

Вырожденные случаи в дискретных динамических системах Лотки-Вольтерры

Р. Н. Ганиходжаев¹, Д. Б. Эшмаматова^{2,3}✉, У. Р. Муминов⁴, С. И. Машарипов¹,

¹Национальный Университет Узбекистана

²Ташкентский Государственный Транспортный Университет

³Институт математики имени В.И. Романовского АНРУз

⁴Ферганский Государственный Университет

E-mail: ✉24dil@mail.ru,

Поступила в редакцию 15.07.2023, принята к публикации 14.09.2024,
опубликована онлайн 07.12.2024

Аннотация. Цель работы – исследование асимптотического поведения траекторий внутренних точек дискретных динамических систем Лотки-Вольтерры с вырожденными кососимметрическими матрицами, действующих в двумерном и трехмерном симплексах. Оказалось, что в ряде прикладных задач возникают отображения Лотки-Вольтерры именно такого типа, и точки симплекса в этом случае рассматриваются как состояния исследуемой системы. При этом отображение, сохраняющее симплекс, определяет дискретный закон эволюции данной системы. Для произвольной начальной точки мы можем построить последовательность – орбиту, определяющую ее эволюцию. И если в этом случае отображение является автоморфизмом, мы можем определить как положительную, так и отрицательную орбиту для рассматриваемой точки. При этом особый интерес вызывают предельные множества положительных и отрицательных орбит. **Методы.** Известно, что для отображений Лотки-Вольтерры можно определить предельные множества, которые в случае невырожденных отображений состоят из единственной точки. В настоящей работе мы определяем эти множества для вырожденных отображений Лотки – Вольтерры с помощью построения функции Ляпунова и применяя анализ спектра якобиана. Отметим, что эти множества позволяют описать динамику рассматриваемых систем. **Результаты.** Учитывая, что рассматриваемые в статье отображения являются автоморфизмами, для них с помощью функций Ляпунова и анализа спектра якобиана построены множества предельных точек как положительной, так и отрицательной траекторий и доказано, что в вырожденном случае эти множества являются бесконечными. Также в работе показано, что вырожденным отображениям можно поставить в соответствие частично-ориентированные графы, с помощью которых можем наглядно увидеть фазовый портрет траекторий внутренних точек. **Заключение.** Вырожденные случаи отображений Лотки-Вольтерры до нас другими авторами рассмотрены не были. Эти отображения интересны тем, что их можно рассматривать как дискретные модели эпидемиологических ситуаций, в частности, для исследования течения вирусных инфекций, передающихся воздушно-капельным путем. Результаты, полученные в работе, дают подробное описание динамики траекторий отображений Лотки-Вольтерры с вырожденными матрицами. Кроме того, для рассматриваемых систем в целях наглядного представления динамики эпидемиологических ситуаций были построены частично-ориентированные графы.

Ключевые слова: Отображение Лотки-Вольтерры, орбита, функция Ляпунова.

Благодарности. Д.Б.Эшмаматова, У.Р.Муминов и С.И.Машарипов выражают благодарность своему научному руководителю, профессору Р.Н.Ганиходжаеву за идею и постановку рассмотренной задачи.

Для цитирования: Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б., Муминов У.Р., Машарипов С.И. Вырожденные случаи в дискретных динамических системах Лотки-Вольтерры // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003153. EDN: JIIRXF Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Degenerate cases in discrete Lotka – Volterra dynamical systems

R. N. Ganikhodzhaev¹, D. B. Eshmamatova^{2,3}✉, U. R. Muminov⁴, S. I. Masharipov¹

¹National University of Uzbekistan

²Tashkent State Transport University, Uzbekistan

³V.I.Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan

⁴Fergana State University

E-mail: ✉24dil@mail.ru,

Received 15.07.2023, accepted 14.09.2024, available online 07.12.2024

Abstract. The purpose of the work is to study the asymptotic behavior of trajectories of interior points of discrete Lotka – Volterra dynamical systems with degenerate skew-symmetric matrices operating in two-dimensional and three-dimensional simplexes. It turned out that in a number of applied problems, the Lotka – Volterra mappings of this type arise and the simplex points in this case are considered as the state of the system under study. In this case, the mapping preserving the simplex determines the discrete law of evolution of this system. For an arbitrary starting point, we can construct a sequence – an orbit that determines its evolution. And if in this case the mapping in question is an automorphism, we can define both a positive and a negative orbit for the point in question. At the same time, the limiting sets of positive and negative orbits are of particular interest.

Methods. It is known that for Lotka – Volterra mappings it is possible to define limit sets, which in the case of non-degenerate mappings consist of a single point. In this paper, we define these sets for degenerate Lotka–Volterra mappings by constructing the Lyapunov function and applying Jacobian spectrum analysis. It should be noted that these sets allow us to describe the dynamics of the systems under consideration.

Results. Taking into account that the considered mappings are automorphisms, using the Lyapunov functions and applying the analysis of the Jacobian spectrum, sets of limit points of both positive and negative trajectories are constructed and it is proved that in the degenerate case they are infinite. It is also shown that partially oriented graphs can be constructed for degenerate mappings.

Conclusion. Degenerate cases of Lotka – Volterra mappings have not been considered by other authors before us. These mappings are interesting because they can be considered as discrete models of epidemiological situations, in particular, for studying the course of airborne viral infections. The results obtained in this work provide a detailed description of the dynamics of the trajectories of Lotka – Volterra mappings with degenerate matrices. In addition, partially oriented graphs were constructed for the systems under consideration in order to visually represent the dynamics of epidemiological situations.

Keywords: Lotka–Volterra mapping, orbit, Lyapunov function.

Acknowledgements. D.B.Eshmamatova, U.R.Muminov and S.I.Masharipov express their gratitude to their scientific supervisor, Professor R.N.Ganikhodzhaev for the idea and formulation of the considered problem.

For citation: Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B., Muminov U.R., Masharipov S.I Degenerate cases in discrete Lotka – Volterra dynamical systems. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(2):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003153

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

Введение

Многие практические вопросы сводятся к описанию различных структур и процессов нелинейной динамики, их эволюции во времени и пространстве, а также процессов, в которые вовлечены сложные структуры ([1]- [4]). Все это сводится к изучению динамических свойств квадратичных отображений. Если обратимся к квадратичным стохастическим операторам, то их исследования начались с работы Бернштейна ([5]), и по сей день их теория развивается в связи с ее многочисленными приложениями в математике, биологии, физике, популяционной генетике, эпидемиологии, экологии, а также экономике ([3], [4], [6]- [12]).

Для исследования динамических свойств любой системы достаточно знать ее состояние в заданные дискретные моменты времени. Как правило, в этих случаях физики и механики в качестве математической модели исследуемого процесса рассматривают непрерывные динамические системы, в частности автономные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных ([6], [10], [13]). Эта склонность также присуще биологам и эпидемиологам ([4], [8], [14], [15]), но оказалось, что для многих биологических и эпидемиологических ситуаций, а также в задачах, связанных с популяционной генетикой, предпочтительно рассматривать изменения из года в год, или же от поколения к поколению. В описании и исследовании задач подобного типа в качестве эволюционного оператора целесообразно использование функции, выражающей состояние системы в некоторый момент времени через ее состояние в предыдущий момент.

Начнем работу с изложения необходимых сведений. Как известно [16], в ряде прикладных задач точки симплекса

$$S^{m-1} = \{x = (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^m x_i = 1, x_i \geq 0\} \subset \mathbb{R}^m$$

рассматриваются как состояние системы, состоящей из m видов ([17] – [20]). При этом отображение $f : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ определяет дискретный закон эволюции этой системы. Рассмотрев некоторую начальную точку $x^0 \in S^{m-1}$, можно построить последовательность $x^{(n+1)} = f(x^{(n)})$, определяющую эволюцию точки $x^{(0)}$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. Последовательность $\{x^{(n)}\}$ называется положительной орбитой, а $\{x^{(-n)}\}$ – отрицательной орбитой точки $x^{(0)}$. Отрицательную орбиту можно строить только лишь в случае, когда отображение $f : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$ – автоморфизм. В работе [18] в качестве такого автоморфизма было введено квадратичное стохастическое отображение, задаваемое набором чисел $\{P_{ij,k}\}$, $i, j, k = \overline{1, m}$, удовлетворяющих условиям $P_{ij,k} = P_{ji,k} \geq 0$, $\sum_{k=1}^m P_{ij,k} = 1$, и действующее по равенствам

$$x'_k = (Vx)_k = \sum_{i,j=1}^m P_{ij,k} x_i x_j, \quad k = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Очевидно [18], что условия наложенные на коэффициенты $\{P_{ij,k}\}$, обеспечивают сохранение симплекса S^{m-1} . Известно, что в математической генетике отображение (1) называется эволюционным оператором. Популяция определяется как замкнутое относительно размножения сообщество организмов. В популяции различаются последовательные поколения F_1, F_2, \dots . Предполагается, что между особями различных поколений никогда не происходит скрещиваний. Каждая особь, входящая в популяцию принадлежит некоторой (единственной) из n разновидностей (“признаков”): $1, 2, \dots, n$. Состояние популяции – это набор $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in S^{m-1}$ вероятностей разновидностей. Коэффициенты наследственности $\{P_{ij,k}\}$ – это вероятность рождения особи при надлежащей k -той разновидности при скрещивании особей из i -той и j -той разновидностей. При панмиксии родительская пара образуется в состоянии x с вероятностью $x_i x_j$. Это означает, что уравнение (1) будет полной вероятностью разновидности для непосредственных потомков. Если же в некотором поколении популяция находится в состоянии x , то в следующем поколении она находится в состоянии $x' = Vx$. Условие симметричности $P_{ij,k} = P_{ji,k}$ означает, что разновидности не связаны с полом.

Одна из основных задач математической генетики, эпидемиологии и популяционной генетики состоит в исследовании поведения траекторий:

$$x^0, Vx^0, V^2x^0, V^3x^0, \dots,$$

т.е. итераций отображения V .

Пусть $\omega(x^{(0)}) = \{x^{(n)}\}'$ – множество предельных точек положительной траектории, а $\alpha(x^{(0)}) = \{x^{(-n)}\}'$ – множество предельных точек отрицательной траектории ([16], [18]).

Определение 1. [18]. Квадратичное стохастическое отображение $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, определяемое равенствами (1), называется отображением Лотки – Вольтерры, если коэффициенты наследственности $\{P_{ij,k}\}$ удовлетворяют условию $P_{ij,k} = 0$ при $k \notin \{i, j\}$.

В работах [16], [18] было доказано, что отображение (1), удовлетворяющее условиям определения 1, можно представить в виде

$$V : x'_k = x_k \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i \right), k = \overline{1, m}, \quad (2)$$

где

$$a_{ki} = \begin{cases} 2P_{ik,k} - 1, & i \neq k, \\ 0, & i = k. \end{cases}$$

Здесь $A = (a_{ki})$ – вещественная кососимметрическая матрица, для которой $A = -A^T$, где A^T – транспонированная матрица к матрице A , и $a_{ki} = -a_{ik}$, $|a_{ki}| \leq 1$, $k, i = \overline{1, m}$.

Как было отмечено выше, актуальная проблема в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. В работе [21] утверждается, что эта проблема была полностью решена для вольтерровских квадратичных стохастических операторов, определенных равенствами (2). В статьях [16], [18], [22] теория операторов такого типа была развита с использованием теории функции Ляпунова и турниров. Биологический смысл отображений Лотки – Вольтерры с соответствующей кососимметрической матрицей, являющейся матрицей в общем положении заключается в том, что индивид повторяет генотип одного из его родителей. Оператор $V : S^{m-1} \rightarrow S^{m-1}$, представленный в виде (2), трактуется как эволюция системы с дискретным временем. Условие $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ диктуется прикладными требованиями к оператору, описанному выше.

В работе [21] описаны неподвижные точки квадратичных стохастических операторов Вольтерра для двуполой популяции, и это сведено к описанию неподвижных точек операторов вольтерровского типа. Для операторов такого вида в данной работе построены функции Ляпунова $\varphi(x, y) = \prod_{j=n+1}^{\nu} y_j$ и $\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^r (x_j + y_j)$, используя которые получены верхние границы для ω -предельного множества траекторий.

В работе [17] рассмотрена динамическая система с дискретным временем, определенная нелинейным оператором с четырьмя действительными параметрами, описывающая экосистему океана. Для этой системы найдены условия на параметры, при которых оператор сводится к квадратичному стохастическому оператору вольтерровского типа, сохраняющему двумерный симплекс. В работе показано, что при некоторых условиях на коэффициентов этот оператор может иметь или до трех, или счетное число неподвижных точек.

В работах [14], [15], [23] – [25] рассмотрены непрерывные динамические системы биологии, эпидемиологии, а также непрерывные варианты систем Лотки – Вольтерры, а работы [16], [18] – [20], [26] – [33] посвящены исследованию дискретных динамических систем Лотки – Вольтерры. Вообще говоря, динамические свойства дискретных систем Лотки – Вольтерры отличаются от соответствующих свойств непрерывных систем и часто описывают более точную картину эволюции.

Как мы уточнили выше, в работах [16], [18], [22], [28] – [31] рассматривались динамические системы вида (2) в случае, когда соответствующая кососимметрическая матрица является матрицей в общем положении. Но оказалось, что в случае, когда кососимметрическая матрица не является матрицей в общем положении, асимптотическое поведение траекторий совсем иное, так как операторы в этом случае имеют бесконечно много неподвижных точек. Именно операторы, введенные в настоящей статье, т.е. операторы Лотки – Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей возникают в задачах эпидемиологии, в качестве дискретных моделей для исследования течения заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем. В работе показано, что операторам такого типа, в отличие от невырожденных случаев, соответствуют частично-ориентированные графы. Также в работе рассмотрена функция Ляпунова вида $\varphi(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$, которая была введена в работе [16]. Доказано, что и в вырожденном случае функция Ляпунова такого вида можно применить для нахождения предельных множеств рассматриваемых отображений. Иными словами, в предлагаемой статье исследовано асимптотическое поведение орбит некоторых систем с вырожденными матрицами, при этом динамика каждой из них отличается друг от друга. Рассматриваемые в работе системы взяты из прикладных задач популяционной генетики, эпидемиологии, экологии и т.д (см. [14], [15], [19], [20]). Если сказать более точно, в работе рассмотрены вырожденные случаи дискретных динамических систем Лотки – Вольтерры, действующих в двумерном и трехмерном симплексах, так как именно эти системы можно предложить в качестве дискретных моделей для исследования течения вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём.

1. Методика

Пусть $A = (a_{ki})$ – кососимметрическая матрица $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ с условием $|a_{ki}| \leq 1$. Как уточняли выше, для любого $x \in \mathbb{R}^m$ отображение $x' = Vx$, определяемое равенствами ([16], [18])

$$x'_k = x_k \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^m a_{ki} x_i\right), \quad k = 1, \dots, m,$$

называется оператором Лотки – Вольтерры. Очевидно, при условии $|a_{ki}| \leq 1$ симплекс S^{m-1} инвариантен, т.е. $V(S^{m-1}) \subset S^{m-1}$. Известно ([16]), что на симплексе S^{m-1} оператор Лотки – Вольтерры является автоморфизмом при любых $|a_{ki}| \leq 1$ и $a_{ki} = -a_{ik}$. Так как S^{m-1} – компакт, то множество предельных точек положительной траектории $\omega(x^{(0)}) \neq \emptyset$ и множество предельных точек отрицательных траекторий $\alpha(x^{(0)}) \neq \emptyset$ для всех точек симплекса $x^{(0)} \in S^{m-1}$.

Известно [22], [27], [28] что кососимметрическая матрица называется матрицей общего положения, если все главные миноры четного порядка отличны от нуля, в противном случае она называется вырожденной кососимметрической матрицей. Асимптотическое поведение орбит в системах Лотки – Вольтерры с невырожденными матрицами изучалось в работах [16], [18], [20], [22], [26] – [33]. Также известно ([16], [18], [28]), что в случае, когда отображение Лотки – Вольтерры в общем положении, мы можем связать их с турнирами, а в вырожденных случаях их можно связать с частично-ориентированными графами [19], [20].

В работе [16] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если A – кососимметрическая матрица, тогда множества*

$$P = \{x \in S^{m-1} : Ax \geq 0\}, \quad Q = \{x \in S^{m-1} : Ax \leq 0\}$$

– непустые выпуклые многогранники.

На основе этой теоремы в работе [16] в случае общего положения отображений Лотки – Вольтерры были построены функции Ляпунова вида $\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot \dots \cdot x_m^{p_m}$, $x \in S^{m-1}$.

Оказалось, что в случае, когда кососимметрическая матрица в общем положении для соответствующего отображения Лотки – Вольтерры множества P и Q состоят из единственной точки, либо они совпадают ([16], [18]). Наша задача, в отличие от вышеупомянутых работ, – найти и построить множества P и Q для вырожденных случаев отображений Лотки – Вольтерры, а также с помощью построения функций Ляпунова найти и исследовать множества $\alpha(x^{(0)})$ и $\omega(x^{(0)})$. Мы доказываем, что множества P и Q в нашем случае бесконечны.

2. Результаты

В основной части статьи рассмотрим несколько динамических систем, обобщить которых нет возможности, так как асимптотические поведения траекторий внутренних точек в корне отличаются друг от друга. В монографиях [34], [35] введены частично-ориентированные графы при $m = 3$. А в работах [19], [20], [28] показано, что системам Лотки – Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей можно поставить в соответствие частично-ориентированные графы при $m = 3$ и $m = 4$. В работе [28] показано, что при $m = 3$ существует 16 частично-ориентированных графов, а в работе [34] показано, что при $m = 4$ существуют 42 частично-ориентированных графа. В данной статье мы показываем, что эти частично-ориентированные графы можно связать с дискретными динамическими системами Лотки – Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей. В работах [19], [20], [36] некоторые из них предлагаются в качестве дискретных компартментарных моделей SIR , $SIRD$, $SEIR$, описывающих течение вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем с рецидивным характером. В данной работе мы даем полное математическое обоснование этим дискретным динамическим системам, а также в дополнение мы включили в работу те динамические системы, которые могут претендовать на роль дискретных моделей вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем с рецидивным характером.

Рассмотрим систему Лотки – Вольтерры

$$V_1 : \begin{cases} x'_1 = x_1 \cdot (1 - ax_2 + bx_3), \\ x'_2 = x_2 \cdot (1 + ax_1), \\ x'_3 = x_3 \cdot (1 - bx_1), \end{cases} \quad (3)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$, $V_1 x = x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, $0 < a, b \leq 1$. Система (3) является простейшим примером системы Лотки – Вольтерры с вырожденной кососимметрической матрицей

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [22] приведены понятия турнира и однородности турнира, а также там показано, что в случае, когда кососимметрическая матрица, соответствующая отображению Лотки – Вольтерры, является матрицей в общем положении, тогда ей можно поставить в соответствие турнир – полный ориентированный граф. Кососимметрическая матрица, соответствующая рассматриваемому нами отображению, не является матрицей в общем положении, этой матрице мы поставим в соответствие частично-ориентированный граф,

приведенный на рисунке 1. Так как в матрице A_1 элемент $a_{23} = 0$, тогда ребро Γ_{23} , соединяющее вершины $e_2 = (0, 1, 0)$ и $e_3 = (0, 0, 1)$, не имеет направление. Это означает, что все ребро состоит из неподвижных точек с координатами $(0, \alpha, 1 - \alpha)$, где $0 < \alpha < 1$.

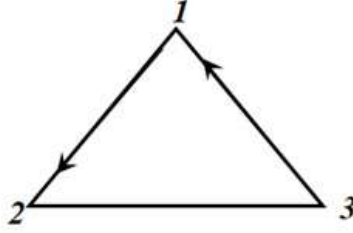


Рис. 1. Частично-ориентированный граф, соответствующий матрице A_1 .

Fig. 1. A partially-oriented graph corresponding to the matrix A_1 .

Согласно [16], любая точка $p = (p_1, p_2, p_3)$ симплекса S^2 определяет функцию

$$\varphi_p(x) = x_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \cdot x_3^{p_3}, \quad x \in S^2.$$

Известно, что φ_p непрерывна на S^2 (полагаем $0^0 = 1$), причем экстремумы этой функции $\max_{x \in S^2} \varphi_p(x) = \varphi_p(p)$, а $\min_{x \in S^2} \varphi_p(x) = 0$. Ясно, что максимум достигается в единственной точке $x = p$, а минимум достигается на границе симплекса S^2 или на её замкнутой части. Пусть теперь $c \in [0; \varphi_p(p)]$. Докажем, что множество $\{x \in S^2 : \varphi_p(x) \geq c\}$ выпукло.

Действительно, если $x, y \in S^2$, причем $\varphi_p(x) \geq c$ и $\varphi_p(y) \geq c$, тогда

$$\varphi_p\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x_1+y_1}{2}\right)^{p_1} \cdot \left(\frac{x_2+y_2}{2}\right)^{p_2} \cdot \left(\frac{x_3+y_3}{2}\right)^{p_3} \geq (\sqrt{x_1 \cdot y_1})^{p_1} \cdot (\sqrt{x_2 \cdot y_2})^{p_2} \cdot (\sqrt{x_3 \cdot y_3})^{p_3} \geq c$$

Возвращаясь к системе (1), получаем

$$\begin{cases} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 - ax_2^{(n)} + bx_3^{(n)}), \\ x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} \cdot (1 + ax_1^{(n)}), \\ x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} \cdot (1 - bx_1^{(n)}) \end{cases}$$

для любого $n \in \mathbb{Z}$ и начальной точки $x^{(0)} \in S^2$.

Так как последовательности $\{x_2^{(n)}\}$ и $\{x_3^{(n)}\}$ монотонны, любая траектория сходится к неподвижной точке отображения V_1 , т.е. как положительная, так и отрицательная траектории сходятся.

В силу непрерывности отображения V_1 для любого $x^{(0)} \in S^2$ получаем, что $\alpha(x^{(0)})$ и $\omega(x^{(0)})$ суть неподвижные точки для отображения V_1 .

Заметим, что решением неравенства $A_1x \geq 0$ на симплексе S^2 является отрезок с концами $(0, \frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$ и $(0, 0, 1)$, т.е.

$$P = \{x \in S^2 : A_1x \geq 0\} = \left\{ \left(0; \frac{\lambda b}{a+b}; \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \right); \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}. \quad (4)$$

Для произвольного $p = \left(0, \frac{\lambda b}{a+b}, \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \right) \in P$ рассмотрим функцию на S^2

$$\varphi_p(x) = x_2^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}}. \quad (5)$$

Используя неравенство Юнга ([16], [18]), получаем

$$\begin{aligned}\varphi_p(V_1x) &= (x_2(1+ax_1))^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot (x_3(1-bx_1))^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} = x_2^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} \cdot (1+ax_1)^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot (1-bx_1)^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} = \\ &= \varphi_p(x) \cdot (1+ax_1)^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot (1-bx_1)^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}} \leq \varphi_p(x) \cdot \left(\frac{\lambda b}{a+b}(1+ax_1) + \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \cdot (1-bx_1) \right) = \\ &= \varphi_p(x) \cdot (1 - (1-\lambda) \cdot bx_1).\end{aligned}\quad (6)$$

Итак, если $0 \leq \lambda < 1$, то $\varphi_p(Vx) < \varphi_p(x)$ для всех внутренних точек S^2 . Так как функция $\varphi_p(x)$, описанная равенством (3), достигает максимума только лишь в точке $p \in P$, для любой внутренней начальной точки из симплекса S^2 имеем $\omega(x) \cap P \neq \emptyset$ и $\alpha(x) \subset P$. Поскольку $\omega(x)$ – неподвижная точка для V_1 и $\omega(x) \cap P = \emptyset$, то, начиная с некоторого n_0 , имеем $bx_3^{(n)} - ax_2^{(n)} \leq k < 0$ для всех $n \geq n_0$. Поэтому

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 + bx_3^{(n)} - ax_2^{(n)}) \leq x_1^{(n_0)} \cdot (1+k)^{n-n_0}$$

при $n \geq n_0$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_1^{(n)}$ сходится быстрее геометрической прогрессии, так как $-1 < k < 0$. В этом случае согласно [16], [19] имеем

$$x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} (1 - ax_1^{(n)}) = x_3^{(0)} \cdot (1 - ax_1^{(n)}) \cdot (1 - ax_1^{(n-1)}) \cdots (1 - ax_1^{(0)}),$$

поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} > 0$.

Наряду с множеством $P \subset S^2$, описанным в (2), рассмотрим множество

$$Q = \{x \in S^2 : A_1x \leq 0\} = \left\{ \left(0, \frac{b+\lambda a}{a+b}, \frac{(1-\lambda)a}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}.\quad (7)$$

Выбрав произвольную точку $q = \left(0, \frac{b+\lambda a}{a+b}, \frac{(1-\lambda)a}{a+b} \right) \in Q$, построим функцию

$$\varphi_q(x) = x_2^{\frac{b+\lambda a}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{(1-\lambda)a}{a+b}}.$$

Очевидно,

$$\varphi_q(x) = \varphi_q(V_1(V_1^{-1}x)) = \varphi_q(V_1^{-1}x) \cdot (1 + ax_1^{(-1)})^{\frac{b+\lambda a}{a+b}} \cdot (1 - bx_1^{(-1)})^{\frac{(1-\lambda)a}{a+b}}.$$

Вычислив производную функции $(1 + ax_1^{(-1)})^{\frac{b+\lambda a}{a+b}} \cdot (1 - bx_1^{(-1)})^{\frac{(1-\lambda)a}{a+b}}$ по $x_1^{(-1)}$ в точке $x_1^{(-1)} = 0$, получаем $1 + a\lambda$, т.е.

$$\varphi_q(x) = \varphi_q(V_1^{-1}x) \cdot (1 + a\lambda x_1^{(-1)} + o(x_1^{(-1)})).$$

Следовательно, в достаточно малой окрестности нуля верно неравенство $\varphi_q(V_1^{-1}x) < \varphi_q(x)$, так как, $x_1^{(-1)} > 0$, $a > 0$ и $0 < \lambda \leq 1$. Таким образом приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Траектория любой внутренней точки $x \in S^2$ начинается во множестве P и заканчивается во множестве Q , т.е. $\alpha(x) \subset P$ и $\omega(x) \subset Q$.

Замечание 1. Согласно теореме Гробмана-Хартмана [37], любая траектория содержится в инвариантной кривой.

Итак, в рассматриваемом случае имеем картину векторного поля, изображенного на рисунке 2.

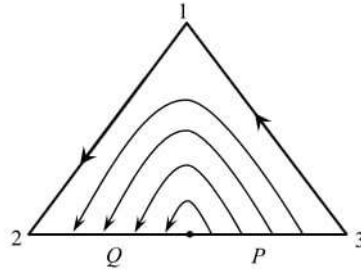


Рис. 2. Векторное поле, согласно теореме 2.

Fig. 2. Vector field, according to Theorem 2.

Перейдем к рассмотрению кососимметрической матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & -b \\ a & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix},$$

определяющей систему Лотки – Вольтерры вида

$$V_2 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 - bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 - cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 + cx_2 + dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 - dx_3), \end{cases} \quad (8)$$

которая задается отображением $V_2 : S^3 \rightarrow S^3$ при условии $0 < a, b, c, d \leq 1$. При этих ограничениях V_2 является автоморфизмом [16]. Очевидно, матрица A_2 определяет частично-ориентированный граф (см. рис. 3). Так как некоторые элементы матрицы A_2 , соответствующей системе (8), равны нулю, т.е. $a_{13} = 0$ и $a_{24} = 0$, ребра Γ_{13} и Γ_{24} не ориентированы. Поэтому для наглядности мы в рисунке 3 убрали эти ребра, оставив только ориентированные.

Пусть Γ_{123} – грань симплекса S^3 , натянутая на вершины $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, и $e_3 = (0, 0, 1, 0)$. Заметим, что любая грань симплекса также является симплексом ([18], [22]), причем она инвариантна относительно отображения V_2 , и сужение V_2 на эту грань также является отображением Лотки – Вольтерры. Следовательно, на гранях Γ_{123} и Γ_{134} динамика траекторий описывается предыдущим отображением V_1 , а на остальных двух гранях поведение траекторий тривиально.

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ – произвольная начальная точка, причем $x_1^0 \cdot x_2^0 \cdot x_3^0 \cdot x_4^0 > 0$. Тогда как положительная, так и отрицательная траектории, начинающиеся из нее, целиком лежат внутри симплекса S^3 . Рассмотрим последовательность $\{x_3^{(n)}\}$. Так как

$$x_3^{(n+1)} = x_3^{(n)} \cdot (1 + cx_2^{(n)} + dx_4^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N},$$

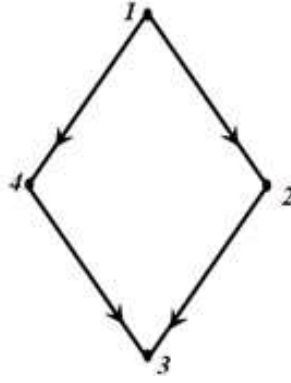


Рис. 3. Частично-ориентированный граф, соответствующий матрице A_2 .

Fig. 3. The partially-oriented graph corresponding to the matrix A_2 .

тогда $\{x_3^{(n)}\}$ – возрастающая и ограниченная последовательность. Ясно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} > 0$.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_4^{(n)} = 0$, поэтому $\omega(x^0) \in \Gamma_{13}$.

Аналогично, отрицательная последовательность $\{x_1^{(n)}\}$, где $-n \in \mathbb{N}$, возрастает и ограничена. Тогда из равенства

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 - ax_2^{(n)} - bx_4^{(n)}), \quad -n \in \mathbb{N}$$

получим, что $\alpha(x^0) \in \Gamma_{13}$. Поскольку $\{x_2^{(n)}\}$ и $\{x_4^{(n)}\}$ при $n \rightarrow \pm\infty$ сходятся к нулю, а $\{x_1^{(n)}\}$ и $\{x_3^{(n)}\}$ монотонны, любая траектория сходится, и её предел принадлежит грани Γ_{13} , которая состоит из неподвижных точек отображения V_2 .

Пусть $x = (x_1, 0, x_3, 0) \in \Gamma_{13}$. Вычисляя якобиан в этой точке, получаем

$$J_{V_2}(x) = (1 - \lambda)^2 \cdot (1 + ax_1 - cx_3 - \lambda) \cdot (1 + bx_1 - dx_3 - \lambda).$$

Следовательно, корни уравнения $J_{V_2}(x) = 0$ вещественны и

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 1 + ax_1 - cx_3, \quad \lambda_4 = 1 + bx_1 - dx_3.$$

Ясно, что $\lambda_1 = 1$, и это указывает, что x – неподвижная точка; $\lambda_2 = 1$ означает, что грань Γ_{13} состоит из неподвижных точек. Учитывая, что $x_1 + x_3 = 1$, получаем $\lambda_3 > 1$, если $x_1 > \frac{c}{a+c}$ и $\lambda_4 > 1$, если $x_1 > \frac{d}{b+d}$. Без ограничения общности положим $\frac{c}{a+c} \geq \frac{d}{b+d}$, что равносильно неравенству $bc \geq ad$. Тогда при $x_1 > \frac{c}{a+c}$ неподвижная точка x является отталкивающей, т. е. репеллером, а при $x_1 < \frac{d}{b+d}$ точка x будет притягивающей, т. е. аттрактором. Таким образом, для любой внутренней начальной точки $\alpha(x^0) \in \Gamma_{13}$ при $x_1 > \frac{c}{a+c}$ и $\omega(x^0) \in \Gamma_{13}$ при $x_1 < \frac{d}{b+d}$.

Теорема 3. Любая траектория отображения V_2 сходится, т.е для любой внутренней начальной точки симплекса $x^0 \in S^3$

$$\alpha(x^0) \in \left\{ \left(\frac{(1-t)a+c}{a+c}, 0, \frac{ta}{a+c}, 0 \right) \right\}, \quad \omega(x^0) \in \left\{ \left(\frac{(1-t)b+d}{b+d}, 0, \frac{tb}{b+d}, 0 \right) \right\}, \quad t \in [0, 1].$$

Следовательно, пределы отрицательной и положительной траектории принадлежат ребру Γ_{13} . Если закон эволюции какой-либо системы определяется отображением V_2 , тогда «начало» и «конец» эволюции находятся на ребре Γ_{13} .

Простые вычисления показывают, что решением неравенства $A_2x \geq 0$ на симплексе S^3 является отрезок P с концами $(1, 0, 0, 0)$ и $(\frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}, 0)$, а решение неравенства $A_2x \leq 0$ на S^3 есть отрезок с концами $(\frac{d}{b+d}, 0, \frac{b}{b+d}, 0)$ и $(0, 0, 1, 0)$. Следовательно, в данном случае «начало» траектории находится во множестве P , а «конец» траектории находится в Q . Аналогичный результат и получим в случае $\frac{c}{a+c} < \frac{d}{b+d}$, т. е. $bc < ad$. Для наглядности приведем пример.

Пример 1. Пусть $a = d = 0,1$ и $b = c = 0,9$. Тогда $\frac{c}{a+c} = 0,9$ и $\frac{d}{b+d} = 0,1$. В этом случае на ребре Γ_{13} получаем картину, показанную на рисунке 4.

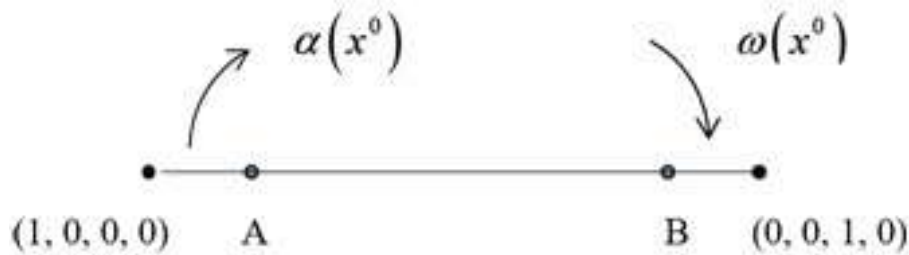


Рис. 4. Расположение множеств $\alpha(x^0)$ и $\omega(x^0)$.
Fig. 4. The arrangement of the sets $\alpha(x^0)$ and $\omega(x^0)$.

Здесь $A = (\frac{9}{10}, 0, \frac{1}{10}, 0)$ и $B = (\frac{1}{10}, 0, \frac{9}{10}, 0)$, а x^0 - произвольная внутренняя точка симплекса S^3 . Любая неподвижная точка из интервала $(A; B)$ является седловой, т. е. одно из собственных чисел якобиана λ_3, λ_4 больше 1, а другое меньше 1.

Замечание 2. Очевидно, что $\det A_2 = (ad - bc)^2$. Поэтому условие $\frac{c}{a+c} = \frac{d}{b+d}$ означает, что $\det A_2 = 0$. В этом случае точки A и B из рисунка 4 совпадают. Следовательно, грань Γ_{13} не содержит седловых неподвижных точек.

Пусть вырожденная кососимметрическая матрица имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & -b \\ a & 0 & c & 0 \\ 0 & -c & 0 & d \\ b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 < a, b, c, d \leq 1$, и определяет следующую систему Лотки – Волтерры

$$V_3 : S^3 \rightarrow S^3 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 - bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 + cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 - cx_2 + dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 + bx_1 - dx_3). \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, что $\det A = (ad + bc)^2$, следовательно, матрица A_3 , соответствующая системе (9), не вырождена при всех $0 < a, b, c, d \leq 1$. Так как

$$x_2^{(n+1)} = x_2 \cdot (1 + ax_1^{(n)} + cx_3^{(n)})$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, и $\{x_2^{(n)}\}$ – возрастающая и ограниченная последовательность, для любой внутренней начальной точки симплекса имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = 0.$$

Следовательно, $\omega(x^0) \subset \Gamma_{24}$.

Аналогично и для отрицательных траекторий из равенства

$$x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} \cdot (1 - ax_2^{(n)} - bx_4^{(n)})$$

получаем

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow -\infty} x_4^{(n)} = 0,$$

поэтому заключаем, что $\alpha(x^0) \subset \Gamma_{13}$.

Вычисляя собственные значения якобиана в неподвижных точках грани Γ_{24} , получим

$$(1 - \lambda)^2 \cdot (1 - ax_2 - bx_4 - \lambda) \cdot (1 - cx_2 + dx_4 - \lambda) = 0.$$

Если $x_2 > \frac{d}{a+d}$, то за исключением кратного корня $\lambda_1 = 1$ имеем $\lambda_3 < 1$ и $\lambda_4 < 1$. Следовательно, $\omega(x^0) \subset \left\{ \left(0, \frac{(1-t)a+d}{a+d}, 0, \frac{td}{a+d} \right) \right\}$, где $0 \leq t \leq 1$. Аналогично, собственные значения якобиана на ребре Γ_{13} находятся из уравнения,

$$(1 - \lambda)^2 \cdot (1 + ax_1 + cx_3 - \lambda) \cdot (1 + bx_1 - dx_3 - \lambda) = 0.$$

Если $x_1 > \frac{d}{a+d}$, то $\lambda_3 > 1$ и $\lambda_4 > 1$. Поэтому

$$\alpha(x^0) \subset \left\{ \left(\frac{(1-t)b+d}{b+d}, 0, \frac{tb}{b+d}, 0 \right) \right\},$$

где $0 \leq t \leq 1$. Здесь визуально получим картину, изображенную на рисунке 5, где $A \left(\frac{d}{a+d}, 0, \frac{a}{a+d}, 0 \right)$ и $B \left(0, \frac{d}{a+d}, 0, \frac{a}{a+d} \right)$.

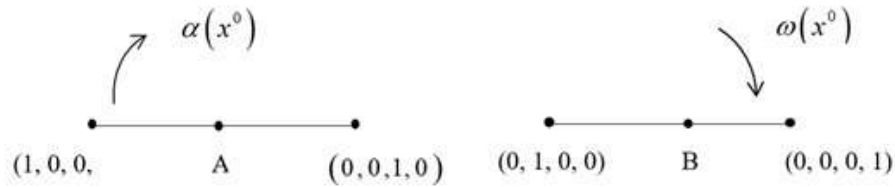


Рис. 5. Расположение множеств $\alpha(x^0)$ и $\omega(x^0)$ для V_3

Fig. 5. The arrangement of the sets $\alpha(x^0)$ and $\omega(x^0)$ for V_3 .

Замечание 3. Для отображения V_3 расположения $\alpha(x^0)$ и $\omega(x^0)$ также определяются решениями неравенств $A_3x \geq 0$ и $A_3x \leq 0$ на симплексе S^3 .

Перейдем к рассмотрению последнего случая. Пусть

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & b \\ a & 0 & -c & 0 \\ 0 & c & 0 & -d \\ -b & 0 & -d & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда соответствующая ей система Лотки – Вольтерры имеет вид

$$V_4 : S^3 \rightarrow S^3 : \begin{cases} x'_1 = x_1(1 - ax_2 + bx_4), \\ x'_2 = x_2(1 + ax_1 - cx_3), \\ x'_3 = x_3(1 + cx_2 - dx_4), \\ x'_4 = x_4(1 - bx_1 + dx_3), \end{cases} \quad (10)$$

где $0, a, b, c, d \leq 1$. Пусть $V_4 : S^3 \rightarrow S^3$ – отображение, определяемое этими равенствами. Очевидно, что $\det A_4 = (ad - bc)^2$ и частично-ориентированный граф, соответствующий матрице A_4 , имеет вид, изображенный на рисунке 6.

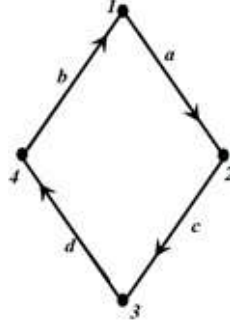


Рис. 6. Частично-ориентированный граф, соответствующий матрице A_4 .

Fig. 6. The partially-oriented graph corresponding to the matrix A_4 .

Здесь для изучения асимптотического поведения траекторий внутренних точек симплекса рассмотрим следующие три случая.

i) $ad = bc$. В этом случае множества $P = \{x \in S^3 : A_4x \geq 0\}$ и $Q = \{x \in S^3 : A_4x \leq 0\}$ совпадают и представляют собой прямолинейный отрезок с концами $A = \left(\frac{c}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}, 0\right)$ и $B = \left(0, \frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right)$. Легко проверить, что отрезок AB состоит из неподвижных точек отображения V_4 . В любой точке отрезка AB спектр якобиана находится из уравнения

$$(1 - \lambda)^4 + (1 - \lambda)^2 \cdot (a^2x_1x_2 + b^2x_1x_4 + c^2x_2x_3 + d^2x_3x_4) + (ad - bc)^2x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Поскольку $ad = bc$, корни этого уравнения за исключением $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ комплексные, причем $|\lambda_3| = |\lambda_4| > 1$.

Положительная траектория любой внутренней точки, не принадлежащей отрезку AB , расходится, отрицательная траектория сходится к одной из точек отрезка AB . Несложно проверить, что $\omega(x^0)$ бесконечно и лежит на границе симплекса, а $\alpha(x^0) \subset AB$.

ii) $ad > bc$. В этом случае простые вычисления показывают, что решение неравенства $A_4x \geq 0$ на симплексе содержится на грани Γ_{13} и удовлетворяет неравенству

$$\frac{c}{a+c} \leq x_1 \leq \frac{d}{b+d},$$

решение которого в силу $ad > bc$ непусто. Следовательно, множество $P = \{x \in S^3 : A_4x \geq 0\}$ представляет собой отрезок на грани Γ_{13} с концами $A = \left(\frac{a}{a+c}, 0, \frac{a}{a+c}, 0\right)$ и $B = \left(\frac{d}{b+d}, 0, \frac{b}{b+d}, 0\right)$.

Решением неравенства $Q = \{x \in S^3 : A_4x \leq 0\}$ является отрезок, принадлежащий ребру Γ_{24} с концами $C = \left(0, \frac{b}{a+b}, 0, \frac{a}{a+b}\right)$ и $D = \left(0, \frac{d}{c+d}, 0, \frac{c}{c+d}\right)$. Для этого случая картина множеств предельных точек положительной и отрицательной траектории представлена на рисунке 7.



Рис. 7. Расположение множеств $\alpha(x^0)$ и $\omega(x^0)$ для V_4

Fig. 7. The arrangement of the sets $\alpha(x^0)$ and $\omega(x^0)$ for V_4 .

iii) Случай $ad < bc$ исследуется аналогично предыдущему.

3. Заключение

Эпидемиологические смыслы некоторых дискретных динамических систем Лотки – Вольтерры, являющихся дискретными аналогами компартментарных моделей SIR , $SEIR$, $SIRD$, были исследованы в работах [19], [20], [36]. В данной работе подробно рассмотрены и исследованы вырожденные случаи дискретных отображений Лотки – Вольтерры, сохраняющих двумерный и трехмерный симплексы. Эти системы могут полноправно служить в качестве дискретных моделей $SIRS$, $SEIRS$, $SIRD$ для исследований течения вирусных заболеваний, имеющих рецидивный характер, а также включающих в себя смертность зараженных особей. Предлагаемые системы исследованы с помощью анализа собственных значений якобиана, который дает локальную картину поведения траекторий в окрестности неподвижной точки. Также с помощью построения функций Ляпунова исследован глобальный характер поведения траекторий внутренних точек исследуемых систем. В итоге найдены и построены множества предельных точек положительной траектории $\omega(x^0)$ и множества предельных точек отрицательной траектории $\alpha(x^0)$, означающие соответственно начало эпидемии и ее конец.

В статье подробно исследованы три динамические системы. Первая из них – система (3), которая является дискретным аналогом непрерывной компартментарной модели SIR , описывающей течение заболеваний, передающихся воздушно-капельным путём, не имеющих рецидивирующий характер. В работе [19] описан эпидемиологический смысл этой системы в качестве такой модели. Мы же в нашей работе полностью исследовали эту динамическую систему, доказав для нее существование функции Ляпунова в виде

$$\varphi_p(x) = x_2^{\frac{\lambda b}{a+b}} \cdot x_3^{\frac{a+(1-\lambda)b}{a+b}},$$

и с помощью этой функции показали расположение множеств предельных точек положительной

$$\alpha(x) \subset P = \{x \in S^2 : A_1x \geq 0\} = \left\{ \left(0; \frac{\lambda b}{a+b}; \frac{a+(1-\lambda)b}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\}$$

и отрицательной траекторий

$$Q = \{x \in S^2 : A_1x \leq 0\} = \left\{ \left(0, \frac{b+\lambda a}{a+b}, \frac{(1-\lambda)a}{a+b} \right); 0 \leq \lambda \leq 1 \right\},$$

доказав при этом, что они суть бесконечные множества (см. теорему 2).

Для системы (8) использован метод анализа спектра якобиана, согласно [38], так как этот метод описывает локальный характер неподвижных точек. Для этой системы также найдены множества предельных точек положительной и отрицательной орбиты. Отмечено, что любая траектория отображения (8) сходится на ребре Γ_{13} (см. теорему 3).

В отличие от предыдущего случая (8), для динамической системы (9) доказано, что множество предельных точек положительной и отрицательной траектории лежат на разных ребрах – Γ_{24} и Γ_{13} .

В конце работы приведена система (10), которая является явным аналогом непрерывной модели *SEIRS*. Эта модель полностью описывает течение вирусных заболеваний, передающихся воздушно-капельным путем с рецедивным характером. Асимптотическое поведение внутренних точек этой системы хаотично, и для нее исследованы три случая $ad = bc$, $ad > bc$ и $ad < bc$, полностью описывающие модель. (см.рис.7).

Условие $ad = bc$ означает, что множества P и Q совпадают, в эпидемиологии такой ситуации не может быть, так как начало и конец вирусной инфекции идентично совпадать не может. Поэтому в данном случае при моделировании течения вирусных заболеваний целесообразно рассматривать при условиях $ad < bc$ и $ad > bc$.

Применение рассмотренных нами в данной статье дискретных динамических систем в качестве дискретных компартментарных моделей, с численными анализами конкретных заболеваний и прогнозом на будущее мы приведем в следующей работе.

Список литературы

1. *Devaney R.L.* A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. Taylor and Francis, LLC, USA. 2020. P. 329.
2. *Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. CRC Press. 2019.
3. *Anupam P., Sandip M., Lan S.S., Hidekatsu Y.* Micro-scale variability enhances trophic transfer and potentially sustains biodiversity in plankton ecosystems // J. Theoret. Biol. 2017. 412, 86-93.
4. *Müller J., Kuttler C.* Methods and models in mathematical biology. Deterministic and stochastic approaches. Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences. Springer, Heidelberg, 2015.
5. *Бернштейн С.Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследованности // Уч. Зап. Научно-Исслед. каф. Укр. отд. Мат. 1: 1924. 83-115.
6. *Shilnikov, L.P., Shilnikov A.L., Chua L.O.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 1. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2004. P. 416.
7. *Amraoui S., Auroux D., Blum J.* Back-and-forth nudging for the quasi-geostrophic ocean dynamics with altimetry: theoretical convergence study and numerical experiments with the future swot observations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2023. 16(2), 197-219.
8. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology // Springer New York Dordrecht Heidelberg London. Second Edition. 2012. P. 522.
9. *Jiang Xu, Yinong Wang, Zhongwei Cao.* Dynamics of a stochastic SIRS epidemic model with standard incidence under regime switching. // International Journal of Biomathematics. 2021. 19(10), 10618-10636.
10. *Carlos E. Carrasco-Gutierrez and Wilfredo Sosa.* A discrete dynamical system and its applications. // Pesquisa Operacional. 2019. 39(3), 457-469.
11. *Jin X., Jia J.* Qualitative study of a stochastic SIRS epidemic model with information intervention. // Physica. 2020. P. 547.

12. Кулаков М.П., Фрисман Е.Я. Простая и сложная динамика в модели эволюции двух миграционно связанных популяций с непересекающимися поколениями // Известия вузов. ПНД. 2022. 30(2), 208–232.
13. Ростуницова А.А., Рыскин Н.М. “Исследование характера модуляционной неустойчивости при циклотронном резонансном взаимодействии излучения со встречным прямолинейным пучком электронов”, Известия вузов. ПНД, 31(5). 2023. Р. 597–609.
14. Kermack W.O. and Mc.Kendrick A.G. Contribution to the mathematical theory of epidemics // Proceedings of Royal Statistical Society A. 1927. Vol. 115. P. 700.
15. Murray J.D. Mathematical biology. Third Edition. Springer. 2009. P.776.
16. Ганиходжаев Р.Н., Эшмаматова Д.Б. Квадратичные автоморфизмы симплекса и асимптотическое поведение их траекторий // Владикавказский математический журнал. 2006, Т. 8(2). С. 12–28.
17. Rozikov U.A., Shoyimardonov S.K Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by l -Volterra operators // International Journal of Biomathematics. 2019. 12(2), p. 1950015-1–24.
18. Tadzhieva M. A., Eshmamatova D. B., and Ganikhodzhaev R. N. Volterra-Type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament // Journal of Mathematical Sciences. 2024; 278(3): 398–402.
19. Eshmamatova D.B. Discrete analog of the SIR model // AIP Conference Proceedings. 2023. 2781. P. 020024-1-10.
20. Eshmamatova D.B., Tadzhiyeva M.A., Ganikhodzhaev R.N. Degenerate cases in Lotka–Volterra systems // AIP Conference Proceedings. 2023, 2781, 020034-1-8.
21. Rozikov U.A. and Zhamilov U.U. Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population // Ukrainian Mathematical Journal. 2011; 63(7): 1136-1153.
22. Ganikhodzhaev R.N., Tadzieva M.A. and Eshmamatova D.B. Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex // Journal of Mathematical Sciences. 2020; 245(3): 398–402.
23. Трубецков Д.И. Феномен математической модели Лотки–Вольтерры и сходных с ней // Известия вузов. ПНД. 2011. 19(2). С. 69–88.
24. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Пер. с франц. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976. 288 с.
25. Братусь А.С., Новожилков А.С., Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 400 с.
26. Seytov Sh. J., Eshmamatova D.B. Discrete Dynamical Systems of Lotka–Volterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem // Lobachevskii journal of mathematics. 2023. 44(4), 1462-1476.
27. Eshmamatova D., Ganikhodzhaev R. Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365, no. 1. P. 060009.
28. Эшмаматова Д.Б., Таджиева М.А., Ганиходжаев Р.Н. Критерии существования внутренних неподвижных точек с однородными турнирами дискретных динамических систем Лотки–Вольтерры // Известия вузов. ПНД. 2023. Т. 30(6). С. 702–716.
29. Eshmamatova D. B., and Yusupov F.A. Dynamics of compositions of some Lotka–Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex // Turkish Journal of Mathematics. 2024; 48(3): 391 - 406.
30. Eshmamatova D. B., Seytov Sh.J., Narziev N.B Basins of Fixed Points for Composition of the Lotka – Volterra Mappings and Their Classification. // Lobachevskii journal of mathematics. 2023, 44(2), 558-569
31. Eshmamatova D. B. Compositions of Lotka-Volterra Mappings as a Model for the Study

of Viral Diseases. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3085(1), 020008

32. *Eshmatova D. B., Ganikhodzhaev R.N.* Asymptotic Behavior of Volterra Type Discrete Dynamical Systems. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3085(1), 020009.
33. *Eshmatova D. B., Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A.* Invariant Sets of Lotka-Volterra Mappings Acting in a Four-dimensional Simplex. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004(1), 020011.
34. *Harary F. and Palmer E.* Graphical enumeration. Academic Press. 1973. P. 326.
35. *Moon, J.* Topics on tournaments. Academic Press. 2013. P. 132.
36. *Eshmatova D. B.* Dynamics of a Discrete *SIRD* Model Based on Lotka – Volterra Mappings. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004(1), 020005
37. *Hartman P.* A lemma in the theory of structural stability of differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. 1960, 11. P. 610-620. DOI:10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7.
38. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical System. Third Edition. CRC Press. 2022. P. 443.

References

1. *Devaney R.L.* A First Course In Chaotic Dynamical Systems: Theory And Experiment. Taylor and Francis, LLC, USA. 2020. P. 329.
2. *Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. CRC Press. 2019.
3. *Anupam P., Sandip M., Lan S.S., Hidekatsu Y.* Micro-scale variability enhances trophic transfer and potentially sustains biodiversity in plankton ecosystems // J. Theoret. Biol. 2017. 412, 86-93.
4. *Müller J., Kuttler C.* Methods and models in mathematical biology. Deterministic and stochastic approaches. Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences. Springer, Heidelberg, 2015.
5. *Bernstein S.N.* The solution of a mathematical problem related to the theory of heredity // Uch. Zap. Scientific Research Department of the Ukrainian Department of Mathematics. 1924. 83-115.
6. *Shilnikov, L.P., Shilnikov A.L., Chua L.O.* Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics. Part 1. Moscow-Izhevsk: Institute of Computer Research, 2004. - 416 p.
7. *Amraoui S., Auroux D., Blum J.* Back-and-forth nudging for the quasi-geostrophic ocean dynamics with altimetry: theoretical convergence study and numerical experiments with the future swot observations // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2023. 16(2), 197-219.
8. *Brauer F., Castillo-Chavez C.* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology // Springer New York Dordrecht Heidelberg London. Second Edition. 2012. P. 522.
9. *Jiang Xu, Yinong Wang, Zhongwei Cao.* Dynamics of a stochastic SIRS epidemic model with standard incidence under regime switching. // International Journal of Biomathematics. 2021. 19(10), 10618-10636.
10. *Carlos E. Carrasco-Gutierrez and Wilfredo Sosa.* A discrete dynamical system and its applications. // Pesquisa Operacional. 2019. 39(3), 457-469.
11. *Jin X., Jia J.* Qualitative study of a stochastic SIRS epidemic model with information intervention. // Physica. 2020. P. 547.
12. *Kulakov M.P., Frisman E.* Simple and complex dynamics in the model of evolution of two populations coupled by migration with non-overlapping generations // Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, 2022, vol. 30, iss. 2, pp. 208-232.
13. *Rostuntsova A.A., Ryskin N.M.* “Investigation of the nature of modulation instability in cyclotron resonance interaction of radiation with an oncoming rectilinear electron beam”,

- Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika. 2023. 31(5). P. 597-609.
14. *Kermack W.O. and Mc.Kendrick A.G.* Contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of Royal Statistical Society A. 1927. Vol. 115. P. 700.
 15. *Murray J.D.* Mathematical biology. Third Edition. Springer. 2009. P.776.
 16. *Ganikhodzhaev R.N., Eshmamatova D.B.* Quadratic automorphisms of a simplex and the asymptotic behavior of their trajectories // Vladikavkaz Mathematical Journal. 2006; 8(2):12–28 (in Russian).
 17. *Rozikov U.A., Shoyimardonov S.K* Ocean ecosystem discrete time dynamics generated by l -Volterra operators // International Journal of Biomathematics. 2019. 12(2), p. 1950015-1–24.
 18. *Tadzhieva M. A., Eshmamatova D. B., and Ganikhodzhaev R. N.* Volterra-Type Quadratic Stochastic Operators with a Homogeneous Tournament // Journal of Mathematical Sciences. 2024; 278(3): 398–402.
 19. *Eshmamatova D.B.* Discrete analog of the SIR model // AIP Conference Proceedings. 2023. 2781. P. 020024-1-10.
 20. *Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A., Ganikhodzhaev R.N.* Degenerate cases in Lotka–Volterra systems // AIP Conference Proceedings. 2023, 2781, 020034-1-8.
 21. *Rozikov U.A. and Zhamilov U.U.* Volterra quadratic stochastic operators of a two-sex population // Ukrainian Mathematical Journal. 2011; 63(7): 1136-1153.
 22. *Ganikhodzhaev R.N., Tadzhieva M.A. and Eshmamatova D.B.* Dynamical properties of quadratic homeomorphisms of a finite-dimensional simplex // Journal of Mathematical Sciences. 2020;245(3): 398–402.
 23. *Trubetskoy D.I.* The phenomenon of the Lotka–Volterra mathematical model and similar ones // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Prikladnaya Nelineynaya Dinamika 2011; 19(2): 69-88.
 24. *Volterra V.* Mathematical theory of struggle for existence (Nauka, Moscow, 1976) (in Russian).
 25. *Bratus A.S., Novozhilov A.S., Platonov A.P.* Dynamical systems and models of biology. M.: FIZMATLIT. 2010. P. 400.
 26. *Seytov Sh. J., Eshmamatova D.B.* Discrete Dynamical Systems of Lotka–Volterra and Their Applications on the Modeling of the Biogen Cycle in Ecosystem // Lobachevskii journal of mathematics. 2023. 44(4), 1462-1476.
 27. *Eshmamatova D., Ganikhodzhaev R.* Tournaments of Volterra type transversal operators acting in a simplex // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365, no. 1. P. 060009.
 28. *Eshmamatova D.B., Tadzhieva M.A., Ganikhodzhaev R.N.* Criteria for internal fixed points existence of discrete dynamic Lotka – Volterra systems with homogeneous tournaments // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2023. 30(6). C. 702–716.
 29. *Eshmamatova D. B., and Yusupov F.A.* Dynamics of compositions of some Lotka–Volterra mappings operating in a two-dimensional simplex // Turkish Journal of Mathematics.2024; 48(3): 391 - 406.
 30. *Eshmamatova D. B., Seytov Sh.J., Narziev N.B* Basins of Fixed Points for Composition of the Lotka – Volterra Mappings and Their Classification. // Lobachevskii journal of mathematics. 2023, 44(2), 558-569
 31. *Eshmamatova D. B.* Compositions of Lotka-Volterra Mappings as a Model for the Study of Viral Diseases. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3085(1), 020008
 32. *Eshmamatova D. B., Ganikhodzhaev R.N.* Asymptotic Behavior of Volterra Type Discrete

- Dynamical Systems. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3085(1), 020009.
33. *Eshmamatova D. B., Ganikhodzaev R.N., Tadzhieva M.A.* Invariant Sets of Lotka-Volterra Mappings Acting in a Four-dimensional Simplex. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004(1), 020011.
 34. *Harary F. and Palmer E.* Graphical enumeration. Academic Press. 1973. P. 326.
 35. *Moon, J.* Topics on tournaments. Academic Press. 2013. P. 132.
 36. *Eshmamatova D. B.* Dynamics of a Discrete *SIRD* Model Based on Lotka – Volterra Mappings. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004(1), 020005
 37. *Hartman P.* A lemma in the theory of structural stability of differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. 1960, 11. P. 610-620. DOI:10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7.
 38. *Devaney R.L.* An Introduction to Chaotic Dynamical System. Third Edition. CRC Press. 2022. P. 443.



Ганиходжаев Расул Набиевич — родился в Ташкенте (1945). Окончил факультет математики Ташкентский государственный университет по направлению «Функциональный анализ» (1971). Защитил диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «Математический анализ» (1997, ТашГУ). С 1967 года работает на кафедре «Алгебра и функциональный анализ» Национального университета Узбекистана на должности профессора. Научные интересы – динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы касающие экологии. Опубликовал свыше 60 ти научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Алмазарский район
Национальный университет Узбекистана
E-mail: rganikhodzhaev@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6551-5257
Scopus: 35098653200



Эшмаматова Дилфуза Бахрамовна — родилась в Самарканде (1974). Окончила с отличием Механико-математический факультет Ташкентского государственного университета по направлению «Дифференциальные уравнения» (1996). Защитила диссертацию на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности «Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ» (2023, НУУз). С 2003 - по 2020 года работала в Ташкентском институте инженеров железнодорожного транспорта старшим преподавателем, доцентом и заведующей кафедры «Высшая математика». С 2020 года работает на кафедре «Высшая математика» Ташкентского государственного транспортного университета в должности заведующего. Научные интересы – динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика, эпидемиология и вопросы касающие экологии. Опубликовала свыше 50 ти научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район
Ташкентский государственный транспортный университет
E-mail: 24dil@mail.ru

ORCID: 0000-0002-1096-2751
Scopus: 57214791647
<https://www.webofscience.com/wos/author/record/37355263>



Муминов Улугбек Рахимжонович — родился в Фергане (1988). Окончил с отличием факультет математики Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека по направлению «Математический анализ и дифференциальные уравнения» (2014). С 2021 года ведет научную деятельность в докторантуре(PhD) по специальности «Математический анализ» в Ферганском национальном Университете. Научные интересы – динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, популяционная генетика. Опубликовал свыше 5 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Мирабадский район
Ташкентский государственный транспортный университет
E-mail:

ORCID: 0009-0008-0762-1180



Машарипов Сирожиддин Исмойилжон угли — родился в Хорезме (1995). Окончил с отличием факультет математики Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека по направлению «Математический анализ» (2017). С 2021 года ведет научную деятельность в докторантуре(PhD) на кафедре «Алгебра и Функциональный анализ» Национальном Университете Узбекистана. Научные интересы – динамические системы, теория графов, теория вероятностей и математическая статистика, математическое моделирование, математическая биология, популяционная генетика. Опубликовал свыше 10 научных статей по указанным направлениям.

Узбекистан, 100167 Ташкент, Юнусабадский район
Национальный Университет Узбекистан
E-mail: sirojiddinmasharipov1995@gmail.com

ORCID: 0000-0002-9414-3250