



МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА: ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

И. М. Рыскин

Представлены результаты численного исследования модуляционной неустойчивости волн пространственного заряда в гидродинамической модели электронного потока. Выясняется влияние таких факторов, как амплитуда и частота основного сигнала, глубина и частота модуляции на инкремент неустойчивости. Отмечается согласие с результатами приближенной теории, построенной в работе автора [1].

Введение

Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда (ВПЗ) исследовалась в работе [1], где при помощи стандартных асимптотических методов теории нелинейных волн была получена система связанных нелинейных уравнений Шредингера, описывающая динамику медленно меняющихся амплитуд быстрой и медленной ВПЗ. На основе анализа решений этой системы был сделан вывод о том, что модуляционная неустойчивость имеет место в широком диапазоне частот, причем ее характер определяется, главным образом, нелинейным взаимодействием между быстрой и медленной ВПЗ.

Следует, однако, заметить, что подход, использованный в [1], позволяет исследовать лишь поведение слабонелинейных, квазимонохроматических возмущений, в то время, как типичные условия эксперимента характеризуются более сильной нелинейностью, когда возбуждается большое количество временных гармоник. Например, даже при слабой начальной модуляции электронного потока по скорости группировка электронов в пространстве дрейфа приводит к тому, что сгруппированный ток становится сильно нелинейным. Поэтому в настоящей работе модуляционная неустойчивость исследуется путем прямого численного моделирования в рамках исходных гидродинамических уравнений, что позволяет выяснить степень применимости развитой в [1] теории и указать ряд новых эффектов.

1. Основные уравнения. Теоретические результаты

Рассмотрим модель, обсуждавшуюся в работе [1]: электронный поток, движущийся в продольном магнитном поле, которое предполагается достаточно сильным для того, чтобы движение электронов можно было считать одномерным.

Будем также считать, что статический пространственный заряд скомпенсирован неподвижным ионным фоном, а возмущения скорости достаточно малы, так что обгона одних электронов другими не происходит. При сделанных допущениях поток можно считать сплошной средой и описать гидродинамическими уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) все величины являются безразмерными: скорость v и плотность заряда электронной «жидкости» ρ , нормированы на невозмущенные значения v_0 и ρ_0 , потенциал поля пространственного заряда φ - на v_0^2/η , время - на ω_p^{-1} , а координата - на v_0/ω_p , где η - удельный заряд электрона, а $\omega_p = (\eta\rho_0/\epsilon_0)^{1/2}$ - плазменная частота.

Потенциал φ подчиняется уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k_{\perp}^2 \varphi = \rho - 1. \quad (3)$$

Хотя в [1] рассматривался цилиндрический электронный поток, движущийся вдоль оси цилиндрического волновода, уравнение (3) справедливо для потока любого поперечного сечения, если можно считать, что силы кулоновского отталкивания между различными сечениями электронного потока спадают с расстоянием пропорционально $\exp(-k_{\perp}x)$. Разумеется, значение параметра k_{\perp} должно быть соответствующим образом модифицировано.

Нетрудно показать, что распространение линейных волн, описываемых уравнениями (1)-(3), происходит в соответствии с законом дисперсии

$$(\omega - k)^2 = \frac{k^2}{k^2 + k_{\perp}^2}. \quad (4)$$

Как было выяснено в работе [1], эволюция медленно меняющихся амплитуд быстрой и медленной ВПЗ $A_{\beta, \text{м}}$ подчиняется системе связанных нелинейных уравнений Шредингера

$$i \left(\frac{\partial A_{\beta}}{\partial T} + v_{\beta} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial X} \right) + \frac{\omega_{\beta}''}{2} \frac{\partial^2 A_{\beta}}{\partial X^2} + (q_{\beta} |A_{\beta}|^2 + \lambda_{\beta} |A_{\text{м}}|^2) A_{\beta} = 0, \quad (5)$$

$$i \left(\frac{\partial A_{\text{м}}}{\partial T} + v_{\text{м}} \frac{\partial A_{\text{м}}}{\partial X} \right) + \frac{\omega_{\text{м}}''}{2} \frac{\partial^2 A_{\text{м}}}{\partial X^2} + (q_{\text{м}} |A_{\text{м}}|^2 + \lambda_{\text{м}} |A_{\beta}|^2) A_{\text{м}} = 0.$$

В уравнениях (5) $v_j = \partial \omega_j / \partial k$ - групповая скорость соответствующей ВПЗ ($j = \beta, \text{м}$), $\omega_j'' = \partial^2 \omega_j / \partial k^2$, T и X - «медленные» время и координата, а коэффициенты q_j и λ_j являются сложными функциями частоты и волнового числа, явный вид которых приведен в [1]. При этом ω и k связаны дисперсионным соотношением (4).

Система (5) имеет пространственно-однородное решение

$$A_j = A_{0j} \exp i(q_j A_{0j}^2 + \lambda_j A_{0k}^2)T, \quad (6)$$

где A_{0j} - вещественные постоянные величины, $k \neq j$. Линеаризуем (5) на фоне решения (6) и исследуем вопрос об устойчивости малых возмущений,

изменяющихся пропорционально $\exp(\sigma T + i\chi X)$. Если пренебречь различием групповых скоростей, то можно получить следующее выражение для инкремента неустойчивости σ [2]:

$$\sigma_{\pm}^2 = \frac{\chi^2}{2} \left(2\Delta_{\pm} - \frac{(\omega_6'')^2 + (\omega_M'')^2}{4} \chi^2 \right), \quad (7)$$

где

$$2\Delta_{\pm} = q_6 \omega_6'' A_{06}^2 + q_M \omega_M'' A_{0M}^2 \pm \pm \left[(q_6 \omega_6'' A_{06}^2 - q_M \omega_M'' A_{0M}^2 - \frac{(\omega_6'')^2 - (\omega_M'')^2}{4} \chi^2)^2 + 4\lambda_6 \lambda_M \omega_6'' \omega_M'' A_{06}^2 A_{0M}^2 \right]^{1/2}.$$

Нетрудно показать, что модуляционная неустойчивость имеет место при выполнении неравенства

$$|\lambda_6 \lambda_M| > |q_6 q_M|$$

даже в том случае, когда каждая из волн в отдельности устойчива ($\omega_j'' q_j < 0, j=6, M$), причем даже если амплитуда одной из волн значительно меньше другой [2]. Анализ коэффициентов q_j, λ_j показывает, что это условие выполняется практически во всем частотном диапазоне [1].

Влияние расстройки групповых скоростей, которая, как следует из (4), существенна в низкочастотной области, можно оценить, положив $\omega_6'' = \omega_M'' = \omega_0''$, $q_6 = q_M = q$, $\lambda_6 = \lambda_M = \lambda$, $A_{06} = A_{0M} = A_0$. Тогда можно показать, что неустойчивость сохраняется, если

$$\delta^2 < (\lambda + q) \omega_0'' A_0^2,$$

где $\delta = (v_{g6} - v_{gM})/2$. Таким образом, расстройка может подавить модуляционную неустойчивость, если амплитуда несущей волны достаточно мала.

2. Численный эксперимент

Для выяснения, насколько адекватно изложенная в предыдущем разделе теория описывает модуляционную неустойчивость, необходимо прибегнуть к численному интегрированию исходных уравнений. Исследуем процесс распространения амплитудно-модулированного сигнала, для чего предположим, что на входе в пространство дрейфа имеет место скоростная модуляция следующего вида:

$$v(x=0) = 1 + v_1(1 + m \sin(\omega_m t)) \sin(\omega_0 t), \quad (8)$$

а модуляция по плотности отсутствует

$$\rho(x=0) = 1. \quad (9)$$

Для решения уравнений (1)-(3) с граничными условиями (8), (9) в данной работе используется хорошо известная схема с разностями против потоков [3]. Погрешность аппроксимации этой схемы носит диссипативный характер (и может быть минимизирована соответствующим выбором шагов по времени и координате), тогда как нас интересуют явления, связанные с нелинейными и дисперсионными эффектами.

Оценим значения безразмерных параметров моделирования. Для сверхвысокочастотных приборов клистронного типа, в которых используются дрейфующие электронные потоки, характерны значения $v_0 \sim 10^7$ м/с и $\omega_p \sim 10^9$ рад/с,

а частота сигнала на порядок превосходит плазменную частоту, то есть $\omega_0 \sim 10$. Полагая, что характерный поперечный размер потока $d \sim 1$ мм, получаем, что $k_{\perp} \sim v_0/\omega_p d \sim 10$.

Вначале исследуем распространение немодулированного сигнала ($m=0$). На рис. 1 приведена зависимость первой гармоники сгруппированного тока от координаты. Для сравнения на этом же рисунке приведена аналогичная зависимость, рассчитанная по известной формуле приближенной нелинейной теории [4]

$$a_1 = 2J_1(B), \quad (10)$$

где J_1 - функция Бесселя первого порядка, $B = \alpha \sin x_q$, $x_q = \Gamma^{1/2} x$, $\alpha = v_1 \omega_0 \Gamma^{-1/2}$, $\Gamma = \omega_0^2 / (\omega_0^2 + k_{\perp}^2)$ - коэффициент депрессии сил пространственного заряда. Сопоставление этих кривых показывает, что теория удовлетворительно согласуется с численными результатами на расстояниях порядка $\lambda_q/2$, где $\lambda_q = 2\pi/\Gamma^{1/2}$ - редуцированная плазменная длина волны. Заметим, что максимальное значение a_1 получается немного ниже теоретического, что можно объяснить диссипативным характером используемой разностной схемы [3].

Как известно, для того, чтобы не наступал обгон, делающий неприменимыми исходные уравнения, должно выполняться неравенство $\alpha < 1$ [4]. При параметрах, которым соответствует рис. 1, $\alpha = 2^{-1/2}$ и гидродинамическое приближение остается справедливым, хотя нелинейность можно считать достаточно сильной в том смысле, что сгруппированный ток богат гармониками. Следует, однако, заметить, что условие $\alpha < 1$ эффективно гарантирует отсутствие обгона лишь на расстояниях, не превышающих $\lambda_q/2$. В дальнейшем обгон может наступить и при $\alpha < 1$, что подтверждается и результатами расчетов по дисковой модели электронного потока [5]. Поэтому большинство численных экспериментов проводилось при α не слишком близких к единице.

Динамику спектральных компонент с частотами $\omega_0 \pm \omega_m$ - спутников - при распространении модулированных сигналов с различными частотами модуляции иллюстрирует рис. 2. На расстоянии порядка $\lambda_q/2$ ход этих кривых достаточно хорошо описывается формулой (10) при подстановке соответствующих значений параметров α и $\Gamma^{1/2}$. Однако затем начинается рост спутников, который носит осциллирующий характер, что объясняется, очевидно, биениями быстрой и медленной ВПЗ. Существенное увеличение амплитуд спутников a_{\pm} наблюдается при длине пространства дрейфа порядка $2\lambda_q$. Заметим, что при этих параметрах каждая из ВПЗ сама по себе устойчива ($k_{\sigma, m} < 2.2k_{\perp}$), и, не учитывая нелинейное взаимодействие быстрой и медленной волн, нельзя объяснить факт неустойчивости (см. [1]).

При малых ω_m/ω_0 (см. рис. 2, а - в) одновременно нарастают оба спутника. Однако при достаточно больших ω_m/ω_0 (см. рис. 2, г, д) наблюдается рост только нижнего спутника a_- . Этот факт можно объяснить тем, что нарастание обусловлено уже не модуляционной неустойчивостью, а параметрическим взаимодействием [6].

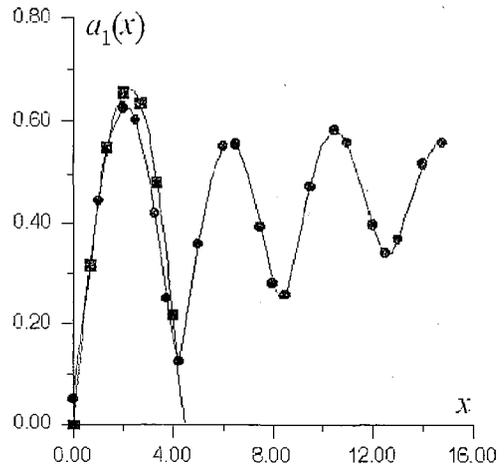


Рис. 1. Зависимость амплитуды первой гармоники сгруппированного тока от координаты при $v_1 = 0.05$, $\omega_0 = 10.0$, $k_{\perp} = 10.0$: ● - результаты численного моделирования; ■ - результаты расчета по формуле (10)

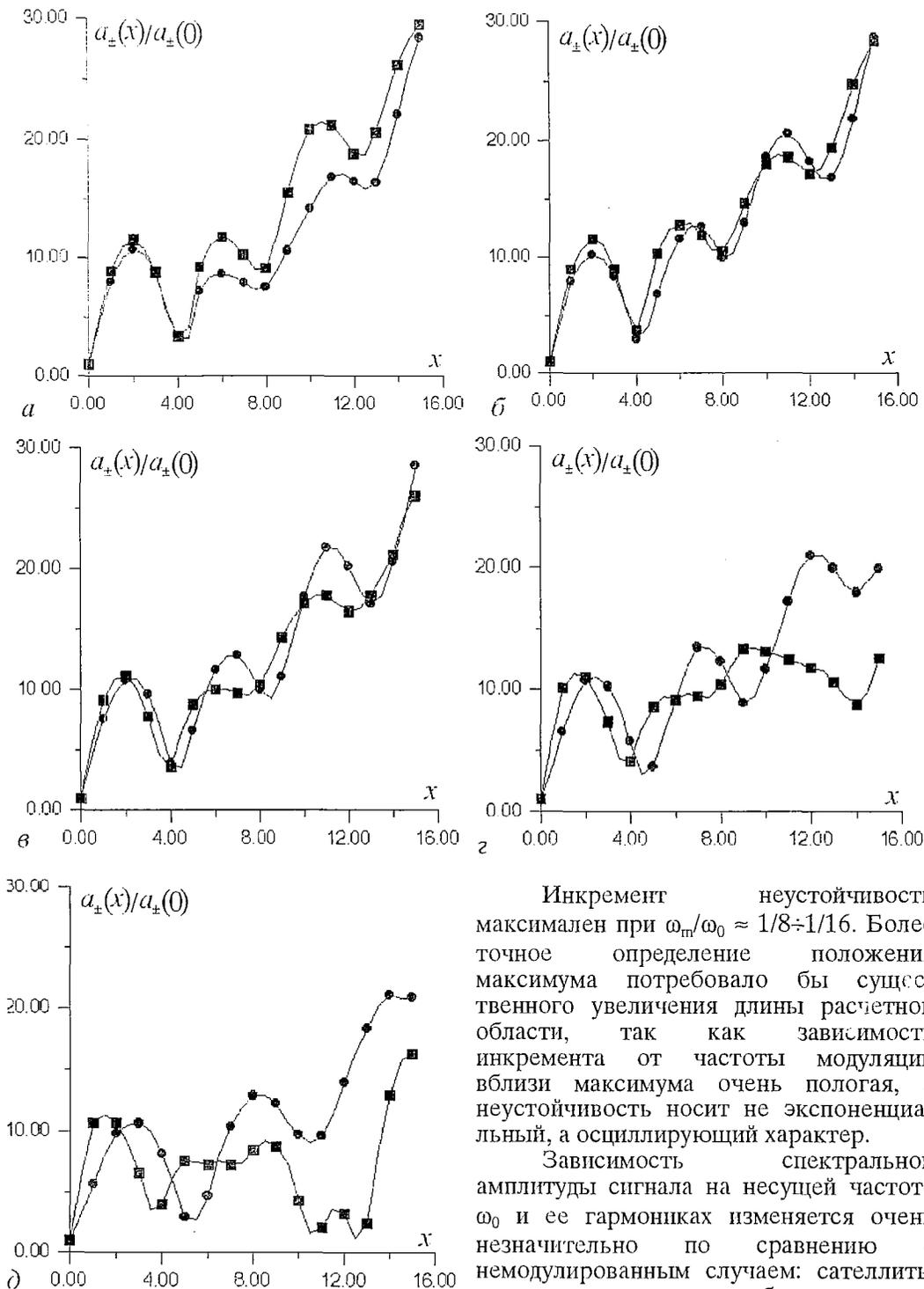


Рис. 2. Зависимости амплитуд спутников от координаты при $\nu_1=0.05$, $\omega_0=10.0$, $k_{\perp}=10.0$, $m=0.1$ и ω_m/ω_0 , равном: $1/32$ (а), $1/16$ (б), $1/8$ (в), $1/4$ (г), $3/8$ (д): \bullet - нижний спутник ($\omega_0 - \omega_m$); \blacksquare - верхний спутник ($\omega_0 + \omega_m$)

Инкремент неустойчивости максимален при $\omega_m/\omega_0 \approx 1/8 \div 1/16$. Более точное определение положения максимума потребовало бы существенного увеличения длины расчетной области, так как зависимость инкремента от частоты модуляции вблизи максимума очень пологая, а неустойчивость носит не экспоненциальный, а осциллирующий характер.

Зависимость спектральной амплитуды сигнала на несущей частоте ω_0 и ее гармониках изменяется очень незначительно по сравнению с немодулированным случаем: спутники еще слишком малы, чтобы «вытянуть» из несущей волны достаточное количество энергии.

На рис. 3 приведены зависимости $a_{\pm}(x)/a_{\pm}(0)$ при различных значениях глубины модуляции m . Значение $a_{\pm}(x)/a_{\pm}(0)$ в первом максимуме $x_1 \approx \lambda_q/4$

можно оценить при $m \rightarrow 0$, разлагая в формуле (10) $J_1(B)$ в ряд по степеням B и ограничиваясь первым членом разложения: $a_-(x_1)/a_-(0) \approx B(x_1)/a_-(0) = (\omega_0 - \omega_m)/\Gamma^{1/2} \approx 13.3$. С ростом m эта величина уменьшается, так как начинает сказываться влияние следующих членов разложения, что и показывает рис. 3. Видно также, что инкремент неустойчивости увеличивается, хотя и незначительно, с ростом глубины модуляции. В область больших m продвигаться не удается из-за того, что начинается обгон.

Из соотношения (7) следует, что инкремент модуляционной неустойчивости должен увеличиваться с ростом амплитуды несущей волны. Это подтверждает рис. 4, а, где приведены зависимости $a_-(x)/a_-(0)$ при различных v_1 . Поскольку при изменении v_1 меняется и зависимость $a_1(x)$, целесообразно также представить данные этого численного эксперимента в виде зависимостей $a_-(x)/a_1(x)$ (рис. 4, б). Видно, что и в этом случае инкремент растет.

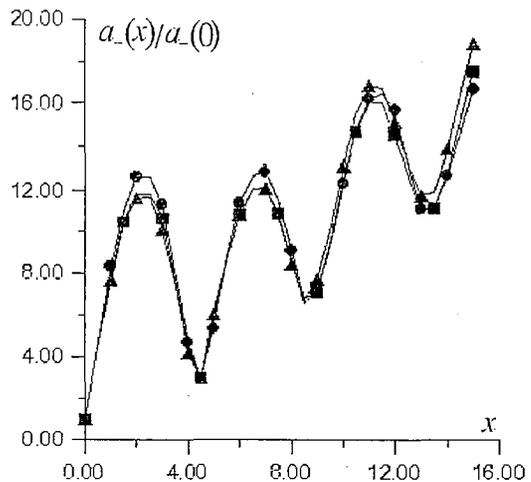


Рис. 3. Зависимость амплитуды нижнего сателлита от координаты для различных значений глубины модуляции при $v_1=0.04$, $\omega_0=10.0$, $k_1=10.0$, $\omega_m/\omega_0=1/8$: ● - $m=0.1$; ■ - $m=0.3$; ▲ - $m=0.5$

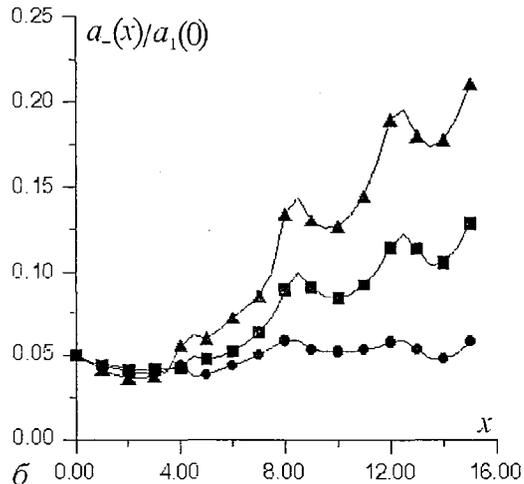
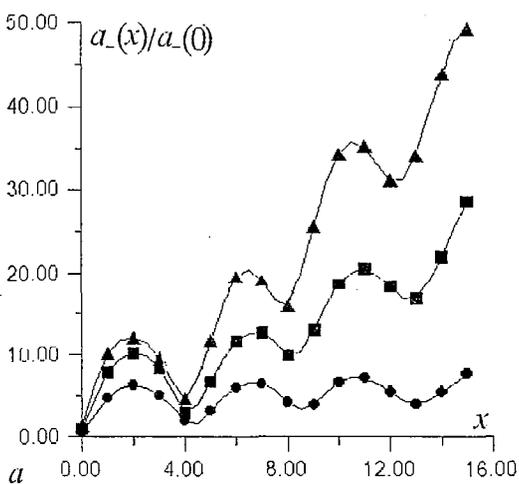


Рис. 4. Зависимости $a_-(x)/a_-(0)$ (а) и $a_-(x)/a_1(x)$ (б) при различных значениях амплитуды несущей: ● - $v_1=0.03$; ■ - $v_1=0.05$; ▲ - $v_1=0.07$

На рис. 5 приведены результаты исследования зависимости инкремента неустойчивости от несущей частоты ω_0 . Очевидно, что частоту нельзя изменять независимо в широких пределах, так как при этом будет нарушаться условие $\alpha < 1$. Поэтому в данной серии вычислительных экспериментов изменялись одновременно ω_0 и v_1 так, чтобы значение α оставалось постоянным, поскольку этот параметр определяет максимальное значение a_1 , что важно на практике.

Из рис. 5 видно, что с увеличением частоты инкремент падает. Это можно объяснить тем, что по мере продвижения в высокочастотную область $\omega'' \rightarrow 0$. Таким образом, согласно формуле (7) $\sigma \rightarrow 0$, несмотря на то, что коэффициенты q и

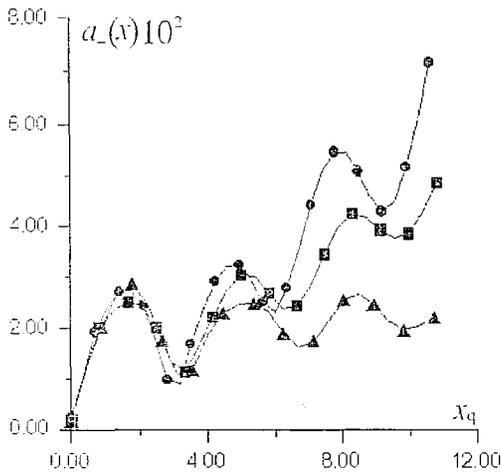


Рис. 5. Зависимость амплитуды нижнего спутника от координаты $x_q = \Gamma^{1/2}x$ при различных значениях несущей частоты: \circ - $v_1 = 0.05$, $\omega_0 = 20.0$; \square - $v_1 = 0.039$, $\omega_0 = 15.0$; \triangle - $v_1 = 0.032$, $\omega_0 = 20.0$

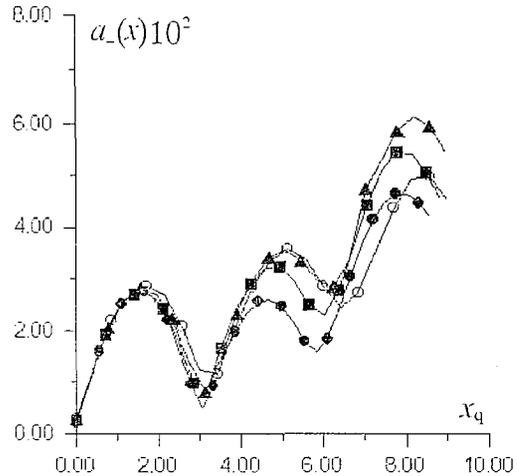


Рис. 6. Зависимость амплитуды нижнего спутника от координат $x_q = \Gamma^{1/2}x$ при различных значениях k_{\perp} : \circ - $v_1 = 0.039$, $k_{\perp} = 15.0$; \square - $v_1 = 0.05$, $k_{\perp} = 10.0$; \triangle - $v_1 = 0.055$, $k_{\perp} = 8.0$; \diamond - $v_1 = 0.061$, $k_{\perp} = 6.0$

λ растут (см. [1]). Существенно продвинуться в область более низких частот при данном x не удастся из-за начала обгона в точке $x \approx 3\lambda_q/4$.

Зависимости $a_-(x_q)$ при различных k_{\perp} приведены на рис. 6. Вновь, по тем же соображениям, одновременно изменялось и значение v_1 , чтобы x оставалось постоянным. Максимальный инкремент неустойчивости при данных параметрах имеет место при $k_{\perp} \approx 8.0$. Падение инкремента при уменьшении k_{\perp} , как и в предыдущем случае, можно объяснить тем, что пропадает дисперсия групповой скорости ($\omega'' \rightarrow 0$). В то же время, при увеличении k_{\perp} начинает сказываться расстройка групповых скоростей δ , что также приводит к уменьшению инкремента.

3. Выводы

Практическая необходимость исследования модуляционной неустойчивости ВПЗ обусловлена тем, что она представляет собой механизм усиления паразитных сигналов (или шумов) вблизи полезного сигнала и может оказаться существенной в приборах клистронного типа, где используются протяженные электронные потоки. Действительно, этот процесс, при котором возмущения с близкими частотами (спутники) нарастают в пространстве, черпая энергию из несущей волны, достаточно типичен для нелинейных волновых систем самой различной природы (см., например, [7]) и вполне естественно ожидать, что он характерен и для волн в электронных потоках.

Результаты численных экспериментов, представленные в данной работе, достаточно убедительно свидетельствуют о модуляционной неустойчивости ВПЗ и позволяют в основном подтвердить справедливость теоретических представлений, развитых в [1]. Разумеется, если речь идет о реальных приборах, то ввиду сильной нелинейности протекающих в них процессов теория может служить лишь для качественных оценок, как влияет тот или иной фактор на неустойчивость.

Также важные характеристики, как зависимость гармоник сгруппированного тока от расстояния, начало обгона и т.п., согласуются с известными теоретическими и экспериментальными результатами. Наблюдается также

параметрическая неустойчивость. Все это позволяет говорить о достаточной достоверности представленных данных.

Вместе с тем, численное моделирование позволяет дать ответ на некоторые вопросы, на которые слабонелинейная теория ответить не в силах (например, зависимость инкремента от глубины модуляции), а также выявить области параметров, наиболее «опасные» с этой точки зрения. На наш взгляд, представляется интересным рассмотреть также процесс распространения сигнала, модулированного большим количеством близко расположенных сателлитов со случайными фазами, что поможет оценить влияние модуляционной неустойчивости на динамику шумов.

Библиографический список

1. Рыскин Н.М. Модуляционная неустойчивость волн пространственного заряда // Изв. вузов. Сер. Прикладная нелинейная динамика. 1994. Т. 2, № 5. С.93.
2. McKinstrie C.J., Bingham R. The modulational instability of coupled waves // Phys. Fluids B. 1989. Vol.1, № 1. P.230.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.:Мир, 1976.
4. Вайнштейн Л.А., Солицев В.А. Лекции по электронике сверхвысоких частот. М.:Сов.радио, 1973.
5. Канавец В.И., Лопухин В.М., Сандалов А.Н. Нелинейные процессы в мощных многорезонаторных клистронах и оптимизация их параметров // Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров). Кн.7. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1974.
6. Лоиселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. М.: Иностранная литература, 1963.

Научно-исследовательский институт
механики и физики Саратовского
государственного университета

Поступила в редакцию 27.02.95 г.
после переработки 15.03. 95 г.

MODULATIONAL INSTABILITY OF SPACE-CHARGE WAVES: NUMERICAL SIMULATION

N.M.Ryskin

Modulational instability of space-charge waves in a fluid model of an electron beam is studied numerically. The effect of amplitude and frequency of a fundamental signal, depth and frequency of modulation on the growth rate is investigated. The results of simulations are in a good agreement with the approximate theory developed by the author in [1].



Рыскин Никита Михайлович - родился в 1966 году в Саратове. Окончил физический факультет Саратовского университета в 1991 году. Работает в НИИ механики и физики СГУ. Область научных интересов - пеленговые волновые явления в распределенных системах, содержащих электронные потоки и электромагнитные поля.