



## УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

*Н.М. Рыскин*

Рассматриваются нелинейные волновые процессы в одномерном цилиндрическом электронном потоке, движущемся в сильном продольном магнитном поле. В предположении, что силы кулоновского взаимодействия между различными сечениями потока экспоненциально спадают с расстоянием, найдены аналитические решения для уединенных волн в неявном виде и определены условия их устойчивости. В численном эксперименте исследуются процессы возбуждения и взаимодействия уединенных волн. Показано, что столкновение двух быстрых или двух медленных волн является упругим с высокой степенью точности. В то же время, при столкновении быстрой и медленной волны проявляются неупругие эффекты, что выражается в образовании осциллирующего хвоста.

### Введение

В большинстве работ последнего времени, посвященных нелинейным волнам пространственного заряда (ВПЗ) [1-4], в качестве модельного используется уравнение Кортевега - де Вриза (КдВ), на основании чего делается вывод о возможности возбуждения в электронных потоках солитонов. С другой стороны, в работе [5] было предложено уравнение, названное авторами симметричным регуляризованным длинноволновым уравнением, которое (в системе отсчета, движущейся со скоростью невозмущенного потока) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u^2/2)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет решения в виде уединенных волн, которые несколько отличаются от солитонов КдВ. Оно является, очевидно, более реалистической моделью, чем уравнение КдВ, так как позволяет учесть взаимодействие между быстрой и медленной ВПЗ (в рамках этого уравнения быстрая волна является прямой, а медленная - встречной), а также точно учитывает дисперсионные эффекты.

Численное решение уравнения (1) показало [5], что столкновение попутных уединенных волн (то есть двух быстрых или двух медленных) является упругим с высокой степенью точности. В то же время столкновение встречных (то есть быстрой и медленной) волн является сильно неупругим: образуется заметное излучение в виде осциллирующего хвоста. Более того, если скорости сталкивающихся волн достаточно велики, может произойти образование одной или нескольких новых пар уединенных волн. В работе [5] было зафиксировано до восьми таких дополнительных пар. В связи с этими результатами особый

интерес приобретают методы исследования, не замыкающиеся на тех или иных модельных уравнениях, что позволит выяснить степень их применимости и указать пути дальнейшего продвижения.

## 1. Основные уравнения

Рассмотрим цилиндрический электронный поток радиуса  $r$ , движущийся вдоль оси цилиндрического волновода радиуса  $R$  с идеально проводящими стенками. Поток будем считать ионно-скомпенсированным, что позволяет пренебречь влиянием статического пространственного заряда, и сфокусированным бесконечно сильным продольным магнитным полем, что исключает возможность поперечных движений. Ограничимся случаем, когда возмущения скорости достаточно малы, так что обгона одних электронов другими не происходит. При сделанных допущениях поток можно считать сплошной средой и описать гидродинамическими уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

В уравнениях (2) и (3) все величины являются безразмерными: скорость  $v$  и плотность заряда электронной «жидкости»  $\rho$  нормированы на невозмущенные значения  $v_0$  и  $\rho_0$ , потенциал поля пространственного заряда  $\phi$  - на  $mv_0^2/e$ , время - на  $\omega_p^{-1}$ , а координата - на  $v_0/\omega_p$ , где  $\omega_p = (e\rho_0/m\epsilon_0)^{1/2}$  - плазменная частота.

Для напряженности поля пространственного заряда  $E$  используем хорошо известное приближенное соотношение [6]

$$E(x) = 1/2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(x') \exp[-k_{\perp}|x-x'|] \operatorname{sgn}(x-x') dx', \quad (4)$$

где  $k_{\perp} = \alpha/r$  ( $1 \leq \alpha \leq 2$ ),  $\tilde{\rho} = \rho - 1$ . Выражение (4) получается путем экспоненциальной аппроксимации функции Грина. Подбором параметра  $\alpha$  можно добиться достаточно точной аппроксимации при различных  $R$  и  $r$ . Так,  $\alpha=2$  наиболее хорошо соответствует точному соотношению при  $r \rightarrow R$ . Уравнение (4) неоднократно использовалось при численных расчетах и достаточно хорошо моделирует влияние поперечной ограниченности потока.

Из уравнения (4) получаем следующее выражение для потенциала:

$$\phi(x) = \frac{1}{2k_{\perp}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(x') \exp[-k_{\perp}|x-x'|] dx'. \quad (5)$$

Преобразуем это интегральное соотношение к дифференциальному, для чего потребуем, чтобы  $\phi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , и применим к (5) преобразование Лапласа. В результате получим

$$\phi(s) = \frac{\rho(s)}{s^2 - k_{\perp}^2}.$$

Здесь  $\phi(s)$ ,  $\rho(s)$  - изображения  $\phi(x)$  и  $\tilde{\rho}(x)$  соответственно. Разрешая это уравнение относительно  $\rho(s)$  и применяя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k_{\perp}^2 \varphi = \rho - 1, \quad (6)$$

которое (с другим значением  $k_{\perp}$ ) было предложено ранее в работе [1] для случая  $r \ll R \ll \lambda$ , где  $\lambda$  - характерный продольный масштаб возмущения. Таким образом, оно по-прежнему применимо и в случае не слишком тонких потоков, что более характерно для условий эксперимента.

## 2. Стационарные волны

Пожалуй, наиболее распространенный аналитический метод состоит в изучении стационарных волн, что позволяет перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным, которые могут быть проанализированы традиционными методами теории нелинейных колебаний. Будем искать стационарные решения системы (2),(3),(6), то есть решения, зависящие от комбинации  $\theta = x - ut$ , где  $u = \text{const}$  - скорость волны. Проинтегрировав первые два из них с граничными условиями

$$v = 1, \quad \rho = 1, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow \pm\infty, \quad (7)$$

получим следующие соотношения:

$$\varphi = \frac{1}{2} [(v - u)^2 - (1 - u)^2], \quad (8)$$

$$\rho = (1 - u)/(v - u). \quad (9)$$

С учетом (8) и (9) уравнение (6) примет вид уравнения нелинейного осциллятора [1]

$$\frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = k_{\perp}^2 \varphi + (1 + 2\varphi/(1 - u)^2)^{-1/2} - 1, \quad (10)$$

потенциальная энергия которого имеет вид

$$W = \varphi - k_{\perp}^2 \varphi^2 / 2 + (1 - u)^2 (1 - \sqrt{1 + 2\varphi/(1 - u)^2}). \quad (11)$$

Полагая, что  $|2\varphi/(1 - u)^2| \ll 1$  (слабая нелинейность), авторы [1] разлагают правые части соотношений (10), (11) в ряд с точностью до членов второго порядка малости и получают в результате уравнения, имеющие решения в виде солитонов КдВ. Однако нас в большей степени интересуют точные решения этих уравнений.

Анализ показывает, что функция  $W(\varphi)$  имеет два экстремума в точках  $\varphi = 0$  и

$$\varphi = \varphi^* = \frac{4 - M^2}{4k_{\perp}^2} - \frac{1}{2k_{\perp}^2} \sqrt{\frac{M^4}{4} + 2M^2},$$

где  $M = k_{\perp}|u - 1|$  - величина, имеющая смысл числа Маха [2]. В случае  $M < 1$  состояние равновесия  $\varphi = 0$  устойчиво, а  $\varphi = \varphi^*$  - неустойчиво, причем  $\varphi^* > 0$ . Если же  $M > 1$ , то  $\varphi^* < 0$  и это равновесие устойчиво, а  $\varphi = 0$  - неустойчиво. Таким образом, в обоих случаях возможно решение в виде уединенной волны. Однако необходимо заметить, что при  $M < 1$  эти решения не удовлетворяют граничным условиям (7), поэтому следует ожидать, что в этом случае (то есть когда равновесие  $\varphi = 0$  устойчиво) реализуются лишь периодические решения, а уединенные волны -

только при  $M > 1$ . В дальнейшем мы будем предполагать это условие выполненным.

Теперь необходимо исследовать, не произойдет ли обрушение уединенной волны. Анализ показывает, что она устойчива при  $M < 2$ . Заметим, что в работе [3], где уравнение Пуассона полагалось полностью двумерным, при численном интегрировании стационарных уравнений был получен результат  $M < 1.23$ .

Итак, величина  $M$  может принимать значения  $1 < M < 2$ , откуда следует, что скорость стационарной волны  $u$  должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$1 + k_{\perp}^{-1} < u < 1 + 2k_{\perp}^{-1}$$

для быстрой волны и

$$1 - 2k_{\perp}^{-1} < u < 1 - k_{\perp}^{-1}$$

для медленной. Таким образом, скорость быстрой волны всегда больше, а медленной - меньше, чем фазовая скорость линейных ВПЗ. Действительно, нетрудно заметить, что дисперсионное соотношение системы (2),(3),(6) имеет вид

$$(\omega - k)^2 = \frac{k^2}{k_{\perp}^2 + k^2},$$

откуда следует, что фазовая скорость  $v_p = \omega/k$  лежит в пределах

$$1 - k_{\perp}^{-1} < v_p < 1 + k_{\perp}^{-1}.$$

Аналогичный результат был получен численно в [3].

Найдем точное решение в виде уединенной волны. Интегрируя уравнение (10), получаем

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 = 2(G - W),$$

где  $G$  - постоянная интегрирования. Решению в виде уединенной волны соответствует  $G=0$ . Тогда, выражая  $\varphi$  через  $v$  при помощи (8), приходим к следующему уравнению:

$$(u - v)dv/d\theta = \pm(v-1)\sqrt{k_{\perp}^2(v-2u+1)^2/4 - 1}. \quad (12)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует быстрой волне, нижний - медленной. Интегрируя (12), получаем точное решение в неявном виде

$$\theta = \frac{2}{k_{\perp}} \ln(V + \sqrt{V^2 + 1}) + \frac{M}{k_{\perp}\sqrt{M^2 - 1}} \ln\left(\frac{MV - 1 + \sqrt{(M^2 - 1)(V^2 - 1)}}{M - V}\right), \quad (13)$$

где  $V = k_{\perp}|v - 2u + 1|/2$ . Постоянная интегрирования в (13) выбрана так, чтобы  $\theta(v_{\max}) = 0$ . Нетрудно найти связь между амплитудой уединенной волны  $v_{\max}$  и ее скоростью  $u$

$$v_{\max} = 2u - 1 \mp 2/k_{\perp}.$$

Итак, скорость уединенной волны пропорциональна амплитуде, хотя связь между этими величинами несколько иная, чем у солитонов КдВ и уединенных волн уравнения (1).

Подсчитаем площадь  $S$ , занимаемую уединенной волной, которую определим следующим образом:

$$S = \pm \int_{-\infty}^{\infty} (v - 1) d\theta.$$

С учетом (12) это выражение принимает вид

$$S = 2 \int_1^{v_{\max}} \frac{(u - v)dv}{(k_{\perp}^2 (v - 2u + 1)^2/4 - 1)^{1/2}}.$$

Вычисляя интеграл, получаем, что

$$S = \frac{4}{k_{\perp}^2} [2\sqrt{M^2 - 1} + \ln(M + \sqrt{M^2 - 1})], \quad (14)$$

откуда следует, что площадь импульса монотонно возрастает с ростом  $M$  (то есть, с ростом амплитуды волны).

В заключение отметим, что поскольку в медленной ВПЗ возмущения скорости и плотности заряда противофазны, а в быстрой - синфазны, то уединенная волна в любом случае будет представлять собой сгусток электронов.

### 3. Численный эксперимент

Анализ стационарных решений позволил нам выяснить некоторые свойства уединенных ВПЗ. Однако ограниченность этого метода очевидна, поскольку не ясно, реализуются ли полученные решения при эволюции произвольного начального возмущения. Поэтому необходимо прибегнуть к непосредственному численному решению нестационарных уравнений (2),(3),(5)<sup>1</sup>. Такой подход на сегодняшний день практически отсутствует в литературе за исключением работы [7], где приведены некоторые результаты эволюции начального возмущения.

В отличие от [7], где при помощи псевдоспектрального метода решалась задача с периодическими граничными условиями, в данной работе используется известная схема с разностями против потоков [8]. Погрешность аппроксимации этой схемы носит диссипативный характер (и может быть минимизирована соответствующим выбором шагов по времени и координате), тогда как нас интересуют явления, связанные с балансом нелинейных и дисперсионных эффектов.

Поскольку уединенные волны представляют собой возмущения, практически локализованные в пространстве, условия (7) задаются на границах расчетной области, размеры которой заведомо превышают размеры возмущения. Все расчеты проводятся в системе отсчета, движущейся со скоростью невозмущенного потока, что позволяет ограничиться сравнительно небольшими пространственными отрезками.

Результаты моделирования показывают, что при эволюции широкого класса начальных возмущений образуются одна или несколько уединенных волн и осциллирующий хвост малой амплитуды. Уединенные волны распространяются устойчивым образом, практически не изменяя свою форму и скорость. Пример такой эволюции приведен на рис.1 в виде зависимостей скорости (а) и плотности заряда (б) от координаты в различные моменты времени. Начальное возмущение представляет собой половину периода гармонического колебания. Связь между амплитудами возмущений скорости и плотности заряда находилась из решения линейной задачи. Поскольку эти возмущения синфазны, образуется быстрая волна. Задание противофазных возмущений приводит к образованию медленной волны.

В связи с результатами работы [5] особый интерес вызывает изучение взаимодействия уединенных волн. Расчеты показывают, что столкновение попутных волн (рис.2,3) является упругим с достаточно большой степенью точности. При большой энергии столкновения можно заметить незначительное

<sup>1</sup> Использование интегрального соотношения (5) при численном моделировании предпочтительнее (6), так как оно неявным образом учитывает граничные условия (7).

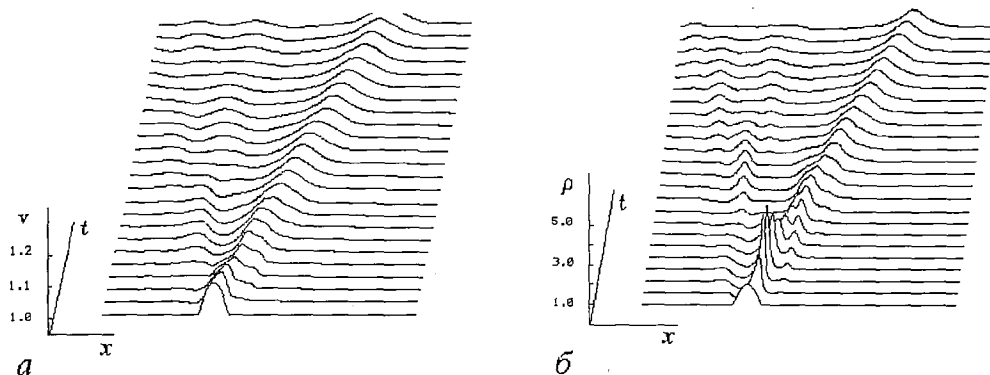


Рис. 1. Образование уединенной волны и осциллирующего хвоста при эволюции начального возмущения: *a* - скорость электронов, *б* - плотность заряда

изменение амплитуд (см. рис. 2)<sup>2</sup>: амплитуда большей волны увеличивается, а меньшей - уменьшается. Однако образование осциллирующего хвоста не наблюдается. Этот процесс можно (по крайней мере качественно) описать уравнением КдВ. Заметим, что существует качественное отличие между взаимодействием волн с сильно различающимися и близкими амплитудами: в последнем случае столкновение происходит без образования одиночного пика (см. рис. 3). Такое поведение также характерно для уравнения КдВ [10].

В то же время столкновение встречных волн (то есть быстрой и медленной) является существенно неупругим (рис. 4), что согласуется с результатами, представленными в [5,7]. Однако образование дополнительных пар уединенных волн, характерное для уравнения (1), не было зафиксировано, даже когда амплитуды встречных волн были близки к предельно возможным. Заметим, что по результатам [5] этот эффект должен проявляться при таких значениях скоростей волн, когда, согласно анализу стационарных уравнений, проведенному в разделе 2, будет происходить опрокидывание. Таким образом, применять уравнение (1) для описания уединенных ВПЗ следует с определенной осторожностью.

Представленные результаты соответствуют  $k_1=10$ . Однако следует заметить,

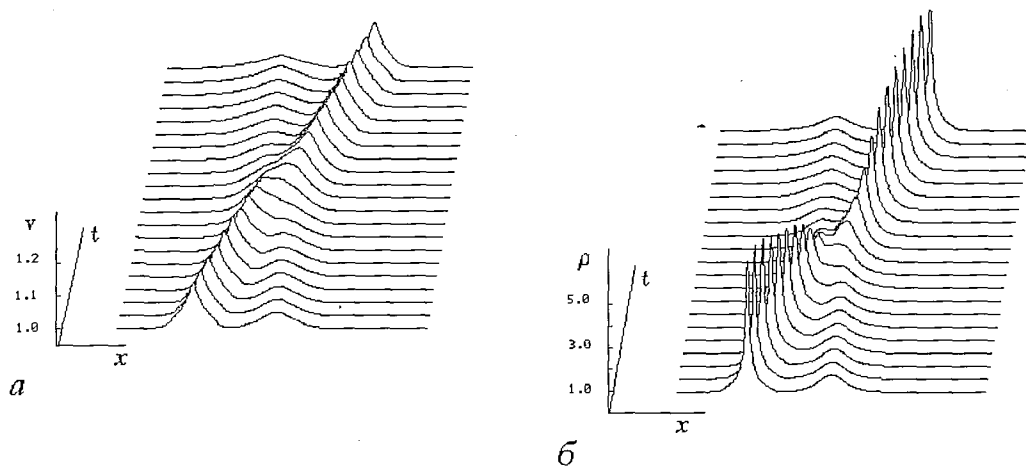


Рис. 2. Взаимодействие двух быстрых уединенных волн с сильно различающимися амплитудами: *a* - скорость электронов, *б* - плотность заряда

<sup>2</sup> Изменение амплитуд попутных уединенных волн при столкновении по-видимому связано с диссипативным характером используемой разностной схемы, так как подобное поведение имеет место при столкновении солитонов уравнения КдВ со слабым диссипативным возмущением [9].

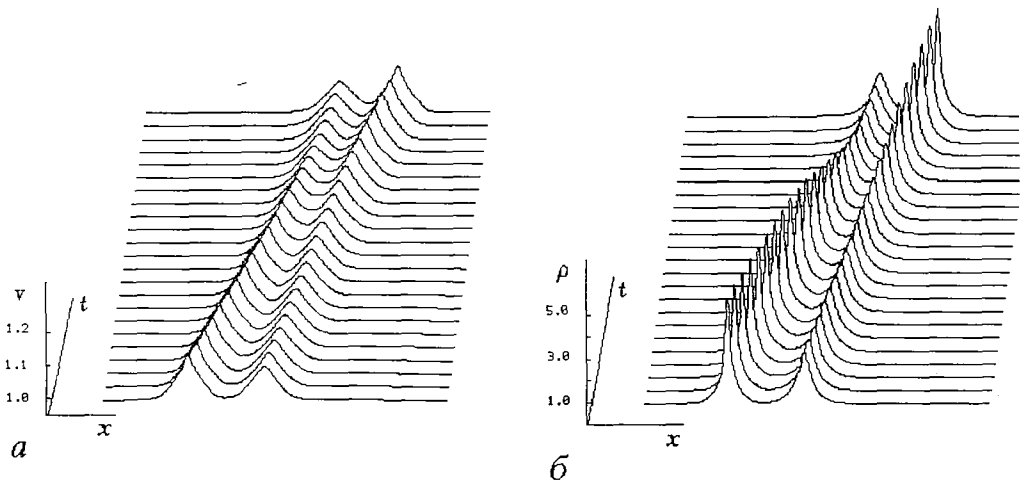


Рис. 3. Взаимодействие двух быстрых уединенных волн с близкими амплитудами, при котором одиночный пик не образуется: *a* - скорость электронов, *б* - плотность заряда

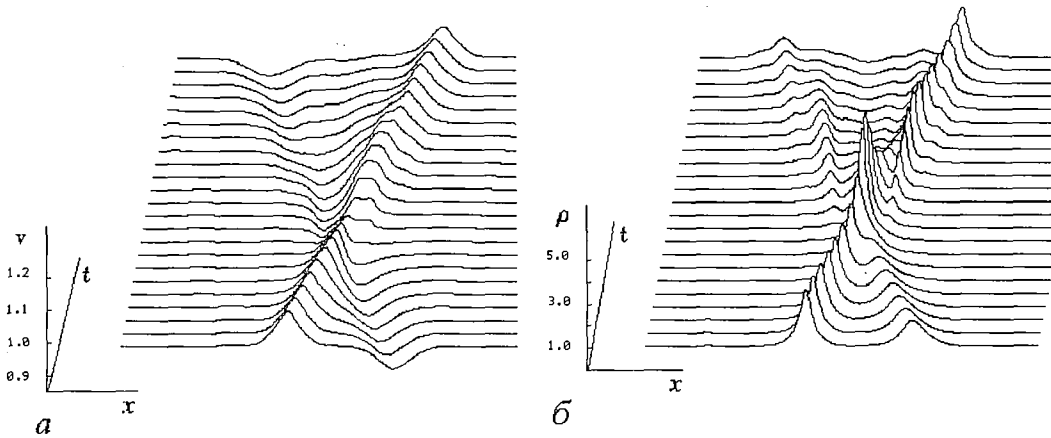


Рис. 4. Взаимодействие быстрой и медленной уединенных волн, при котором проявляются неупругие эффекты: *a* - скорость электронов, *б* - плотность заряда

что в движущейся системе отсчета можно перейти от одного значения  $k_{\perp}$  к другому при помощи преобразования переменных

$$x' = k_{\perp(1)}x / k_{\perp(2)}, \quad v' = k_{\perp(2)}v / k_{\perp(1)}, \quad \varphi' = (k_{\perp(2)} / k_{\perp(1)})^2 \varphi.$$

Нетрудно видеть, что число Маха  $M$  и площадь импульса  $S$  остаются инвариантными относительно этого преобразования.

#### 4. Выводы

Приведенные результаты достаточно убедительно свидетельствуют о существовании уединенных ВПЗ и помогают выяснить ряд существенных особенностей их распространения. В работе найдены точные решения в виде уединенных волн, определены условия их устойчивости. В численном эксперименте исследованы процессы возбуждения и взаимодействия этих волн, что позволяет сделать выводы о степени применимости предлагавшихся ранее модельных уравнений. Используемый численный метод в большей степени отвечает физической сущности задачи, чем использовавшийся ранее в [7],

поскольку избавляет от необходимости рассматривать задачу с периодическими граничными условиями. Это отличие является достаточно существенным, так как хорошо известно (см., например, [4,11,12]), что в ограниченном в поперечном сечении электронном потоке, модулируемом по скорости гармоническим сигналом, такие величины, как плотности заряда, тока и скорость электронов, не являются периодическими функциями координаты.

### Библиографический список

1. Руткевич Б.Н., Пащенко А.В., Федорченко В.Д., Мазалов Ю.П. Стационарные волны в ограниченной плазме // ЖТФ. 1977. Т.47, № 1. С. 112.
2. Ikezi H., Barrett P.J., White R.B., Wong A.Y. Electron Plasma Waves and Free-Streaming Electron Bursts // Phys. Fluids. 1971. Vol.14, № 9. P. 1997.
3. Hughes T.P., Ott E. Nonlinear space-charge waves on cylindrical electron beams and plasmas // Phys.Fluids. 1980. Vol. 23, № 11. P. 2265.
4. Канавец В.И., Пикунцов В.М. Нелинейные волновые и колебательные процессы в протяженных электронных потоках // Радиотехника и электроника, 1983. Т.28, № 2. С. 326.
5. Seyler C., Fenstermacher D. A Symmetric Regularized Long-Wave Equation // Phys. Fluids. 1984. Vol.27, № 1. P. 4.
6. Роу Дж. Теория нелинейных явлений в приборах сверхвысоких частот // М.: Сов. радио, 1969.
7. Fenstermacher D., Seyler C. Nonlinear space - charge wave propagation on thin annular electron beams // Phys. Fluids. 1984. Vol .27, № 7. P. 1808.
8. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.:Мир, 1976.
9. Tanaka M. Effect of weak dissipation on two soliton solution of the KdV equation // J.Phys.Soc.Japan. 1979. Vol.47, № 6. P.2013.
10. Лэм Дж. Введение в теорию солитонов. М.:Мир, 1983.
11. Mihran T.P. Harmonic Current Growth in Velocity-Modulated Electron Beams // J.Appl.Phys. 1959. Vol.30, № 9. P. 1346.
12. Pashke F. Nonlinear Theory of a Velocity-Modulated Electron Beam with Finite Diameter // RCA Review. 1960. Vol. 21, № 1. P. 53.

Научно-исследовательский институт  
механики и физики Саратовского  
университета

Поступила в редакцию 21.04.94.  
после переработки 28.10.94

## SOLITARY SPACE-CHARGE WAVES

*N.M.Ryskin*

Solitary space-charge waves on a cylindrical electron beam, moving in a metal waveguide are studied. The beam is assumed to be charge-neutralized and focused by a strong external magnetic field. Exact solitary wave solutions in an implicit form are obtained and their breaking conditions are determined. Processes of solitary waves excitation and interaction are examined numerically. Overtaking collisions, in which the waves travel in the same direction when viewed from the beam frame (i.e., collisions of two fast or two slow waves), are found to be almost elastic. On the other hand, the «head-on» collisions between two waves, which move in the opposite directions (i.e., the fast wave and the slow wave), do not preserve the waveforms and velocities and produce an oscillatory tail.





*Рыскин Никита Михайлович* - родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета в 1991 году. Работает в НИИ механики и физики СГУ. Область научных интересов - нелинейные явления в распределенных системах различной природы.



В издательстве Саратовского университета в 1994 году вышло учебное пособие по курсу «Теоретические основы радиотехники»

## **НЕЛИНЕЙНЫЕ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИСТЕМЫ С ПОЛУПРОВОДНИКОВЫМИ ПРИБОРАМИ**

Часть 1  
*А.В.Хохлов*

Учебное пособие содержит систематическое изложение методов преобразования сигналов и их спектров в нелинейных и параметрических радиотехнических цепях с полупроводниковыми приборами.

Проведен краткий анализ физических процессов в полупроводниках, описаны принципы действия и свойства основных классов полупроводниковых приборов. Рассмотрены источники нелинейности характеристик полупроводниковых диодов с р-п-переходами и барьерами Шоттки, варикапов, туннельных, обращенных, лавинно-пролетных диодов, диодов Ганна, биполярных транзисторов и униполярных транзисторов с р-п-переходом и изолированным затвором. Обосновываются основные принципы использования полупроводниковых приборов при построении нелинейных и параметрических устройств для преобразования, умножения и деления частоты, модуляции (амплитудной, частотной и фазовой) и детектирования сигналов. Анализируются различные схемные решения.

Книга предназначена для студентов физических специальностей вузов и может быть полезна всем, кто связан с эксплуатацией радиоэлектронной аппаратуры.

129 ил. 19 библиогр. 128 с.

