



Изв.вузов «ПНД», т.2, № 2, 1994

## NONLINEARITIES IN ACTION: Oscillations, Chaos, Order, Fractals

by *Andrei V. Gaponov-Grekhov & Michail I. Rabinovich*

With 121 Figures and 63 Color Plates  
Institute of Applied Physics, ul. Ulyanova 46  
603600 Nizhny Novgorod, Russia

*English by:*

Dr. Ernst F. Hefter  
Klosterstrasse 85  
W-6921 Lobenfeld, Germany

Nadya Krivatkina  
Institute of Applied Physics  
Russian Academy of Sciences  
ul. Ulyanova 46  
603600 Nizhny Novgorod, Russia

ISBN 3-540-51988-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York  
ISBN 0-387-51988-2 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

*Published by:*

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992

*Printed in Hong Kong*

### Предисловие

В истории человечества можно проследить путь развития представлений о мироустройстве, начиная от древних рассуждений до современной естественно-научной картины мира. Стремление понять, как устроен мир, привело к постепенному формированию (все еще продолжающемуся) абстрактной конструкции огромной сложности. Для непосвященного она может выглядеть как сюрреалистическая скульптура, покоящаяся на многих «опорах», самые необычные из которых – вероятность, относительность, квантовая механика... Время от времени возникают проблемы со стабильностью конструкции: некоторые факты, не укладывающиеся в устоявшиеся теории и которые нельзя более игнорировать, начинают расшатывать фундамент. Тогда начинают закладываться и постепенно строиться новые «опоры».

Данный процесс повторялся уже многократно, и, несомненно, будет повторяться вновь и вновь. В наше время одной из таких значительных строящихся «опор» является «теория хаоса». Физикам, похоже, нравится термин «хаос». Когда они пришли к пониманию того, что воздух не пустое пространство, а неопикуемый танец мириад молекул, они назвали все это «хаосом», самым подходящим в этот момент словом. С течением времени понятие упростилось до «газа». Так термин «хаос» освободился до следующего удобного случая. Потребность в нем возникла в контексте теории нелинейных динамических систем, когда были обнаружены странные движения, казавшиеся за пределами

человеческого понимания. Пришлось ввести понятие «фрактальная размерность» и многое другое! Теперь результаты исследований не оставляют ни малейших сомнений в том, что «странные находки» являются следствием того факта, что детерминизм не включает в себя предсказуемость. Пуанкаре обнаружил это, работая над проблемой трех тел. Но в то время умами ученых владели относительность и квантовая теория, не давая им заняться такой, казалось, незначительной проблемой.

Старая теория хаоса уступила место теории кинетического газа и статистической механики. Куда приведет новая теория хаоса? Где взять, инструментарий для преодоления непредсказуемости в большинстве детерминированных систем? Какие из детерминированных систем остались неза- тронутыми? Мы еще далеки от получения ответов на данные вопросы, но уже знаем, что в сердцевине этого нового хаоса лежит нелинейность, предмет, изучаемый во всей своей глубине данной работой. Можно сказать наверняка, что будет возведено гигантское сооружение на опорах с названиями «нелинейная физика», «нелинейная динамика», «нелинейная наука».

Всегда поучительно наблюдать за учеными, идущими на штурм новой территории, вооруженными различными инструментами, пытающимися каждый по-своему откопать и отмыть сокровища. Такова человеческая натура, и, зачастую, прогресс осуществляется подобным образом. С другой стороны, эти ученые иногда вступают в конфликт с «аборигенами», которые выросли на этой почве и получили более глубокие знания о «местности». Авторы этой книги принадлежат ко второму типу. Они помогают нам разобраться в знаниях, накопленных в 20-ом столетии в бывшем Советском Союзе в области нелинейной динамики, в особенности, в знаниях о нелинейных колебаниях и волнах. Политическое деление мира создало отдельные сообщества, работающие над проблемами нелинейной физики и почти не соприкасающиеся друг с другом. Несмотря на это, с течением времени, самые значительные результаты преодолели границы и вошли в общечеловеческую сокровищницу знаний. Перечень знаменитых имен впечатляет: Ландау (нелинейное затухание Ландау, уравнение Гинзбурга – Ландау), Колмогоров (теория турбулентности, энтропия Колмогорова), Оселедец (эргодическая теорема), Ляпунов (ляпуновские экспоненты динамических систем), Мандельштам (рассеяние волн), Андронов (нелинейные колебания), Арнольд (языки Арнольда), Мельников (критерий Мельникова), Чириков (перекрывание резонансов) и многие другие. Я приношу извинения, что не назвал всех. Их достижения собраны здесь и снабжают читателя глубоким пониманием новой «теории хаоса» или, скорее, строящейся «нелинейной физики».

Я прочел эту книгу с огромным удовольствием и пользой для себя и уверен, что каждый, читающий ее, испытает то же самое.

Россдорф  
Март 1992

Вернер Лаутерборн

*Перевод М.В. Поповой*

### **От авторов**

Эта книга – ни монография, ни учебник. Цель авторов – дать обзор последних достижений и наметить основные пути дальнейшего развития интереснейшей междисциплинарной области современной физики – нелинейной физики. Ключевые слова здесь – динамический хаос, солитоны, самоорганизация, турбулентность, структуры. Нелинейная физика или, более обще, теория нелинейных феноменов, оформилась как независимое научное направление лишь в последней четверти нашего столетия. Ее быстрое развитие произошло во многом благодаря обширным и надежным основам нелинейной механики и теории

нелинейных колебаний и волн. Вот почему в заглавие этой книги включено слово «колебания» наряду со словами «хаос» и «фракталы».

В наши дни нелинейная физика так тесно переплелась с теорией динамических систем, что сами термины «нелинейная физика» и «нелинейная динамика» стали синонимами. Краеугольным камнем в здании нелинейной науки стали работы А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова, а позже и Л.Н. Мандельштама, А.А. Андронова, Дж.Д. Биркгоффа, Ван-дер-Поля и других. Вклад Мандельштама и Андронова несколько выделяется по важности полученных конкретных результатов (рассеяние Мандельштама – Бриллюэна, бифуркация Андронова – Хопфа и т.д.). Более того, их воздействие на эту современную ветвь науки достаточно фундаментально, так как они разработали общее отношение и подход к проблемам нелинейных систем, предложив совершенную методику их исследования, включая изучение всех деталей и эффектов, воздействующих на параметры в процессе их эволюции. Они также сконструировали основные модели и разработали «интернациональный» междисциплинарный язык, до сих пор используемый научным сообществом. Вот причины, побудившие посвятить нашу книгу Л.И. Мандельштаму и А.А. Андронову, которая может быть также названа «Нелинейная физика: Вчера – Сегодня – Завтра».

Нижний Новгород,  
лето 1992

А.В. Гапонов–Грехов  
М.И. Рабинович

*Перевод М.В. Поповой*

*Редколлегия выражает сожаление, что, как и в предыдущем случае, эта книга не имеет перевода на русский язык, и предлагает читателю ознакомиться с содержанием книги по Оглавлению оригинала.*

## Contents

<b>1. Introduction</b>	1
<b>2. Nonlinear Oscillations and Waves. Classical Results</b>	11
2.1 Oscillators	11
2.1.1 A Marble in the Chute	11
2.1.2 Spring Pendulum and Nonlinear Optics	14
2.1.3 Nonlinear Landau Damping and Amplification	18
2.2 Solitons	22
2.2.1 The Fermi – Pasta – Ulam Paradox	22
2.2.2 Solitons as Particles	25
2.2.3 Solitons and Shock Waves	27
2.3 Self-Excited Oscillations	31
2.3.1 Examples and Definitions	32
2.3.2 Competition and Synchronization	36
2.3.3 Self-Excited Oscillations in Chains and Continuous Systems	38
2.4 Bifurcations	40
2.4.1 Acquisition of a New Quality	40
2.4.2 Bifurcations of Equilibrium States	43
2.4.3 Bifurcations of Periodic Motion	45
2.4.4 Bifurcations – Changes of Stability in Periodic Motion	45
2.5 Modulation	46
2.5.1 The Role of Small Parameters	46
2.5.2 Running Mandelstam Lattices. Modulation of Waves by Waves	48
2.5.3 Generation of Modulation	51
2.5.4 Self-Modulation	52
2.5.5 Recurrence	54
2.5.6 Modulation Solitons	56

<b>3. Chaos</b>	59
3.1 Historical Remarks	59
3.2 Marble in an Oscillating Chute	60
3.3 Stochastic Self-Excited Oscillations	64
3.3.1 The Lorenz Attractor	65
3.3.2 Synchronization – Beats – Chaos	68
3.3.3 Autonomous Noise Generator	68
3.3.4 Scenarios for the Birth of Strange Attractors	72
3.4 Chaos and Noise	75
3.4.1. Dimension and Entropy	75
3.4.2 The Cantor Structure of a Strange Attractor	76
3.4.3 Dimension and Lyapunov Exponent	78
3.4.4 Deterministically Generated and Random Signals	81
<b>4. Structures</b>	85
4.1 Order and Disorder – Examples	85
4.2 Attractors and Spatial Patterns	90
4.2.1 Examples and Equations	90
4.2.2 Multistability. Defects	92
4.3 Self-Structures	98
4.3.1 Convective Self-Structures	98
4.3.2 Localization Mechanisms	100
4.3.3 Self-Structures in Three-Dimensional Media	101
4.3.4 Interaction of «Elementary Particles»	103
4.3.5 Birth and Interaction of Spiral Waves	105
4.4 Attractors – Memory – Learning	107
4.4.1 How to Remember	107
4.4.2 «Camera + TV + Feedback» Analogue	109
4.4.3 Critical Phenomena	112
4.4.4 Structures in Neuron-Like Media	113
<b>5. Turbulence</b>	117
5.1 Prehistory.	117
5.2 Basic Models of Dynamic Theory.	120
5.3 Turbulence and Structures in Two-Dimensional Fields	122
5.3.1 Experiments	122
5.3.2 Development of Turbulence and Multi-Dimensional Attractors	125
5.4. Spatial Evolution of Turbulence	127
5.4.1 Flow Dimension	127
5.4.2 Spatial Bifurcations	129
5.5 Discussion	130
<b>6. Nonlinear Physics – Chaos and Order</b>	133
6.1 The Where and the How	133
6.2 Randomness Born out of Nonrandomness	134
6.3 An Unstable Path and Steady Motion. Are They Incompatible?	136
6.4 Does Chance Rule the World?	167
6.5 What is the Character of Nature? Integer or Fractal?	139
6.6 Fractal Fingers	141
6.7 Self-Organizing Structures	143
6.8 Singles.	145
6.9 The New Life of an Old Problem.	145
6.10 Spatial Evolution of Disorder	146
6.11 What Does Your Camera See When It is Watching TV?	147
6.12 Multistability and Memory	148
6.13 Nonlinear Dynamics in Society	149
Color Plates	151
Literature	177
Acknowledgements of the Figures	185
Subject Index	187