



## МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

*Н.М. Рыскин*

Исследуется модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда (ВПЗ) в цилиндрическом ионно-скомпенсированном электронном потоке, движущемся вдоль оси цилиндрического волновода и сфокусированном бесконечно сильным продольным магнитным полем. Для медленно меняющихся амплитуд быстрой и медленной ВПЗ получена система из двух связанных нелинейных уравнений Шредингера. Показано, что взаимодействие ВПЗ существенно влияет на характер модуляционной неустойчивости и приводит к тому, что неустойчивость имеет место практически при любом значении частоты несущей волны.

### Введение

В последнее время появилось несколько работ, в которых обсуждался вопрос о модуляционной неустойчивости волн пространственного заряда (ВПЗ) в электронных потоках различных конфигураций [1-3]. В работе [1] при помощи метода Уизема было показано, что в бесконечно широком потоке решения в виде периодических стационарных волн устойчивы. В то же время ограниченность потока в поперечном сечении может привести к неустойчивости. Так, в работе [2], где исследовался тонкий трубчатый поток, движущийся в металлическом волноводе, было получено нелинейное дисперсионное соотношение, анализ которого показал, что модуляционная неустойчивость имеет место при любых значениях волнового числа  $k$ . Ленточный поток, движущийся между двумя проводящими плоскостями, был рассмотрен в работе [3], авторы которой получили нелинейное уравнение Шредингера, описывающее динамику медленно меняющейся амплитуды волны, и показали, что неустойчивость наблюдается лишь в длинноволновой области, то есть при  $k$  меньших некоторого критического значения.

Следует заметить, что во всех этих работах исследовалась устойчивость только одной из ВПЗ - быстрой или медленной. В настоящей работе проведен анализ модуляционной неустойчивости, учитывающий взаимодействие этих волн. Полученные результаты свидетельствуют о принципиальной необходимости учета данного фактора для корректного описания неустойчивости.

### 1. Основные уравнения

Рассмотрим модель, в которой цилиндрический электронный поток движется вдоль оси цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками. Поток будем считать ионно-скомпенсированным, что позволяет пренебречь влиянием статического пространственного заряда, и сфокусированным

бесконечно сильным продольным магнитным полем, что исключает возможность поперечных движений. Ограничимся случаем, когда возмущения скорости достаточно малы, так что обгона одних электронов другими не происходит. При сделанных допущениях поток можно считать сплошной средой и описать гидродинамическими уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) все величины являются безразмерными: скорость  $v$  и плотность заряда электронной «жидкости»  $\rho$  нормированы на невозмущенные значения  $v_0$  и  $\rho_0$ , потенциал поля пространственного заряда  $\phi$  - на  $mv_0^2/e$ , время - на  $\omega_p^{-1}$ , а координата - на  $v_0/\omega_p$ , где  $\omega_p = (e\rho_0/m\epsilon_0)^{1/2}$  - плазменная частота.

Для потенциала  $\phi$  используем уравнение Пуассона в виде

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - k_{\perp}^2 \phi = \rho - 1, \quad (3)$$

причем член  $-k_{\perp}^2 \phi$  моделирует влияние проводящих стенок волновода (так называемых «сил изображения»). Уравнение (3) получено в предположении, что силы кулоновского взаимодействия между различными сечениями электронного потока экспоненциально спадают с расстоянием [4].

## 2. Нелинейное уравнение Шредингера

Получим нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), описывающее эволюцию медленно меняющейся амплитуды волнового пакета, для чего воспользуемся стандартным методом многомасштабных разложений [5]. Представим  $v$ ,  $\rho$  и  $\phi$  в виде рядов по степеням малого параметра  $\epsilon$

$$v = 1 + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \dots,$$

$$\rho = 1 + \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots,$$

$$\phi = \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \dots$$

и введем медленные переменные  $T_1, T_2, \dots, X_1, X_2, \dots$ . При этом производные  $\partial/\partial x$  и  $\partial/\partial t$  преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots.$$

Подставляя эти разложения в уравнения (1)-(3) и выделяя члены порядка  $\epsilon$ , получим линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - k_1^2 \varphi_1 &= \rho_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Полагая, что решение системы (4) имеет вид квазигармонической волны с амплитудой  $A$ , зависящей от медленных переменных, получаем

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \rho_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k/\Omega \\ -(k^2 + k_1^2) \\ 1 \end{bmatrix} A(T_1, T_2, X_1, X_2) \exp(i\theta) + \text{к.с.}, \quad (5)$$

где  $\theta = \omega t - kx$ ,  $\Omega = \omega - k$ , к.с. - комплексно сопряженное выражение, причем  $\omega$  и  $k$  удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$(\omega - k)^2 = \frac{k^2}{k^2 + k_1^2}. \quad (6)$$

Далее, очевидно, во всех порядках малости мы будем получать системы вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} &= \alpha_n, \\ \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial \rho_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial x} &= \beta_n, \\ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} - k_1^2 \varphi_n - \rho_n &= \gamma_n, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_n$  зависят от членов предыдущих порядков [5]. Так, в порядке  $\epsilon^2$  имеем

$$\alpha_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} - \frac{\partial v_1}{\partial T_1} - \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{v_1^2}{2} \right], \quad (8)$$

$$\beta_2 = -\frac{\partial \rho_1}{\partial T_1} - \frac{\partial \rho_1}{\partial X_1} - \frac{\partial v_1}{\partial X_1} - \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\gamma_2 = -2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial X_1}. \quad (10)$$

Исключая из системы (7)  $\rho_n$ ,  $v_n$ , приходим к уравнению

$$D^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_1^2 \right] \varphi_n + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha_n}{\partial x} - D \beta_n - D^2 \gamma_n, \quad (11)$$

где  $D = \partial/\partial t + \partial/\partial x$ . При  $n = 2$  подставим в (11) выражения (5) и (8)-(10) и потребуем, чтобы секулярные члены (то есть члены, пропорциональные  $\exp[\pm i\theta]$ ) в правой части обратились в нуль. Тогда для амплитуды  $A$  будем иметь уравнение

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad (12)$$

где  $v_g$  - групповая скорость

$$v_g = d\omega/dk = 1 \pm \frac{k_{\perp}^2}{(k^2 + k_{\perp}^2)^{3/2}}.$$

Теперь вычислим  $v_2$ ,  $\rho_2$  и  $\varphi_2$ , которые представим в виде

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ \rho_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{20} \\ \rho_{20} \\ \varphi_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{21} \\ \rho_{21} \\ \varphi_{21} \end{bmatrix} \exp(i\theta) + \begin{bmatrix} v_{22} \\ \rho_{22} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} \exp(2i\theta) + \text{к.с.}$$

Члены, пропорциональные  $\exp(2i\theta)$ , без труда находятся из системы (7) при  $n=2$

$$\begin{bmatrix} v_{22} \\ \rho_{22} \\ \varphi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(2k^2 + k_{\perp}^2)/\Omega \\ (4k^2 + k_{\perp}^2)(k^2 + k_{\perp}^2) \\ - (k^2 + k_{\perp}^2) \end{bmatrix} (k^2 + k_{\perp}^2) A^2 / 2k^2. \quad (13)$$

Система уравнений, которая следует из (7) для членов, пропорциональных  $\exp(i\theta)$ , очевидно, является неопределенной. Поэтому удастся получить только два алгебраических уравнения, связывающие  $v_{21}$ ,  $\rho_{21}$  и  $\varphi_{21}$

$$v_{21} = -\frac{k}{\Omega} \varphi_{21} - i\Omega \frac{\partial A}{\partial X_1}, \quad (14)$$

$$\rho_{21} = -(k^2 + k_{\perp}^2) \varphi_{21} - 2ik \frac{\partial A}{\partial X_1}. \quad (15)$$

Наконец, для членов, не зависящих от  $\theta$ , имеем

$$\rho_{20} = -k_{\perp}^2 \varphi_{20}. \quad (16)$$

Чтобы определить  $v_{20}$ ,  $\rho_{20}$  и  $\varphi_{20}$ , необходимо обратиться к уравнениям следующего порядка малости. В этом случае

$$\alpha_3 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1} - \frac{\partial v_2}{\partial T_1} - \frac{\partial v_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2} - \frac{\partial v_1}{\partial T_2} - \frac{\partial v_1}{\partial X_2} - \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{v_1^2}{2} \right) - \frac{\partial (v_1 v_2)}{\partial x}, \quad (17)$$

$$\beta_3 = -\frac{\partial \rho_2}{\partial T_1} - \frac{\partial \rho_2}{\partial X_1} - \frac{\partial v_2}{\partial X_1} - \frac{\partial \rho_1}{\partial T_2} - \frac{\partial \rho_1}{\partial X_2} - \frac{\partial v_1}{\partial X_2} - \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial X_1} - \frac{\partial (\rho_1 v_2 + \rho_2 v_1)}{\partial x}, \quad (18)$$

$$\gamma_3 = -2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial X_1} - 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial X_2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial X_1^2}. \quad (19)$$

Теперь секулярными будут как члены, пропорциональные  $\exp(i\theta)$ , так и не зависящие от  $\theta$ . Приравнявая последние к нулю в каждом из уравнений (17)-(19) с учетом соотношений (5), (12), (13) и (16), получаем

$$\begin{bmatrix} v_{20} \\ \rho_{20} \\ \varphi_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k(2(k^2 + k_{\perp}^2)^2 + k_{\perp}^4)/\Omega \\ -k_{\perp}^2(k^2 + k_{\perp}^2)(k^2 + 3k_{\perp}^2) \\ (k^2 + k_{\perp}^2)(k^2 + 3k_{\perp}^2) \end{bmatrix} \frac{(k^2 + k_{\perp}^2)^2}{(k^2 + k_{\perp}^2)^3 - k_{\perp}^6} AA^*. \quad (20)$$

Далее, подставим (17)-(19) в (11) и потребуем уничтожение членов,

пропорциональных  $\exp(i\theta)$ . Используя формулы (13)-(15) и (20), после ряда достаточно громоздких преобразований получаем НУШ (члены, содержащие неопределенную величину  $\varphi_{21}$ , взаимно уничтожаются)

$$i \left( \frac{\partial A}{\partial T_2} + v_g \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) - \frac{\omega''}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + q|A|^2 A = 0, \quad (21)$$

где

$$\omega'' = d^2\omega/dk^2 = \mp \frac{3kk_{\perp}^2}{(k^2 + k_{\perp}^2)^{5/2}}, \quad (22)$$

$$q = \pm \frac{1}{4} \frac{kk_{\perp}^2 (k^2 + k_{\perp}^2)^{3/2}}{(k^2 + k_{\perp}^2)^3 - k_{\perp}^6} [k^4 - 3k^2k_{\perp}^2 - 9k_{\perp}^4]. \quad (23)$$

Заметим, что учет слагаемых, пропорциональных  $\exp(\pm i\theta)$ , в порядке  $\epsilon^2$  необходим для получения корректного значения коэффициента при дисперсионном члене.

Коэффициент  $q$  меняет знак при  $k \approx 2.2k_{\perp}$  (рис. 1). Таким образом, условие модуляционной неустойчивости  $\omega''q < 0$  [5] выполняется в коротковолновой области  $k > 2.2k_{\perp}$  как для быстрой, так и для медленной ВПЗ. Для бесконечно широкого потока, который исследовался в работе [1], полагая в формулах (22), (23)  $k_{\perp} \rightarrow 0$ , имеем  $\omega''q \approx 0$ . Это некий пограничный случай между устойчивостью и неустойчивостью.

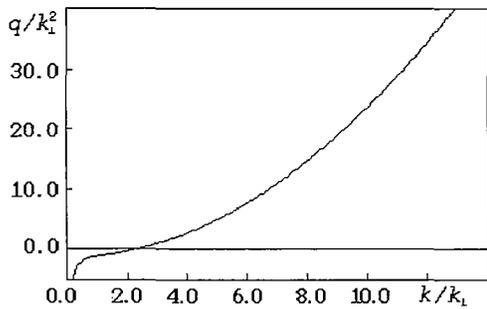


Рис.1. Зависимость коэффициента при нелинейном члене от волнового числа для быстрой ВПЗ (верхний знак в формуле (23))

### 3. Учет взаимодействия волн

Следует заметить, что, строго говоря, мы получили не одно, а два НУШ - для быстрой и медленной ВПЗ. Чтобы учесть нелинейное взаимодействие этих волн, надо искать  $v_1, \rho_1, \varphi_1$  в виде

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \rho_1 \\ \varphi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^b \\ \rho_1^b \\ \varphi_1^b \end{bmatrix} A_b \exp(i\theta_b) + \begin{bmatrix} v_1^m \\ \rho_1^m \\ \varphi_1^m \end{bmatrix} A_m \exp(i\theta_m) + \text{к.с.}$$

Здесь и далее все величины с индексами «б» и «м» относятся, соответственно, к быстрой и медленной волне и определяются согласно формулам раздела 2 подстановкой волновых чисел  $k_b$  или  $k_m$ , являющихся корнями дисперсионного соотношения (6) для данного значения  $\omega$ .

В порядке  $\epsilon^2$  получаем

$$\alpha_2 = \alpha_2^b + \alpha_2^m - ik_+ \frac{k_b k_m}{\Omega_b \Omega_m} A_b A_m \exp(i\theta_+) - ik_- \frac{k_b k_m}{\Omega_b \Omega_m} A_b A_m^* \exp(i\theta_-) + \text{к.с.}, \quad (24)$$

$$\beta_2 = \beta_2^b + \beta_2^m - i \frac{k_+ k_b k_m}{\Omega_b^2 \Omega_m^2} (k_b \Omega_m + k_m \Omega_b) A_b A_m \exp(i\theta_+) -$$

$$- i \frac{k_{\pm} k_{\delta} k_M}{\Omega_{\delta}^2 \Omega_M^2} (k_{\delta} \Omega_M + k_M \Omega_{\delta}) A_{\delta} A_M^* \exp(i\theta_{\pm}) + \text{к.с.}, \quad (25)$$

$$\gamma_2 = \gamma_2^{\delta} + \gamma_2^M, \quad (26)$$

где  $k_{\pm} = k_{\delta} \pm k_M$ ,  $\theta_{\pm} = \theta_{\delta} \pm \theta_M$ . Ищем  $v_2$ ,  $\rho_2$  и  $\varphi_2$  в виде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_2 \\ \rho_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -v_{20}^{\delta} \\ \rho_{20}^{\delta} \\ -\varphi_{20}^{\delta} \end{bmatrix} |A_{\delta}|^2 + \begin{bmatrix} v_{20}^M \\ \rho_{20}^M \\ \varphi_{20}^M \end{bmatrix} |A_M|^2 + \begin{bmatrix} v_{21}^{\delta} \\ \rho_{21}^{\delta} \\ \varphi_{21}^{\delta} \end{bmatrix} \frac{\partial A_{\delta}}{\partial X_1} \exp(i\theta_{\delta}) + \begin{bmatrix} v_{21}^M \\ \rho_{21}^M \\ \varphi_{21}^M \end{bmatrix} \frac{\partial A_M}{\partial X_1} \exp(i\theta_M) + \\ & + \begin{bmatrix} v_{22}^{\delta} \\ \rho_{22}^{\delta} \\ \varphi_{22}^{\delta} \end{bmatrix} A_{\delta}^2 \exp(2i\theta_{\delta}) + \begin{bmatrix} v_{22}^M \\ \rho_{22}^M \\ \varphi_{22}^M \end{bmatrix} A_M^2 \exp(2i\theta_M) + \\ & + \begin{bmatrix} v_{+} \\ \rho_{+} \\ \varphi_{+} \end{bmatrix} A_{\delta} A_M \exp(i\theta_{+}) + \begin{bmatrix} v_{-} \\ \rho_{-} \\ \varphi_{-} \end{bmatrix} A_{\delta} A_M^* \exp(i\theta_{-}) + \text{к.с.} \end{aligned}$$

Подставляя (24)-(26) в (7), находим

$$\begin{aligned} v_{\pm} &= \frac{k_{\pm} k_{\delta} k_M}{\Omega_{\delta}^2 \Omega_M^2} \cdot \frac{k_{\pm} (k_{\delta} \Omega_M + k_M \Omega_{\delta}) + \Omega_{\pm} \Omega_{\delta} \Omega_M (k_{\pm}^2 + k_1^2)}{\Omega_{\pm}^2 (k_{\pm}^2 + k_1^2) - k_{\pm}^2}, \\ \rho_{\pm} &= \frac{k_{\pm} k_{\delta} k_M (k_{\pm}^2 + k_1^2)}{\Omega_{\delta}^2 \Omega_M^2} \cdot \frac{\Omega_{\pm} (k_{\delta} \Omega_M + k_M \Omega_{\delta}) + k_{\pm} \Omega_{\delta} \Omega_M}{\Omega_{\pm}^2 (k_{\pm}^2 + k_1^2) - k_{\pm}^2}, \end{aligned}$$

где  $\Omega_{\pm} = \Omega_{\delta} \pm \Omega_M$  ( $\varphi_{\pm}$  для дальнейших вычислений нам не понадобятся).

Теперь в  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$  дополнительно появятся следующие секулярные члены, обусловленные взаимодействием быстрой и медленной ВПЗ:

$$\begin{aligned} \alpha_3: & ik_{\delta} (v_1^{\delta} v_{20}^M + v_1^M (v_{\cdot} + v_{+})) |A_M|^2 A_{\delta} \exp(i\theta_{\delta}) + \\ & + ik_M (v_1^M v_{20}^{\delta} + v_1^{\delta} (v_{\cdot} + v_{+})) |A_{\delta}|^2 A_M \exp(i\theta_M); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3: & ik_{\delta} (\rho_1^{\delta} v_{20}^M + v_1^{\delta} \rho_{20}^M + \rho_1^M (v_{\cdot} + v_{+}) + v_1^M (\rho_{\cdot} + \rho_{+})) |A_M|^2 A_{\delta} \exp(i\theta_{\delta}) + \\ & + ik_M (\rho_1^M v_{20}^{\delta} + v_1^M \rho_{20}^{\delta} + \rho_1^{\delta} (v_{\cdot} + v_{+}) + v_1^{\delta} (\rho_{\cdot} + \rho_{+})) |A_{\delta}|^2 A_M \exp(i\theta_M). \end{aligned}$$

Требую уничтожения секулярных членов в порядке  $\epsilon^3$ , вместо уравнения (21) получаем систему из двух связанных НУШ

$$i \left( \frac{\partial A_{\delta}}{\partial T_2} + v_{\delta}^{\delta} \frac{\partial A_{\delta}}{\partial X_2} \right) - \frac{\omega_{\delta}''}{2} \frac{\partial^2 A_{\delta}}{\partial X_1^2} + (q_{\delta} |A_{\delta}|^2 + \lambda_{\delta} |A_M|^2) A_{\delta} = 0, \quad (27)$$

$$i \left( \frac{\partial A_M}{\partial T_2} + v_{\delta}^M \frac{\partial A_M}{\partial X_2} \right) - \frac{\omega_M''}{2} \frac{\partial^2 A_M}{\partial X_1^2} + (q_M |A_M|^2 + \lambda_M |A_{\delta}|^2) A_M = 0,$$

причем

$$\lambda_{\sigma} = \frac{\Omega_{\sigma}}{2k_{\sigma}} \left( k_{\sigma} \rho_{20}^{\sigma} + \frac{2k_{\sigma}^2 v_{20}^{\sigma}}{\Omega_{\sigma}} + \frac{k_{\sigma}(k_{\sigma}\Omega_{\sigma} + k_{\sigma}\Omega_{\sigma})(v_{-} + v_{+})}{\Omega_{\sigma}^2} + \frac{k_{\sigma}\Omega_{\sigma}(\rho_{-} + \rho_{+})}{\Omega_{\sigma}} \right), \quad (28)$$

$$\lambda_{\mu} = \frac{\Omega_{\mu}}{2k_{\mu}} \left( k_{\mu} \rho_{20}^{\mu} + \frac{2k_{\mu}^2 v_{20}^{\mu}}{\Omega_{\mu}} + \frac{k_{\mu}(k_{\mu}\Omega_{\mu} + k_{\mu}\Omega_{\mu})(v_{-} + v_{+})}{\Omega_{\mu}^2} + \frac{k_{\mu}\Omega_{\mu}(\rho_{-} + \rho_{+})}{\Omega_{\mu}} \right).$$

Численный анализ соотношений (28) показывает, что  $\lambda_{\sigma}$  всегда положительно, а  $\lambda_{\mu}$  - отрицательно. На рис. 2 приведена зависимость модулей этих величин от  $\omega$ .

Уравнения (27) часто встречаются при описании модуляционной неустойчивости связанных волн в системах различной природы (см. например [6-9]), причем в общем случае эта система, в отличие от НУШ, не является полностью интегрируемой [10]. Линейный анализ устойчивости пространственно-однородного решения системы (27) свидетельствует о том, что при выполнении условия

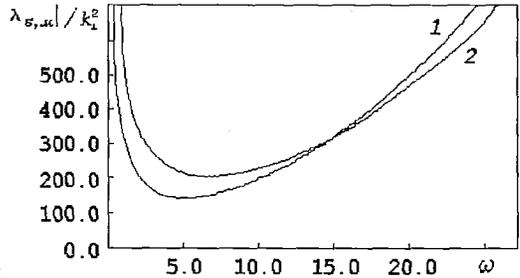


Рис. 2. Зависимость коэффициентов связи в системе связанных НУШ (27) от частоты несущей волны при  $k_{\perp} = 10$ : 1 -  $|\lambda_{\sigma}|$ ; 2 -  $|\lambda_{\mu}|$

$$|\lambda_{\sigma} \lambda_{\mu}| > |q_{\sigma} q_{\mu}| \quad (29)$$

оно оказывается неустойчивым даже в том случае, когда каждая из волн в отдельности устойчива ( $\omega''_i q_i > 0, i = \sigma, \mu$ ) [8,9]. Численный анализ выражений (23) и (28) показывает, что неравенство (29) выполняется практически во всем диапазоне  $\omega^*$ . Таким образом, для корректного описания модуляционной неустойчивости необходимо использовать систему (27) связанных НУШ, учитывающую взаимодействие быстрой и медленной волн.

## Библиографический список

1. Зайко Ю.Н. Устойчивость нелинейных волн пространственного заряда // ЖТФ. 1989. Т.59, № 12. С.137.
2. Шафер В.Ю. Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда трубчатого электронного пучка в волноводе // Краткие сообщения по физике. 1987. № 11. С.29.
3. Руткевич Б.Н., Руткевич П.Б. Модуляционная неустойчивость волн объемного заряда в тонком электронном слое // РЭ. 1990. Т.35, № 3. С.593.
4. Рыскин Н.М. Уединенные волны пространственного заряда // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т.2, № 5. С.84.
5. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / М.: Мир, 1988.
6. Берхоер А.Л., Захаров В.Е. Самовоздействие волн с различной поляризацией в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1970. Т.58, № 6. С.903.
7. Okamura M. Instabilities of weakly nonlinear standing gravity waves // J.Phys. Soc. Japan. 1984. Vol.53, № 11. P.3788.

\* Очевидно, полученные результаты теряют смысл при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ , когда  $\omega''$  обращается в нуль, а коэффициенты  $q$  и  $\lambda$  - в бесконечность. Однако для типичных условий экспериментов с реальными электронными потоками характерны значения  $\omega \sim 10^{-10} 2$ .

8. *McKinstrie C.J., Bingham R.* The modulational instability of coupled waves // *Phys. Fluids B.* 1989. Vol.1, № 1. P.230.

9. *Agrawal G.P., Baldeck P.L., Alfano R.R.* Modulation instability induced by cross-phase modulation in optical fibers // *Phys. Review A.* 1989. Vol.39, № 7. P. 3406.

10. *Zakharov V.E., Shulman E.I.* To the integrability of the system of two coupled nonlinear Schrödinger equations // *Physica D.* 1982. Vol.4, № 2. P. 270.

*Научно-исследовательский институт  
механики и физики  
Саратовского госуниверситета*

*Поступила в редакцию 11.03.93  
после переработки 3.06.94*

## MODULATIONAL INSTABILITY OF SPACE-CHARGE WAVES

*N.M.Ryskin*

Modulational instability of space-charge waves in a strongly magnetized cylindrical charge-neutralized electron beam in a cylindrical wave guide is investigated. For slowly varying amplitudes of fast and slow space-charge modes a system of coupled nonlinear Schrödinger equations is derived. It is shown, that because of the interaction between the fast and slow modes, waves of almost all wave numbers are modulationally unstable.