вопрос – мало или велико число степеней свободы системы, порождающей этот сигнал. В первом случае можно пытаться дать детерминистическое описание системы. Во втором же случае может быть использован только вероятностный подход.

4.2. Функция взаимной информации. При анализе временной последовательности $\{x_j\}$ важную роль играет оценка того временного интервала ΔT , по истечению которого система полностью «забывает» свою предысторию. Другими словами, состояние системы в момент времени t_0 зависит только от ее поведения на интервале $[t_0 - \Delta T, t_0]$ и не зависит от того, что было раньше при $t < t_0 - \Delta T$. Для периодического или квазипериодического сигнала $\Delta T \rightarrow \infty$, а для стохастического – ΔT конечно. Предельным случаем стохастического сигнала является белый шум, для которого $\Delta T=0$. Порождаемый белым шумом сигнал в каждый момент времени можно считать «новым». Величину ΔT (или $\bar{m}=\Delta T/\Delta t$ для дискретной последовательности) можно оценить по виду автокорреляционной функции. Другим путем является построение функции взаимной информации

$$I(m) \sim \log \left\langle \frac{p_{k,k+m}(x_i, x_j)}{p_k(x_i)p_{k+m}(x_j)} \right\rangle_{i,j,k}, \quad (11)$$

где $p_{k,k+m}(x_i, x_j)$ – совместная вероятность обнаружения величины x_i в момент времени k и величины x_j в момент времени $k+m$; $p_k(x_i)$ – вероятность обнаружения величины x_i в момент времени k . Усреднение производится по всем i, j, k из множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Практически функцию взаимной информации можно вычислять по формуле

$$I(m) = \sum_{i,j=1}^n p_{k,k+m}(x_i, x_j) \log \frac{p_{k,k+m}(x_i, x_j)}{p_k(x_i)p_{k+m}(x_j)}. \quad (12)$$

Искомую величину \bar{m} находят либо по положению первого минимума функции $I(m)$ (если такой имеется), либо в качестве \bar{m} принимают расстояние, на котором функция $I(m)$ спадает в e раз. Заметим, что наличие указанного минимума на графике функции $I(m)$ связано со свойством странного аттрактора – по истечению определенного промежутка времени любая траектория возвращается в ϵ -окрестность той точки, из которой она вышла.

4.3. Корреляционная размерность. Снова рассмотрим временную последовательность $\{x_j\}$, $j = 1, \dots, n$. Следуя процедуре Такенса, мы можем восстановить по ней траекторию в p -мерном псевдофазовом пространстве,

выбирая в качестве координат величины $x_j, x_{j+m}, x_{j+2m}, \dots, x_{j+(p-1)m}$, где m – надлежащим образом выбранная временная задержка. В результате мы получаем (меняя $j = 1, \dots, n-pm$) серию p -мерных векторов, представляющих фазовую траекторию динамической системы. Можно показать, например, что если траектория замкнута в обычном фазовом пространстве, то она останется замкнутой и в псевдофазовом пространстве; если траектория была хаотической, то она такой и останется. Более общее утверждение состоит в следующем: все основные свойства аттрактора, которому траектория принадлежала в обычном фазовом пространстве, сохраняются при переходе в псевдофазовое пространство.

В хаотическом режиме (соответствующем странному аттрактору в фазовом и, следовательно, псевдофазовом пространстве) положения двух точек на одной и той же траектории, но разделенных во времени, некоррелированы. Так как все точки лежат на аттракторе, существует пространственная корреляция, которую можно попытаться охарактеризовать с помощью какой-то функции. Корреляционная функция определяется как

$$C(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n H(r - \|x_i - x_j\|), \quad (13)$$

где H – функция Хевисайда, равная по определению единице при положительных и нулю при остальных значениях аргумента; $\|x_i - x_j\|$ – расстояние между двумя точками $x_i = (x_i, x_{i+m}, \dots, x_{i+(p-1)m})$ и $x_j = (x_j, x_{j+m}, \dots, x_{j+(p-1)m})$ в p -мерном псевдофазовом пространстве. Можно сказать, что в выражении для $C(r)$ подсчитывается число точек, расстояние между которыми меньше r . Для многих аттракторов функция $C(r)$ зависит от r при $r \rightarrow 0$ по степенному закону, то есть

$$\lim_{r \rightarrow 0} C(r) \sim r^d, \quad (14)$$

поэтому корреляционную размерность можно определить по наклону прямой на графике $(\ln C, \ln r)$

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r}. \quad (15)$$

Необходимо отметить, что при очень малых значениях r число пар точек i, j , расстояние между которыми меньше r , становится малым, поскольку число точек на аттракторе конечно и статистика становится бедной. Кроме того, приобретает решающее значение относительный вклад инструментальной ошибки. Следовательно, на практике степенной закон $C(r) \sim r^d$ выполняется только в ограниченном диапазоне значений r .

Согласно известной теореме Такенса, если исходный аттрактор «живет» в N -мерном фазовом пространстве, то при реконструкции нам придется построить пространство вложения (наше псевдофазовое пространство) размерности $2N+1$. Поскольку априори размерность аттрактора неизвестна, поступают следующим образом. Исходя из дискретных значений $\{x_j\}$, восстанавливают траекторию в p -мерном фазовом пространстве, как описано выше, при возрастающих целых значениях $p=2, 3, 4, 5, \dots$. При каждом значении p вычисляют корреляционную функцию $C_p(r)$ и по ней находят корреляционную размерность d_p . Пока вычисленное значение d_p равно p (или продолжает возрастать вместе с p), размерность пространства, используемого для вычислений, меньше размерности соответствующего аттрактора (или сравнима с ней). Если аттрактор конечномерный, то начиная с некоторого p значение корреляционной размерности d_p перестает зависеть от размерности пространства вложения – происходит насыщение размерности. Это значение $d = \lim_{p \rightarrow \infty} d_p$ и является искомой корреляционной размерностью аттрактора.

По графику зависимости $\log C_p(r)$ от $\log r$, построенному для разных значений p , можно определить еще одну величину, характеризующую аттрактор,

K_2 -энтропию. Для этого определим последовательность $h_p(r) = \log C_p(r) - \log C_{p+1}(r)$, где $C_p(r)$ – корреляционная функция, построенная для псевдофазового пространства размерности p . Начиная с размерности пространства вложения, при которой насыщается корреляционная размерность, прямые $\log C_p = f(\log r)$, построенные для разных p , становятся параллельными в выбранном надлежащим образом диапазоне значений r и величина h_p перестает зависеть от p и r . Это значение $h \sim \lim_{p \rightarrow \infty} h_p(r)$ и называют K_2 -энтропией. Для детерминированного (не стохастического) сигнала K_2 -энтропия равна нулю.

Для правильного вычисления корреляционной размерности в соответствии с описанной выше процедурой важное значение имеет оптимальный выбор временной задержки m . Понятно, что если m слишком велико, то мы теряем информацию о структуре аттрактора и $d \rightarrow \infty$. С другой стороны, если m мало, то требуется крайне большое число точек, чтобы рассматриваемая траектория достаточно плотно заполнила аттрактор. Практически m определяют по виду автокорреляционной функции или функции взаимной информации. В последнем случае в качестве m выбирают первый минимум функции.

5. Состав и применение комплекса «Chaos» для обработки дискретных последовательностей на ЭВМ

Для обработки временной последовательности, включая ее отображение на экране ЭВМ, вычисление спектра мощности, функции взаимной информации, корреляционной размерности и K_2 -энтропии, служит программный комплекс «Chaos». Он включает в себя следующие исполняемые модули: `plott.exe`, `power.exe`, `plotr.exe`, `minfo.exe`, `plot.exe`, `dim-gr1.exe`, `dim-gr2.exe`, а также текстовый файл `dim-par.in`, два командных файла `1.bat` и `2.bat`, определяющих последовательность запуска исполняемых программ, и графический драйвер `egavga.bgi`. Все эти модули должны быть помещены в одну директорию ЭВМ.

Далее будем предполагать, что файл (назовем его `calibr.dat`), содержащий исходную реализацию, получен с помощью АЦП и находится на диске.

Запуск программного комплекса «Chaos» производится с помощью командного файла `1.bat`. При этом последовательно запускаются на исполнение следующие программы:

1. Программа `plott.exe`, служащая для преобразования исходного файла и его графического представления на экране. Программа `plott.exe` запрашивает:

а) имя исходного файла (например, `calibr.dat`); если файл находится в другой директории, чем сам комплекс, то должен быть указан полный путь к нему;

б) число точек (n_1), которое пользователь желает увидеть на экране; отображаются первые $\min(n_1, n)$ точек, где n – общее число точек в исходном файле;

в) формат входного файла: a – одна колонка данных в формате с плавающей запятой, b – одна колонка в целом формате.

В результате работы программы `plott.exe` создаются файлы `main.dat` (если исходный файл содержал данные в целом формате), `power.in` и `minfo.in`. Последние два файла содержат исходную информацию для работы программ `power.exe` и `minfo.exe`. Файл `main.dat` содержит данные в формате с плавающей запятой. Остальные программные модули требуют для работы данные именно в этом формате и запрашивают файл `main.dat`. Если исходный файл (`calibr.dat`) уже содержал данные в формате с плавающей запятой, то файл `main.dat` не создается и остальные модули используют тот же исходный файл (`calibr.dat`).

2. Программа `power.exe`, служит для построения спектра мощности. Входная информация для нее содержится в файле `power.in`. В результате работы создается файл `power.out`, содержащий амплитуды первых 65 компонент спектра мощности.

Полный спектр содержит 128 гармоник и начинает повторяться с 66 гармоники (см. выше).

3. Программа plotp.exe считывает файл power.out и представляет спектр мощности в графическом виде на экране ЭВМ.

4. Программа minfo.exe служит для вычисления функции взаимной информации. При этом учитываются соседи от первого до пятидесятого. Характерное расстояние, на котором система «забывает» свою предысторию (\bar{m}) (см. выше), определяется по первому минимуму функции. Поскольку при вычислении корреляционной размерности используется та же исходная последовательность данных, что и для нахождения функции взаимной информации, желательно, чтобы бы $\bar{m} = 2 \div 3$. Случай $\bar{m} = 1$ ($\bar{m} > 3$) свидетельствует о недостаточно (избыточно) частой выборке значений исходного аналогового сигнала. Исходные данные, необходимые для работы программы minfo.exe, содержатся в файле minfo.in. В результате работы программы создается файл minfo.out, содержащий значения взаимной информации при разных значениях $m=1, \dots, 50$.

5. Программа plot.exe отображает функцию взаимной информации графически на экране ЭВМ.

Вторая часть программного комплекса «Chaos», служащая для вычисления корреляционной размерности и K_2 -энтропии, запускается с помощью командного файла 2.bat. Однако, прежде необходимо вручную подготовить файл dim-par.in, содержащий следующую информацию:

а) имя файла данных, содержащего исследуемую временную последовательность в формате данных с плавающей запятой (после окончания работы 1.bat указанный файл уже существует и его имя можно найти в файлах minao.in и power.in);

б) число точек во входном файле – n (эта информация содержится, например, в файлах minfo.in и power.in);

в) число опорных точек – $n_{оп}$ (для корректной работы программы рекомендуется $n_{оп} > 200$);

г) начальная размерность пространства вложения – p_0 (вычисления корреляционных функций производятся для пространств вложения с размерностями p , где $p_0 \leq p \leq p_0 + 8$, рекомендуется $p_0 = 2$);

д) временная задержка – m (определяется по первому минимуму функции взаимной информации – см. файл minfo.out).

Файл 2.bat последовательно запускает на счет два файла:

1. файл dim-gr1.exe считывает информацию из файла dim-par.in и файла данных, графически представляет на экране аттрактор, реконструированный в трехмерном псевдофазовом пространстве и вычисляет корреляционные функции для $p_0 \leq p \leq p_0 + 8$. Последняя информация заносится в файл output.dat.

2. файл dim-gr2.exe считывает данные из файла output.dat и графически представляет на экране ЭВМ зависимость $\log C_p(r)$ от $\log r$ и зависимость $d \log C_p(r) / d \log r$ от $\log r$ (локальный наклон) для $p_0 \leq p \leq p_0 + 8$.

Корреляционные функции, отвечающие большим значениям p , на графике располагаются ниже. Клавишами «→» и «←» пользователь выбирает диапазон значений $\log r$, на котором корреляционные функции наиболее близки к линейным (локальный наклон близок к горизонтальному), и для него вычисляются значения d_p и h_p , отображаемые графически на экране. Корреляционная размерность d определяется по насыщению величин d_p (см. выше). Отсутствие насыщения размерности свидетельствует либо о неудачном выборе диапазона значений $\log r$ (это можно сделать снова), либо о слишком большой размерности аттрактора. Во втором случае можно попытаться увеличить число опорных точек $n_{оп}$ в файле

dim-par.in. Можно также увеличить начальную размерность вложения p_0 , однако необходимо помнить, что с ростом p_0 быстро растет минимальная длина временного ряда, необходимая для корректного вычисления размерности. Действительно, чем больше размерность псевдофазового пространства, тем больше необходимо точек для плотного заполнения аттрактора в этом пространстве. Поэтому, например, анализ аттрактора, размерность которого $d \approx 10$, требует последовательности, содержащей более чем 10^5 точек.

6. Порядок выполнения работы

I. Исследовать на калькуляторе (или ЭВМ) свойства отображения (1). Найти колмогоровскую энтропию, установившееся распределение вероятностей и размерность.

II. Сделать то же для отображения (8),(9), описывающего простейший генератор шума.

III. Экспериментально исследовать работу генератора шума. Для этого:

1) Проверить электрические соединения в схеме установки; убедиться в наличии заземления.

2) Включить источник питания автогенератора.

3) Изменяя инкремент нарастания автоколебаний в контуре с помощью сопротивления $R = (r - r_0)$, возбудить в контуре чисто периодические автоколебания для различных сочетаний величин емкости контура C и емкости туннельного диода C_1 . Зарисовать фазовые портреты и соответствующие им осциллограммы и спектр сигнала.

4) Экспериментально определить величину R , при которой амплитуда колебаний в контуре достигает порогового значения. Зарисовать осциллограммы тока $I(t)$ и напряжения $V(t)$. Объяснить полученные результаты.

5) Для различных фиксированных значений C_1 и C путем изменения сопротивления R получить стохастический режим работы автогенератора.

6) Исследовать поведение автогенератора в зависимости от параметров C_1 и R . Для нескольких фиксированных значений C_1 и плавного изменения параметра R построить границы областей с качественно различным поведением автогенератора. Найти режим бифуркаций удвоения периода.

7) Выяснить, как с изменением R меняются инкременты и длительность цугов стохастических колебаний.

8) Выяснить, как на те же параметры (инкремент и длительность цуга) влияют величины емкостей C_1 и C . Объяснить полученные результаты.

IV. Записать характерные реализации, отвечающие разным режимам работы генератора, в память ЭВМ и исследовать их с помощью комплекса «Chaos», как это было описано выше. Зарисовать спектры мощности; найти, как меняется при изменении параметров характерный временной масштаб (с помощью функции взаимной информации); вычислить корреляционную размерность и K_2 -энтропию для каждой реализации.

Библиографический список

1. Шарковский А.Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Укр. матем. ж. 1961. Т.13, № 3. С.86.
2. Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М: Мир, 1969.
3. Заславский Г.М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
4. Хенон М. Двумерное отображение со странным аттрактором // Странные аттракторы / Пер.с англ.; Под ред. Я.Г.Синяя и Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. С. 152.

5. Кияшко С.В., Пиковский А.С., Рабинович М.И. Автогенератор радиодиапазона со стохастическим поведением // РИЭ. 1980. Т. 25. С. 336.
6. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.
7. Мун Ф. Хаотические колебания. М.: Мир, 1990.
8. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991.
9. Андрушкевич А.В., Кипчатов А.А., Красичков Л.В., Короновский А.А. Путь к хаосу в кусочно-линейной модели генератора на туннельном диоде // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1993. Т. 1, № 1, 2. С. 93.

Дополнительная литература

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. Изд.2-е. М.: Наука, 1992.
2. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990.
3. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.
4. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987.

*Институт прикладной
физики РАН*

*Поступила в редакцию 17.12.93
после переработки 07.01.94*

THE CHAOTIC DYNAMICS OF A SIMPLE ELECTRON CIRCUIT

M.V. Bazhenov, S.V. Kiyashko, M.I. Rabinovich

Laboratory investigation of complex chaotic regimes in a simple noise generator is described. The investigation includes detailed introduction into the problem, qualitative analysis of the noise generator and description of a standard procedure for computer processing of results of the experiments. The material is intended, primarily, for students studying chaotic dynamics. However, the last sections concerned with computer analysis of time series and with the description of the relevant software «Chaos» may also be interesting to specialists in this branch of science.



Баженов Максим Владимирович – 1967 г. рождения, научный сотрудник Института прикладной физики РАН. В 1989 г. окончил радиофизический факультет Горьковского университета. Область научных интересов: качественная теория дифференциальных уравнений, теория пространственно-временного хаоса и структурообразования в распределенных неравновесных системах. Имеет 17 публикаций в отечественных и иностранных журналах.