

## Сценарии переноса пассивных частиц в поле скорости пары точечных вихрей при наличии сдвигового потока

В. Н. Говорухин<sup>1</sup>✉, Б. К. Гончаров<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт математики, механики и компьютерных наук имени И. И. Воровича,  
Южный федеральный университет, г.Ростов-на-Дону, Россия  
E-mail: ✉vngovoruhin@sfedu.ru

Поступила в редакцию 12.09.2024, принята к публикации 16.12.2024,  
опубликована онлайн 17.12.2024

**Аннотация.** Целью работы является анализ переноса пассивных частиц в поле скорости конфигурации из двух вихрей на плоскости при возможном присутствии сдвигового потока. Для моделирования используется система двух точечных вихрей и сдвиговое течение с линейной зависимостью компонент скорости от одной из координат. Изучены сценарии переноса и перемешивания частиц в зависимости от интенсивности одного вихря (в области  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ ) и различных сдвиговых потоках при фиксированных начальном положении вихрей и равной единице интенсивности второго.

При исследовании применялись численные *методы* анализа динамических систем. Для решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений использовались интеграторы 8-го порядка точности. Строились сечения Пуанкаре, поля локальных показателей Ляпунова, изучались трансформации маркерных окружностей (жидких контуров) на плоскости.

**Результаты.** В зависимости от знаков интенсивностей вихрей и направления сдвигового потока обнаружены следующие сценарии: перемешивание частиц в окрестности вихревой структуры; движение вихревой пары по замкнутым орбитам с переносом частиц из её окрестности и перемешиванием вблизи орбит; перемешивание частиц в обширной области на плоскости; движение вихревой пары к бесконечности с переносом частиц из окрестности её начального положения на большие расстояния; распад пары и движение вихрей в разные стороны на бесконечность с переносом частиц из окрестностей их начальных положений. При наличии сдвигового потока типично стохастическое рассеивание пассивных частиц, что обусловлено их хаотической динамикой.

**Заключение.** Показано, что в зависимости от знаков интенсивностей и параметров сдвигового потока вихревая пара может быть «перевозчиком», перемещающим на большие расстояния частицы из окрестности своего начального положения, «перемешивателем» частиц в ограниченной области плоскости, «рассеятелем» частиц из некоторой области по пути своего движения к бесконечности. Результаты статьи могут быть полезны при объяснении сложности процессов переноса в потоках жидкостей и газов при возникновении в них вихревых пар.

**Ключевые слова:** система точечных вихрей, перенос частиц, перемешивание пассивной примеси, нелинейные системы

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-21-00371.

**Для цитирования:** Говорухин В. Н., Гончаров Б. К. Сценарии переноса пассивных частиц в поле скорости пары точечных вихрей при наличии сдвигового потока // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 3. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003157. EDN: MMEERC

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## Scenarios of passive particle transport in the velocity field of a vortex pair in shear flow

V. N. Govorukhin<sup>1</sup>✉, B. K. Goncharov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University 8a Milchakova str., Rostov-on-Don, 344090, Russia  
E-mail: vngovoruhin@sfedu.ru  
Correspondence should be addressed to Vasily N. Govorukhin, vngovoruhin@sfedu.ru  
Received 12.09.2024, accepted 16.12.2024, available online 17.12.2024

**Abstract.** The purpose of the work is to analyze the transport of passive particles in the velocity field of a two-vortex configuration on a plane with a possible presence of a shear flow. We model the system using two point vortices and a shear flow, where the velocity components depend linearly on one coordinate. Scenarios of particle transport and mixing are studied depending on the intensity of one vortex (in the region of  $[-1, 1] \setminus \{0\}$ ) and various shear flows with fixed initial positions of the vortices and an intensity of the second equal to unity. In the investigation, we mainly use numerical *methods* of dynamical systems analysis. We apply 8th-order of accuracy integrators to solve the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. The study also involved constructing Poincaré sections and fields of local Lyapunov exponents, as well as studying transformations of marker circles (fluid contours) on a plane.

**Results.** Depending on the signs of the vortex intensities and the direction of the shear flow, the following scenarios were found: mixing of particles near the vortex structure; movement of a vortex pair along closed orbits with the transfer of particles from its vicinity and mixing near the orbits; mixing of particles in a large area on the plane; movement of a vortex pair to infinity with the transfer of particles from the vicinity of its initial position over long distances; disintegration of the pair and movement of vortices in different directions to infinity with the transfer of particles from the vicinity of their initial positions. In the presence of a shear flow, stochastic scattering of passive particles is typical, which is because of their chaotic dynamics.

**Conclusion.** We show that depending on the signs of intensities and parameters of the shear flow, a vortex pair can be a 'carrier' moving particles from the vicinity of its initial position over long distances, a 'mixer' of particles in a limited area of the plane, a 'scatterer' of particles from a certain area along its path to infinity. The results of the article can be useful in explaining the complexity of transfer processes in fluids and gas flows when vortex pairs arise in them.

**Keywords:** system of point vortices, particle transfer, advection, nonlinear systems

**Acknowledgements.** The research was funded by the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00371).

**For citation:** Govorukhin VN, Goncharov BK. Scenarios of passive particle transport in the velocity field of a vortex pair in shear flow. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2025;33(3):xxx-xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003157

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

Плоские вихревые структуры возникают и наблюдаются в двумерной турбулентности, в атмосфере и океане [1,2], течениях в каналах [3,4], реализуются в физических экспериментах [5–7]. Двухмерность течения может быть обусловлена геометрическими ограничениями, например, тонкий слой или пленка, наличием фоновых вращений системы, стратификацией жидкости. Простейшими вихревыми течениями, демонстрирующими сложное поведение, являются пары вихрей на плоскости – системы из двух вихрей произвольной интенсивности. Движения вихрей изучались, начиная с конца 19 века, аналитически, численно и экспериментально. В результате выяснены многие фундаментальные свойства их динамики. Одним из эффективных методов при этом оказалось математическое моделирование. Движения си-

стемы из двух вихрей зависят от знаков интенсивностей (направления вращения) вихрей. Если они одного знака (однонаправлены), то достаточно удаленные друг от друга вихри вращаются вокруг общего центра интенсивностей, а при их различных знаках формируется движущийся по плоскости модон [6, 8, 9]. Сценарии усложняются при наличии сдвигового течения, которое может принципиально изменять поведение вихревой пары [6, 8, 10–13].

Во многих случаях эффекты вихревой динамики качественно верно описывает простейшая математическая модель – конфигурация точечных вихрей. Она позволяет интерпретировать физические эксперименты и понять обнаруженные в них эффекты [14], описать структуру течения по информации о его скорости [15]. Это гамильтонова система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая перемещение на плоскости сосредоточенных в точках вихрей с заданной интенсивностью, смотри [16, 17]. Динамическая система, описывающая движение точечных вихрей при отсутствии фоновых течений и других осложняющих факторов интегрируема, а движения вихрей нестационарны. Сдвиговое течение может приводить к существованию стационарных режимов и хаотизации динамики вихрей, нетривиальному рассеянию пассивных частиц, другим нелинейным эффектам [18–20].

Особенный интерес вызывают механизмы массопереноса и перемешивания жидкости в вихревых течениях. Для их понимания полезно исследование процессов в простейшей формулировке – в поле скорости, порождаемом системой точечных вихрей. В этом случае перенос пассивной частицы может трактоваться как динамика системы из трех вихрей, но интенсивность третьего вихря равна нулю. Несмотря на изученность динамики пары точечных вихрей, процессы переноса пассивных частиц в индуцированном им поле скорости до конца не исследованы. Их аналитическое изучение затруднительно, что требует использовать методы численного анализа. Особенно эффективны для этого оказываются подходы, основанные на теории динамических систем [21–27].

Целью данной работы является демонстрация динамических эффектов и режимов переноса и перемешивания пассивных частиц, которые могут быть в вихревых структурах в атмосфере, океанах и экспериментах. При изучении системы мы не переходим к подвижной системе координат, что позволяет нагляднее соотнести данные наблюдений и экспериментов с результатами математического моделирования. Рассмотрена система двух точечных вихрей в присутствии сдвигового течения с компонентами скорости линейно зависящими от координат на плоскости. Статья состоит из введения, краткого описания модели и методов её исследования, и раздела, посвященного обнаруженным сценариям переноса частиц без сдвигового потока и при его присутствии.

## 1. Математическая модель пары точечных вихрей

Согласно [16, 17, 29] динамика  $N$  точечных вихрей на плоскости в присутствии линейного по координатам сдвигового течения описывается гамильтоновой системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1,i < j}^N \omega_i \omega_j \ln((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) + \sum_{i=1}^N \omega_i \left( \frac{\alpha}{2} y_i^2 + \frac{\beta}{2} x_i^2 \right) \\
 \omega_i \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial y_i} = -\frac{\omega_i}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \omega_j \frac{y_i - y_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} + \omega_i \alpha y_i \\
 \omega_i \dot{y}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{\omega_i}{2\pi} \sum_{j \neq i}^N \omega_j \frac{x_i - x_j}{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} - \omega_i \beta x_i
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь точка означает дифференцирование по времени  $t$ ,  $H$  – гамильтониан системы,  $(x_i, y_i)$  – декартовы координаты вихря с номером  $i$  на плоскости, а  $\omega_i$  – его интенсивность (циркуляция). Динамика системы определяется параметрами  $\omega_i$  и координатами вихрей на плоскости  $(x_i(0), y_i(0))$ ,  $i = 1, \dots, N$  в начальный момент времени  $t = 0$ . При  $\alpha = \beta = 0$ , то есть при отсутствии сдвигового потока, система (1) является классической системой точечных вихрей [16, 17]. Она имеет следующие независимые первые интегралы:

$$Q = \sum_{i=1}^N \omega_i x_i, \quad P = \sum_{i=1}^N \omega_i y_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \omega_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (2)$$

Система точечных вихрей индуцирует поле скорости на всей плоскости. Движение пассивной частицы с координатами  $(x, y)$  в этом поле скорости описывается системой двух дифференциальных уравнений с нестационарным гамильтонианом  $\Psi$

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \ln((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2) + \alpha \frac{y^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2} \\ \dot{x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{y - y_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} + \alpha y \\ \dot{y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \omega_i \frac{x - x_i}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \beta x \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $(x_i, y_i)$  – координаты точечного вихря с номером  $i$  в момент времени  $t$ , а  $(x, y)$  – координаты пассивной частицы.

В статье рассмотрена модель пары вихрей – система (1) при  $N = 2$ , и исследуется движение пассивной частицы в индуцированном ими поле скорости на плоскости. То есть, изучается система шести обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\omega_2}{2\pi} \frac{y_1 - y_2}{D} + \alpha y_1, & \dot{y}_1 &= \frac{\omega_2}{2\pi} \frac{x_1 - x_2}{D} - \beta x_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\omega_1}{2\pi} \frac{y_2 - y_1}{D} + \alpha y_2, & \dot{y}_2 &= \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{x_2 - x_1}{D} - \beta x_2 \end{aligned}, \quad \text{где } D = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{\omega_1}{2\pi} \frac{y - y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} - \frac{\omega_2}{2\pi} \frac{y - y_2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \alpha y, \\ \dot{y} &= \frac{\omega_1}{2\pi} \frac{x - x_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \frac{\omega_2}{2\pi} \frac{x - x_2}{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} - \beta x, \end{aligned} \quad (5)$$

где первые четыре уравнения (4) описывают движения точечных вихрей, а (5) – динамику пассивной частицы. Рассматриваются только начальные положения вихрей  $x_1(0) = 0, y_1(0) = 1$  и  $x_2(0) = 0, y_2(0) = -1$ . Также неизменной принята интенсивность первого вихря  $\omega_1 = 1$ , а интенсивность второго  $\omega_2 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ . Изучаются возможные сценарии переноса пассивных частиц при изменении параметров  $\omega_2, \alpha, \beta$ .

Система уравнений (4) являлась предметом многих исследований и хорошо изучена [6, 16, 17, 28–30]. В частности, в [8, 28] подробно анализируется система (4) динамики двух точечных вихрей в рассматриваемом сдвиговом течении. Опираясь на перечисленные работы, приведем необходимые известные факты. Для дальнейшего важно рассмотреть две характеристики – квадрат расстояния между вихрями  $D = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$  и координаты центра интенсивностей  $x_c = \frac{\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2}{\omega_1 + \omega_2}$ ,  $y_c = \frac{\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2}{\omega_1 + \omega_2}$ . Дифференцируя эти выражения

по  $t$  в силу системы (4) получим уравнения, определяющие динамику этих величин:

$$\dot{D} = 2(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(\alpha - \beta) \quad (6)$$

$$\dot{x}_c = \alpha y_c, \quad \dot{y}_c = -\beta x_c \quad (7)$$

Легко показать, что центр интенсивностей  $(x_c, y_c)$  при  $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$  лежит на прямой, соединяющей координаты  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  точечных вихрей на плоскости при всех  $t$ . Траектории центра интенсивностей описываются интегралом системы (7):

$$\frac{\alpha}{2}y_c^2 + \frac{\beta}{2}x_c^2 = C \quad (8)$$

В зависимости от  $\alpha, \beta$ , центр интенсивностей вихрей может перемещаться по эллипсам, гиперболом и прямым, покоиться когда  $\alpha = \beta$ . При этом, покоящемуся центру интенсивностей может соответствовать как ограниченное, так и неограниченное движение вихрей на плоскости. Полная классификация возможных движений пары точечных вихрей в зависимости от параметров системы (4) не является целью данной статьи, но многие сценарии описаны в разделе 3. При отсутствии сдвигового течения ( $\alpha = \beta = 0$ ) система (4) интегрируема в силу существования достаточного числа независимых интегралов движения. В общем случае, при  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$  интегрируемость уравнений (4) нарушается, и возможна хаотическая динамика вихрей [30, 31].

## 2. Используемые численные методы анализа динамических систем

Основным инструментом исследования в статье является численный анализ. Это связано с нелинейностью рассматриваемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ограниченностью аналитических методов. Используемые методы и алгоритмы реализованы в среде Matlab [32]. Для контроля численных результатов расчеты воспроизводились с использованием методов различного порядка точности. Мы ограничились кратким описанием методов и алгоритмов, а их подробное изложение можно найти в цитируемой литературе. В работе применяются и реализованы следующие методы численного анализа:

1. Интеграторы высоких порядков точности, что обусловлено высокой чувствительностью результатов вычислений для консервативных систем к погрешности методов. Игнорирование этого может приводить к качественно неверным результатам. Использовались методы ode89, входящий в набор интеграторов пакета Matlab [33] и метод ode87 [34]. Использование таких методов позволило проводить численный анализ с высокой точностью. Для контроля результатов отслеживалось сохранение интегралов (2) в динамике. Для всех расчетов погрешность величин (2) не превышала  $10^{-10}$ .
2. Численное построение отображений Пуанкаре. В качестве секущей выбиралась гиперплоскость  $x_1 - x_2 = 0$  в фазовом пространстве системы уравнений движения вихрей (4) и пассивной частицы (5). Итогом построения отображения является множество точек в  $\mathbb{R}^2$ , представляющих собой координаты пассивных частиц  $(x, y)$  в момент возвращения вихрей на заданную гиперплоскость, что соответствует полному обороту пары вихрей вокруг центра интенсивностей. По отображениям Пуанкаре можно судить о динамике частиц в окрестностях вихревой конфигурации на больших временах. Для расчета траекторий при построении отображения Пуанкаре применялся интегратор ode87, а уточнение точки на гиперплоскости проводилось с помощью метода Ньютона. В присутствии сдвигового течения движение вихрей может быть двухчастотным, что влечет

за собой 'смазывание' отображения Пуанкаре для пассивных частиц  $(x, y)$ . Чтобы нивелировать эффект 'смазывания' отображения, мы рассматриваем точки на секущей относительно движущегося центра интенсивностей пары вихрей:  $x' = x - x_c$ ,  $y' = y - y_c$ , что позволяет учесть одну из частот движения пары вихрей.

3. Динамика маркерных окружностей. Под маркерной окружностью  $C(R)$  мы понимаем набор из  $N_m$  маркерных точек на плоскости с начальными координатами

$$C(R) = \left\{ (x_k, y_k) : x_k = R \cos(\varphi_k), y_k = R \sin(\varphi_k), \varphi_k = \frac{2\pi k}{N_m}, k = 1, \dots, N_m \right\} \quad (9)$$

Этот набор точек при большом  $N_m$  хорошо приближает окружность радиуса  $R$ , а её трансформации во времени наглядно иллюстрируют области со сложной структурой течения, активного перемещения и возможного перемешивания пассивных частиц на плоскости. Деформация маркерных окружностей связана с тем, что они, как правило, не совпадают с линиями уровня интегралов движения, и демонстрируют возможное поведение маркеров в реальных течениях, когда интегралы движения неизвестны. В этом случае мы под перемешиванием маркерных окружностей подразумеваем усложнение их формы во времени и пространстве.

Расчеты проводились для пяти и более маркерных окружностей разного радиуса, каждая из которых приближалась  $N_m = 10000$  точками. То есть, численно решалась задача Коши для системы  $2N_m + 4$  обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Расчет поля локальных показателей Ляпунова (ЛПЛ). ЛПЛ служат инструментом качественного анализа процессов перемешивания и массопереноса, а также позволяют обнаружить застойные зоны и инвариантные множества в структуре потока. С их помощью можно установить, насколько с течением времени близкие в начальный момент частицы жидкости отдаляются друг от друга. Кроме того, поле ЛПЛ позволяет находить транспортные барьеры для частиц жидкости в структуре течения. Поскольку значения показателей изучаются на конечных временах и они зависят от начальных данных, то речь идет о нахождении поля ЛПЛ. Используемый в работе метод основан на схемах работ [35, 36], и достаточно подробно описан в [37]. В расчетах рассматривалась начальная область, включающая начальные положения вихрей. На рисунках большим значениям ЛПЛ соответствует более светлый оттенок.

### 3. Сценарии переноса пассивных частиц

Цель статьи – демонстрация возможных режимов и эффектов при переносе пассивных частиц в поле скорости двух точечных вихрей на плоскости, а не детальное исследование системы (4)–(5) в зависимости от параметров. Нами рассматривалось фиксированное начальное положение вихрей

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1. \quad (10)$$

Интенсивность вихря, расположенного в точке  $(0, 1)$  фиксировалась, и равнялась  $\omega_1 = 1$ , а интенсивность вихря в точке  $(0, -1)$  принимала значения в интервале  $\omega_2 \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ .

**3.1. Сценарии переноса в отсутствии сдвигового течения.** При  $\alpha = \beta = 0$ , то есть без сдвигового течения, динамика достаточно проста. Расстояние между точечными вихрями  $D$  является константой, смотри (6), центр интенсивностей  $(x_c, y_c)$  остается на месте, (7), а вихри движутся по круговым траекториям вокруг него. В численно изученной динамике пассивных частиц не были найдены области хаоса, а каждая рассмотренная

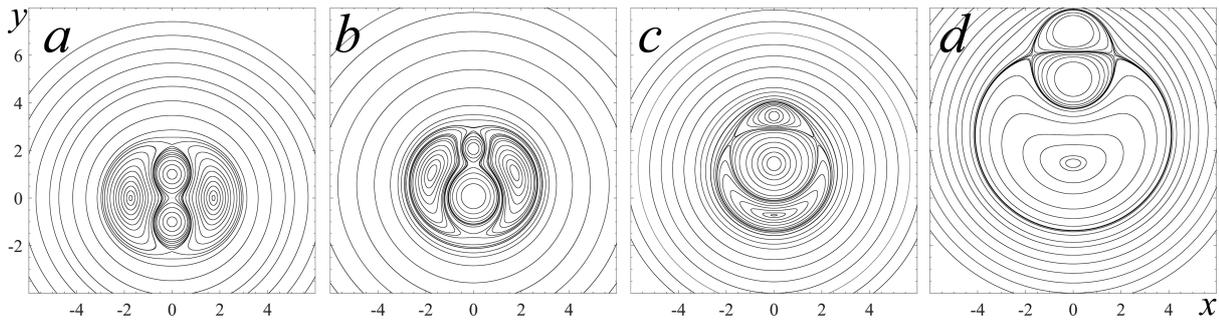


Рис. 1. Сечения Пуанкаре фазового пространства плоскостью  $x_1 = x_2$  при отсутствии сдвигового течения  $\alpha = \beta = 0$ . a)  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ , b)  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.3$ , c)  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -0.1$ , d)  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -0.5$

Fig. 1. Poincaré sections of the phase space by the plane  $x_1 = x_2$  in the absence of background flow  $\alpha = \beta = 0$ . a)  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ , b)  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 0.3$ , c)  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -0.1$ , d)  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = -0.5$

частица движется по своей замкнутой кривой на плоскости, смотри рис. 1. Это позволяет предположить интегрируемость всей системы (4)–(5), что требует доказательства. Таким образом, при отсутствии сдвигового течения рассматривается только перемешивание пассивных частиц, связанное с деформацией и усложнением маркерных окружностей. Отметим, что в частицах окружностей (9) значения интегралов (2) различны. Если в качестве маркерных кривых в начальный момент выбирать линии уровня функции тока (3), то перемешивание в классическом понимании теории консервативных систем отсутствует в силу предполагаемой интегрируемости динамики, что подтверждают расчеты.

При фиксированных координатах вихрей скорость пассивной частицы затухает при  $x \rightarrow \pm\infty$  и  $y \rightarrow \pm\infty$ , и значительное перемещение пассивных частиц происходит в окрестности вихревой пары. Размер этой области зависит от положения вихрей, их направленности и интенсивностей. При  $\alpha = \beta = 0$  выделяется три принципиально различных сценария динамики вихрей и пассивных частиц:

**a1.** При  $\omega_2 > 0$  центр интенсивностей структуры лежит внутри отрезка, соединяющего координаты вихрей. Это означает, что окружности, по которым движутся вихри, расположены в окрестности центра координат, что ограничивает область активного переноса пассивных частиц. Описанный сценарий иллюстрирует отображение Пуанкаре, представленное на рис. 1, a,b, и маркерные окружности на рис. 2, a,b.

В отображении Пуанкаре есть четыре эллиптические и три седловые особые точки. Сепаратрисы седловых точек разделяют области качественно различной динамики в окрестностях эллиптических точек. Эти области окружены замкнутыми кривыми, причем, чем дальше от центра координат они расположены, тем медленнее движение на них.

На рис. 2, a изображено изменение маркерных окружностей для конфигурации с  $\omega_2 = 1$ , когда вихри вращаются по окружности единичного радиуса. Видно, что маркерная окружность наименьшего из рассмотренных радиусов трансформируется со временем, а другие остаются практически неизменными. При  $t \geq 5000$  она распадается на набор точек, смотри рис. 1, a, и демонстрирует наличие застойных областей в окрестностях вихрей и точек, соответствующих особым точкам отображения Пуанкаре.

При нарушении симметрии вихревой пары,  $\omega_2 = 0.3$ , координаты центра интенсивностей  $(0, 0.5385)$ , а радиусы окружностей движения вихрей  $r_1 = 0.4615$  и  $r_2 = 1.5385$ . Это означает, что область активного переноса расширяется, большее число маркерных окружностей деформируется, смотри рис. 2, b. Структура отображения Пуанкаре качественно сохраняется, но размеры областей вокруг эллиптических особых точек меняются. Для этого случая

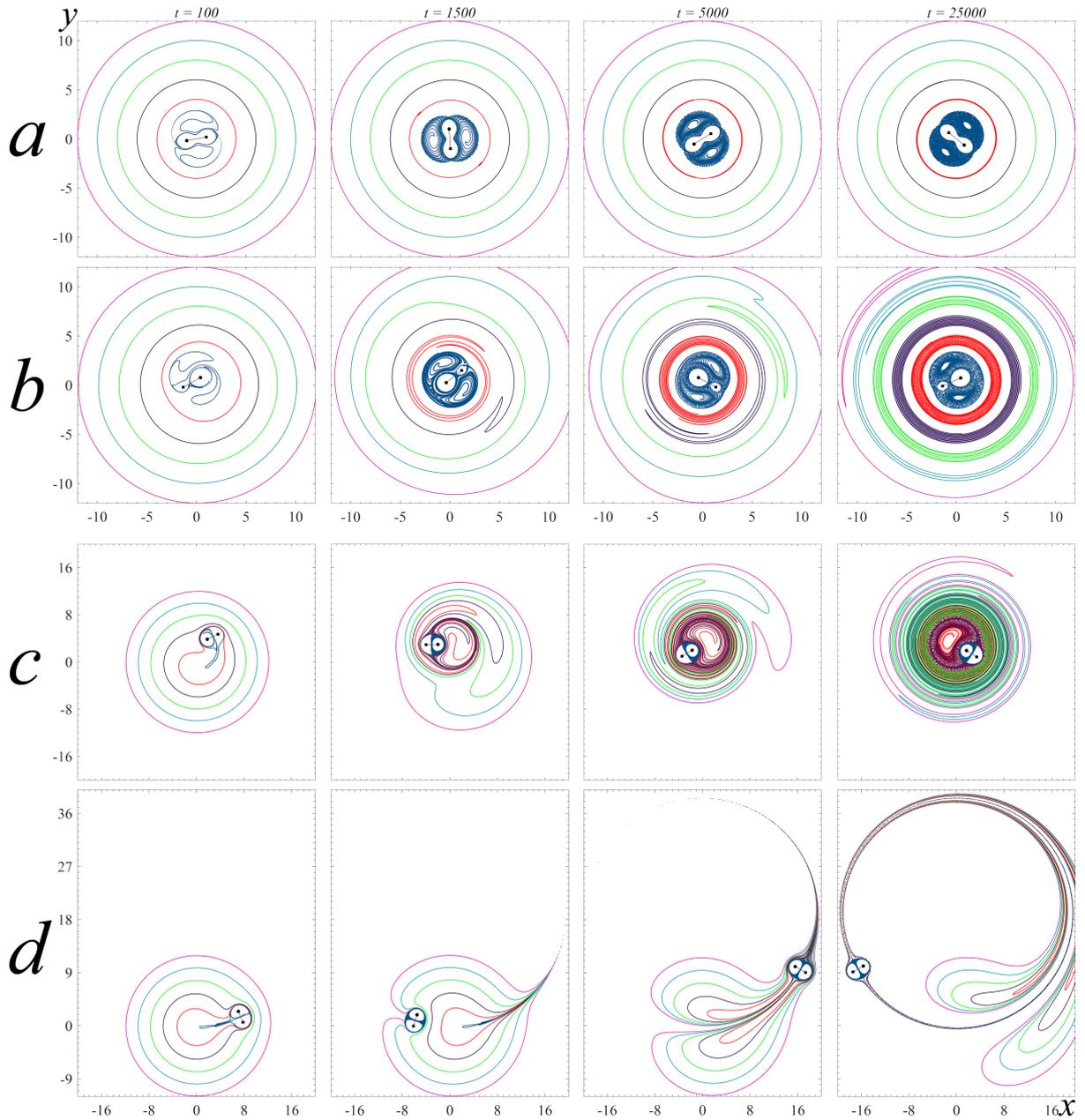


Рис. 2. Динамика шести маркерных окружностей при отсутствии сдвигового течения  $\alpha = \beta = 0$ . *a)*  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ; *b)*  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.3$ ; *c)*  $\omega_1 = 1, \omega_2 = -0.5$ ; *d)*  $\omega_1 = 1, \omega_2 = -0.9$ .

Fig. 2. Dynamics of six marker circles in the absence of background flow  $\alpha = \beta = 0$ . *a)*  $\omega_1 = \omega_2 = 1$ ; *b)*  $\omega_1 = 1, \omega_2 = 0.3$ ; *c)*  $\omega_1 = 1, \omega_2 = -0.5$ ; *d)*  $\omega_1 = 1, \omega_2 = -0.9$ .

было построено поле ЛПЛ, изображенное при  $t = 4000$  на рис. 3, левый кадр. Значения ЛПЛ находятся в интервале  $[-0.0004, 0.005]$ . Видны транспортные барьеры между качественно различными областями на плоскости и застойные зоны.

**а2.** При  $\omega_2 \in (-1, 0)$  центр интенсивностей  $(x_c = 0, y_c \in (1, \infty))$ , вихри расположены по одну сторону от него, и движутся по окружностям с центром в  $(x_c, y_c)$ . На рис. 1, с, d видно, что в отображении Пуанкаре есть три эллиптические и две седловые особые точки. Наиболее активное перемещение частиц происходит в окрестностях сепаратрис сёдел,

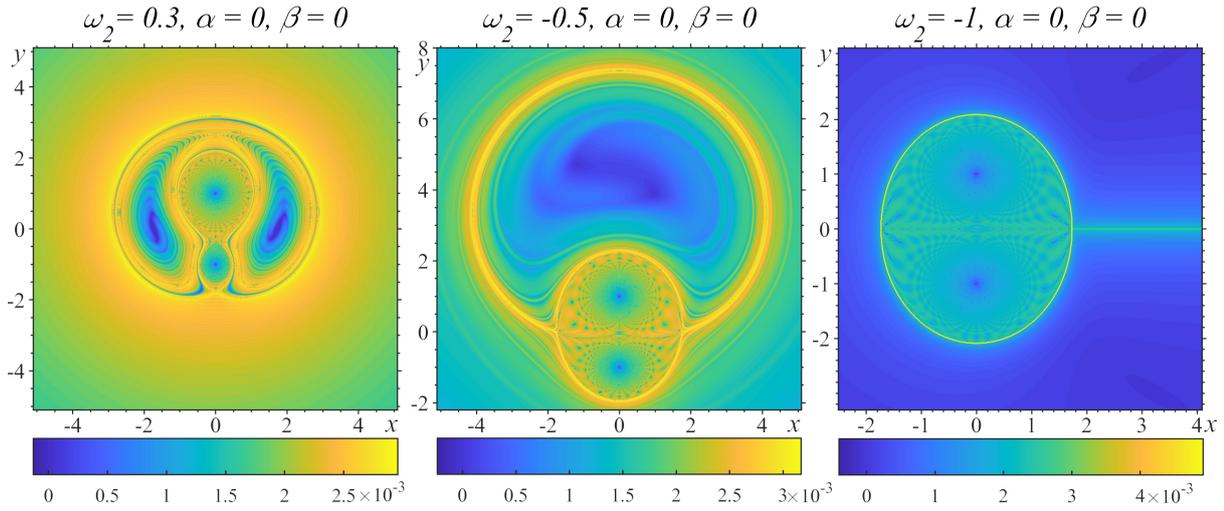


Рис. 3. Поле локальных показателей Ляпунова для трёх значений параметра  $\omega_2$  без сдвигового течения при  $t = 4000$ . Светлый оттенок соответствует областям более активного перемешивания.

Fig. 3. Local Lyapunov exponents for three values of the  $\omega_2$  parameter without background flow at  $t = 4000$ . Light shade corresponds to regions of more active mixing.

а в окрестности  $(x_c, y_c)$  образуется застойная зона, см. поле ЛПЛ на рис. 3, б. Маркерные окружности при  $\omega_2 = -0.5$  даны на рис. 2, с. Когда  $\omega_2 \rightarrow -1$  координаты центра интенсивностей  $(x_c, y_c) \rightarrow (0, \infty)$ , траектории движения вихрей удлиняются, расширяется застойная зона, смотри отображения Пуанкаре на рис. 1, с, d и динамику маркерных окружностей на рис. 2, d. Видно, что деформации маркерных окружностей изменились – вихревая пара захватывает и активно переносит частицы вдоль траектории своего движения.

**а3.** Когда  $\omega_2 = -1$  траекториями движения вихрей являются два параллельных луча. Вихревая пара захватывает частицы из области, ограниченной сепаратрисами седловых равновесий 'моментального векторного поля' при  $t = 0$ , и перемещает их вдоль своего движения. Переносятся и перемешиваются частицы внутри этой области, на луче  $\{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}$  и его окрестности, смотри поле ЛПЛ на рис. 3, с.

**3.2. Сценарии переноса в присутствии сдвигового течения.** При  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  динамика вихрей и сценарии переноса пассивных частиц усложняются и становятся значительно разнообразнее. В большинстве случаев интегрируемость системы (4)–(5) нарушается. Это приводит к возникновению областей хаотической динамики, что принципиально отличает рассмотренные процессы перемешивания в присутствии и отсутствии сдвиговых течений. Кроме того, области активного переноса не обязательно расположены в окрестности вихревой пары, т.к. задаются и сдвиговым течением. Его скорость определяется параметрами  $\alpha, \beta$  и имеет компоненты:

$$v_x^S = \dot{x} = \alpha y, v_y^S = \dot{y} = -\beta x. \quad (11)$$

Система (11) совпадает с (7) и также описывает движение центра интенсивностей вихревой пары. Очевидно, что при  $\alpha$  и  $\beta$  одного знака пассивные частицы движутся в поле (11) по эллипсам с центром в начале координат, а при различных знаках траектории частиц стремятся к бесконечности за исключением особой точки  $(0, 0)$ . Такое поведение демонстрирует и динамика центра интенсивностей  $(x_c, y_c)$ . Наличие вихрей в области течения может существенно менять динамику пассивных частиц в его окрестности, но достаточно далеко от

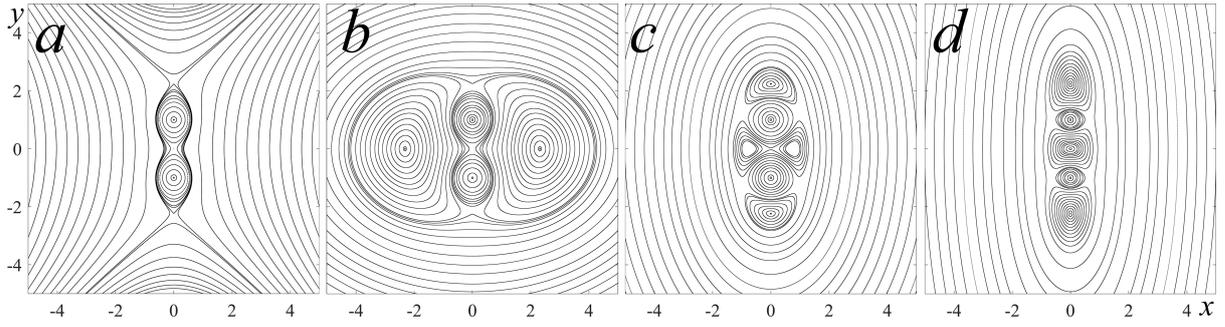


Рис. 4. Траектории частиц в окрестности стационарной пары вихрей при  $\alpha = \frac{1}{4\pi} \approx 0.079577$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  при разных значениях параметра  $\beta$ : a)  $\beta = -0.1$ , b)  $\beta = 0.05$ , c)  $\beta = 0.2$ , d)  $\beta = 0.5$ .

Fig. 4. Particle trajectories in the neighbourhood of a stationary dipole at  $\alpha = \frac{1}{4\pi} \approx 0.079577$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  for different values of the parameter  $\beta$ : a)  $\beta = -0.1$ , b)  $\beta = 0.05$ , c)  $\beta = 0.2$ , d)  $\beta = 0.5$ .

вихрей она определяется полем (11). Далее представлены результаты только для начальных данных (10). Как и в предыдущем разделе мы не ставим целью полный анализ системы (4)–(5) при  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , а ограничимся демонстрацией качественно различных сценариев.

**б0.** При наличии сдвигового течения возможны стационарные режимы. Приведем примеры. Для начальных условий (10) при  $\omega_1 = \omega_2 = 1$  имеется стационарное решение, если  $\alpha = \frac{1}{4\pi}, \forall \beta$ . При этом, траектории пассивных частиц определяются функцией тока

$$\Psi = -\frac{1}{4\pi} \left( \ln(x^2 + (y-1)^2) + \ln(x^2 + (y+1)^2) \right) + \frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{8\pi}y^2 \quad (12)$$

Центр интенсивностей вихрей находится в особой точке  $(x_c = 0, y_c = 0)$ , и не движется. При  $\beta \leq 0$  часть частиц остаются в окрестностях точечных вихрей, что видно на рис. 4, а. Из остальных начальных данных поток уносит пассивные частицы на неограниченное расстояние. Малейшее нарушение значения  $\omega_2$  приводит к смещению  $(x_c, y_c)$  и распаду стационарного режима, т.к. возникает движение центра интенсивностей согласно (7).

При возмущении стационарного режима по параметру  $\alpha > \frac{1}{4\pi}$  при  $\beta = 0$  вихревая пара с начальными условиями (10) разрывается, сдвиговый поток уносит вихри вместе с частицами в противоположные стороны на неограниченное расстояние.

Когда  $\beta > 0$  частицы перемещаются по замкнутым траекториям. С ростом  $\beta$  меняется число особых точек стационарного режима и поведение частиц в их окрестностях, например, возникает область замкнутых траекторий около стационарных точек  $(0, \pm\sqrt{5})$ , это показано на рис. 4, b, c, d. Стационарные режимы могут иметь разное количество особых точек и сепаратрис, разделяющих области с качественно различным поведением, смотри рис. 4.

**б1.** При  $\omega_2 > 0$ ,  $\alpha \cdot \beta = 0$  и  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , существуют значения  $\hat{\alpha} > 0$  или  $\hat{\beta} > 0$ , меньше которых движение пары вихрей состоит из комбинации перемещения центра интенсивностей вдоль одной из осей координат, смотри (7), и вращения вихрей вокруг  $(x_c(t), y_c(t))$ . Пример дан на рис. 5, а, где траектории вихрей изображены толстыми кривыми, а тонкими показано движение 20-ти пассивных частиц с начальными данными в квадрате со стороной 0.001 (помечен на рисунке). Видна сильная зависимость движения пассивных частиц от начального положения, что объясняется их принадлежностью области хаотической динамики. Хаотическая область не ограничена, смотри отображение Пуанкаре в подвижной системе координат на рис. 6, а, и можно предположить, что все пассивные частицы со временем стремятся к бесконечности. Очевидно хаотическое рассеяние частиц в поле скорости движущейся пары вихрей. Часть частиц 'выбрасывается' из окрестности вихревой пары

и начинает двигаться в поле сдвигового течения согласно (11). Маркерные окружности с большим радиусом растягиваются под воздействием сдвигового течения, а окружности в окрестности вихревой пары перемешиваются, смотри рис. 7, а.

Если  $\alpha = 0$  центр интенсивностей стоит на месте при условиях (10). Если  $\beta \in (0, \hat{\beta})$ , появление сдвигового течения разрушает структуру линий тока, изображенную на рис. 1, b. Возникают области хаотического перемешивания в окрестности сепаратрис особых точек отображения Пуанкаре без сдвигового течения, рис. 1, b. Отображение Пуанкаре при  $\beta \lesssim \hat{\beta}$  аналогично рис. 6, b, а траектории вихрей и частиц в исходной системе координат даны на рис. 5, b. Видно, что траектории частиц покидают окрестность вихревой пары за конечное время. Маркерные окружности малого радиуса перемешиваются вблизи вихрей, а большого растягиваются и сжимаются, смотри рис. 7, b.

Когда  $\beta > \hat{\beta}$  вихревая пара 'разрывается' – вихри разбегаются в противоположные стороны, увлекая за собой часть частиц из окрестности их начального положения. Если  $\beta < 0$ , вихри сохраняют периодическое движение по окружностям, а в их окрестности имеются обширные области хаоса. Достаточно далекие от вихрей частицы движутся по близкой к замкнутой траектории с медленным дрейфом на плоскости, частицы смещаются, и на больших временах некоторые могут попасть в хаотическую область. И наоборот, частицы из области хаоса могут попасть в область 'почти-регулярной' динамики. Поведение частиц похоже на динамику в поле скорости вихревого триполя [23] и САВС-течении [38].

Когда  $\alpha < 0, \beta = 0$ , при любых значениях параметров вихри имеют периодическую динамику относительно движущегося или покоящегося центра интенсивностей. При этом, картина перемешивания схожа со случаем, когда  $\alpha = 0, \beta < 0$ . Благодаря перемещению пары вихрей и хаотизации динамики частиц, также есть эффект их рассеивания.

Когда  $\alpha \cdot \beta > 0$ , вихри движутся относительно центра интенсивностей с двумя частотами, но вид их траекторий зависит от параметров системы. Динамика частиц при положительных и отрицательных параметрах сдвигового течения качественно отличаются. При  $\alpha < 0, \beta < 0$  перемешивание частиц локализовано в области движения вихревой пары, рис. 5, d. Возникают большие и малые острова регулярной динамики около хаотических областей, см. рис. 6, b. При  $\alpha > 0, \beta > 0$  может возникать обширная область хаотической динамики в виде восьмерки в проекции на плоскость  $(x, y)$ , см. рис. 5, c, а отображение Пуанкаре дано на рис. 6, c. Близкие к вихрям частицы могут покинуть окрестности вихрей, а затем вернуться в нее обратно. Достаточно далекие не принадлежащие области хаоса частицы циркулируют вокруг начала координат по квазипериодической орбите.

Когда  $\alpha \cdot \beta < 0$  при условиях (10), вихревая пара или уносится потоком, совершая вращения вихрей относительно центра интенсивностей, или разрывается. В первом случае вихри захватывают частицы и переносят их, причем частицы рассеиваются по плоскости, а затем отдаляются от вихрей.

**б2.** Рассмотрим сценарии при  $\omega_2 < 0$ . Наиболее простая динамика пары вихрей реализуется при нулевых значениях одного из параметров сдвигового потока. Например, при  $\alpha = 0$  и  $\beta < 0$  вихри движутся по замкнутым орбитам, см. рис. 5, e. Поведение частиц при этом сильно зависит от их начального положения относительно вихрей. При близких начальных данных происходит перемешивание частиц в окрестности вихревой структуры, а из далеких – движение по почти замкнутым орбитам.

Если  $\beta > 0$ , то существует критическое значение этого параметра, при превышении которого пара 'разрывается' и движется попутно к бесконечности с увеличением расстояния между вихрями. При параметрах меньше критического динамика вблизи структуры сходна со случаем  $\beta < 0$ , а при далеких начальных данных частицы переносятся к бесконечности фоновым потоком.

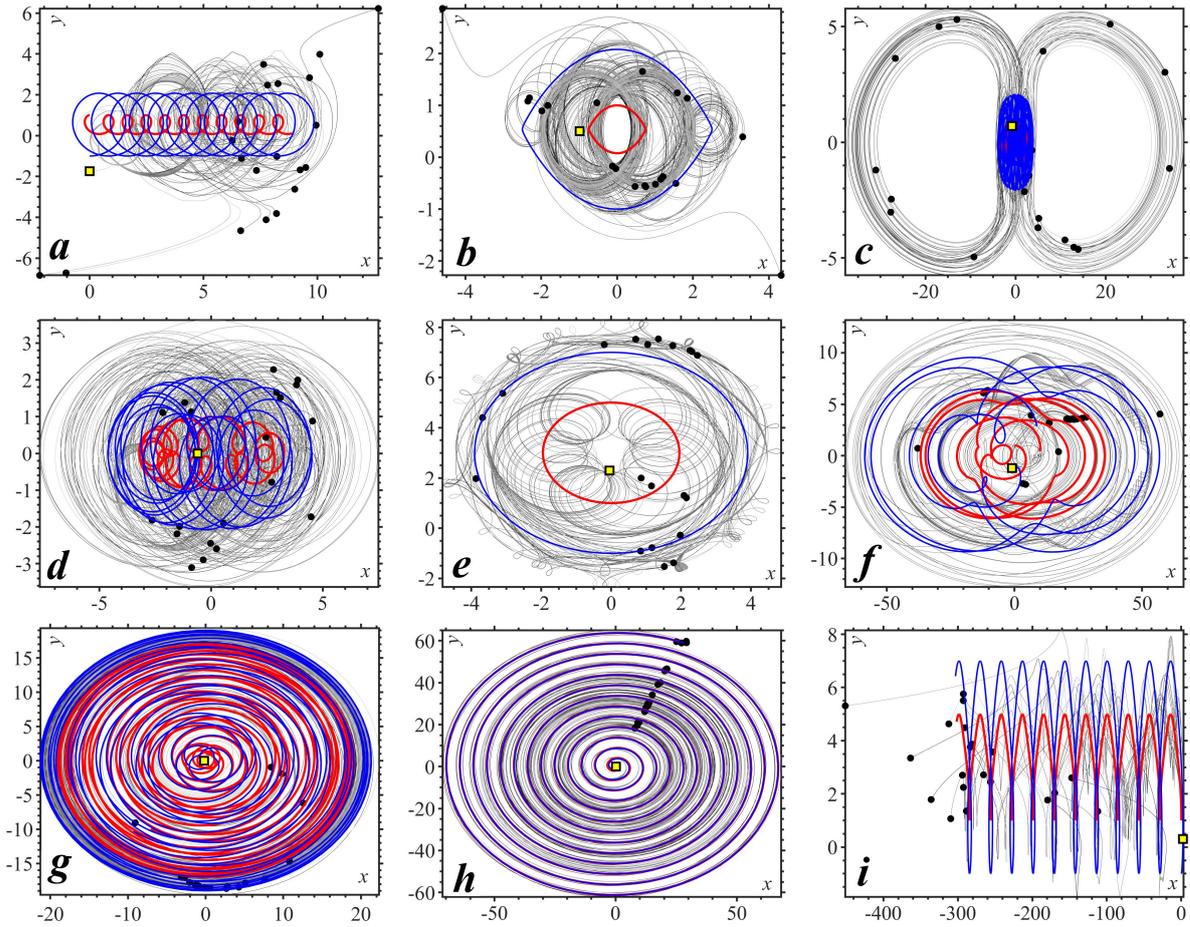


Рис. 5. Траектории вихрей (жирная синяя и красная линии), траектории 20-ти частиц (тонкие серые линии), их начальные (квадрат) и конечное положения (кружки) при значениях параметров и времени: а)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.0125$ ,  $\beta = 0$ ,  $T = 650$ ; б)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.01902$ ,  $T = 1700$ ; в)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.025$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $T = 4000$ ; д)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = -0.025$ ,  $\beta = -0.001$ ,  $T = 2000$ ; е)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -0.001$ ,  $T = 4000$ ; ф)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0.025$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $T = 8000$ ; г)  $\omega_2 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.08$ ,  $T = 2000$ ; з)  $\omega_2 = -1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.08$ ,  $T = 900$ ; и)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = -0.025$ ,  $\beta = 0$ ,  $T = 4000$ .

Fig. 5. Trajectories of vortices (thick blue and red lines), trajectories of 20 particles (thin gray lines), their initial (square) and final positions (circles) for the parameter and time values: а)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.0125$ ,  $\beta = 0$ ,  $T = 650$ ; б)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0.01902$ ,  $T = 1700$ ; в)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.025$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $T = 4000$ ; д)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = -0.025$ ,  $\beta = -0.001$ ,  $T = 2000$ ; е)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -0.001$ ,  $T = 4000$ ; ф)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0.025$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $T = 8000$ ; г)  $\omega_2 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.08$ ,  $T = 2000$ ; з)  $\omega_2 = -1$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.08$ ,  $T = 900$ ; и)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = -0.025$ ,  $\beta = 0$ ,  $T = 4000$ .

При  $\beta = 0$  и  $\alpha$ , не превышающем некоторого критического значения, центр интенсивностей движется вдоль оси абсцисс, а вихри вращаются вокруг него, см. рис. 5, и. Частицы в зависимости от начальных данных рассеиваются в полосе движения структуры. При превышении критического  $\alpha$  вращение пары вихрей прекращается, и она движется к бесконечности с увеличением расстояния между вихрями.

В широком интервале изменения параметров  $\alpha \cdot \beta > 0$  реализуется сценарий сходный с а2. Пара движется, переносится и перемешивает частицы в обширной области на плоскости. Разница с а2 заключается в более сложной динамике вихрей, которая представляет собой комбинацию колебаний относительно перемещающегося согласно (7) центра интенсивностей. Это демонстрируют построенные отображения Пуанкаре для трех наборов параметров

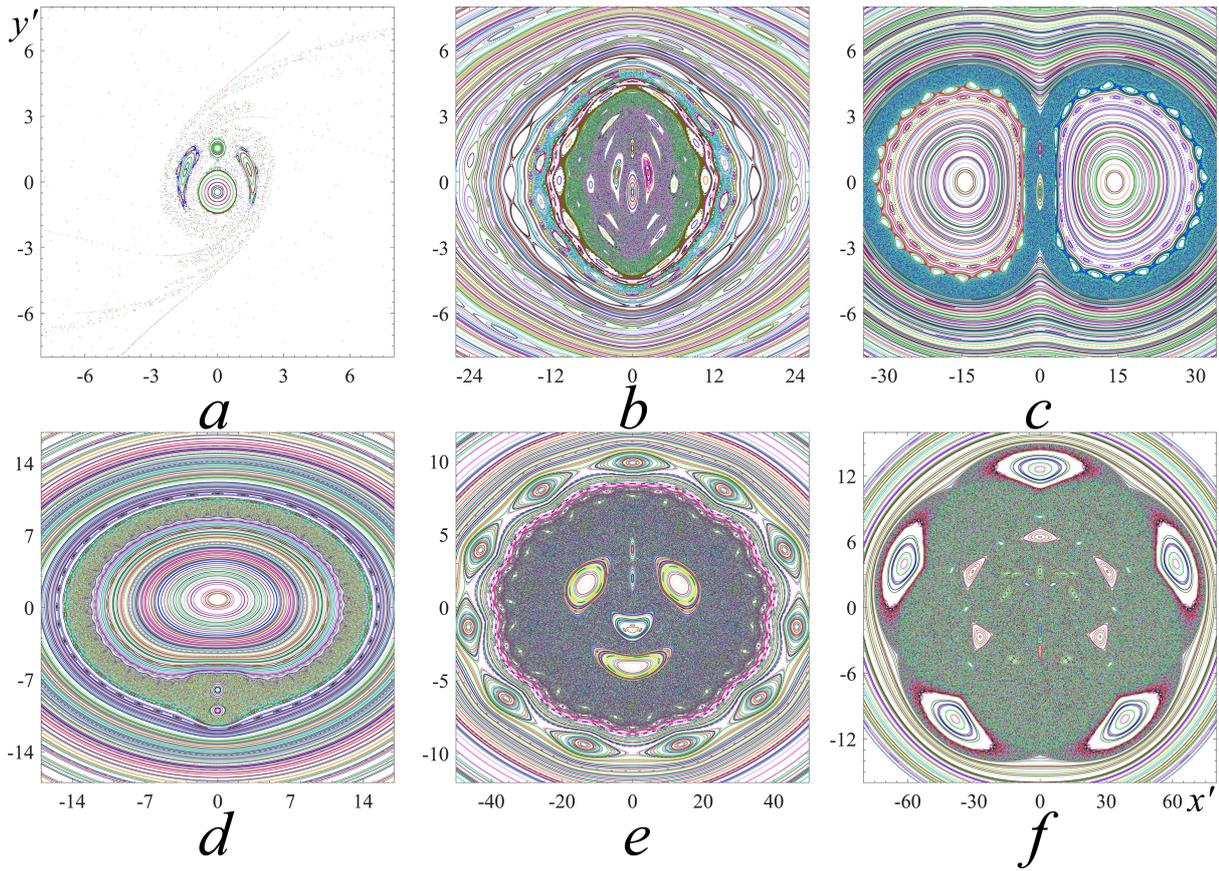


Рис. 6. Отображения Пуанкаре для частиц в системе с фоновым потоком. Отображение рассматривается относительно центра интенсивностей:  $(x', y') = (x - x_c, y - y_c)$ .  $\omega_1 = 1$ , а)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.0125, \beta = 0$  б)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = -0.025, \beta = -0.001$  в)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.025, \beta = 0.001$  д)  $\omega_2 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.16, \beta = 0.08$  е)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = -0.025, \beta = -0.001$  ж)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0.025, \beta = 0.001$ .

Fig. 6. Poincaré maps for particles in a system with a background flow. The map is considered relative to the center of vorticity:  $(x', y') = (x - x_c, y - y_c)$ .  $\omega_1 = 1$ , а)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.0125, \beta = 0$  б)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = -0.025, \beta = -0.001$  в)  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.025, \beta = 0.001$  д)  $\omega_2 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.16, \beta = 0.08$  е)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = -0.025, \beta = -0.001$  ж)  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0.025, \beta = 0.001$

на рис. 6, d-f. Типичная для такого сценария динамика вихрей и пассивных частиц изображена на рис. 5, f. Размер и структура области перемешивания при этом зависит не только от знаков параметров сдвигового потока, но и от соотношения всех параметров системы. Различные области перемешивания демонстрируют маркерные окружности на рис. 7, с,д.

Выделяется случай диполя  $\omega_2 = -1$ , при котором центр завихренности не определен. Если  $\alpha \cdot \beta > 0$ , то диполь движется по раскручивающейся спирали, смотри рис. 5, h. При  $\alpha \cdot \beta < 0$ , происходит однонаправленный уход вихрей на бесконечность, причем скорость одного из вихрей больше скорости другого. При незначительном увеличении  $\omega_2$  динамика вихрей состоит из двух этапов – движение по раскручивающейся спирали до критической ограничивающей кривой, и по закручивающейся спирали к началу координат. Такая динамика изображена на рис. 5, g. Частицы внутри области движения диполя перемешиваются, а извне вращаются вокруг области перемешивания.

Отметим, что при наличии сдвигового течения характерным свойством потока пассивных частиц в большинстве рассмотренных случаев является возникновение областей хаотической динамики. Это приводит к усложнению процессов переноса и перемешивания

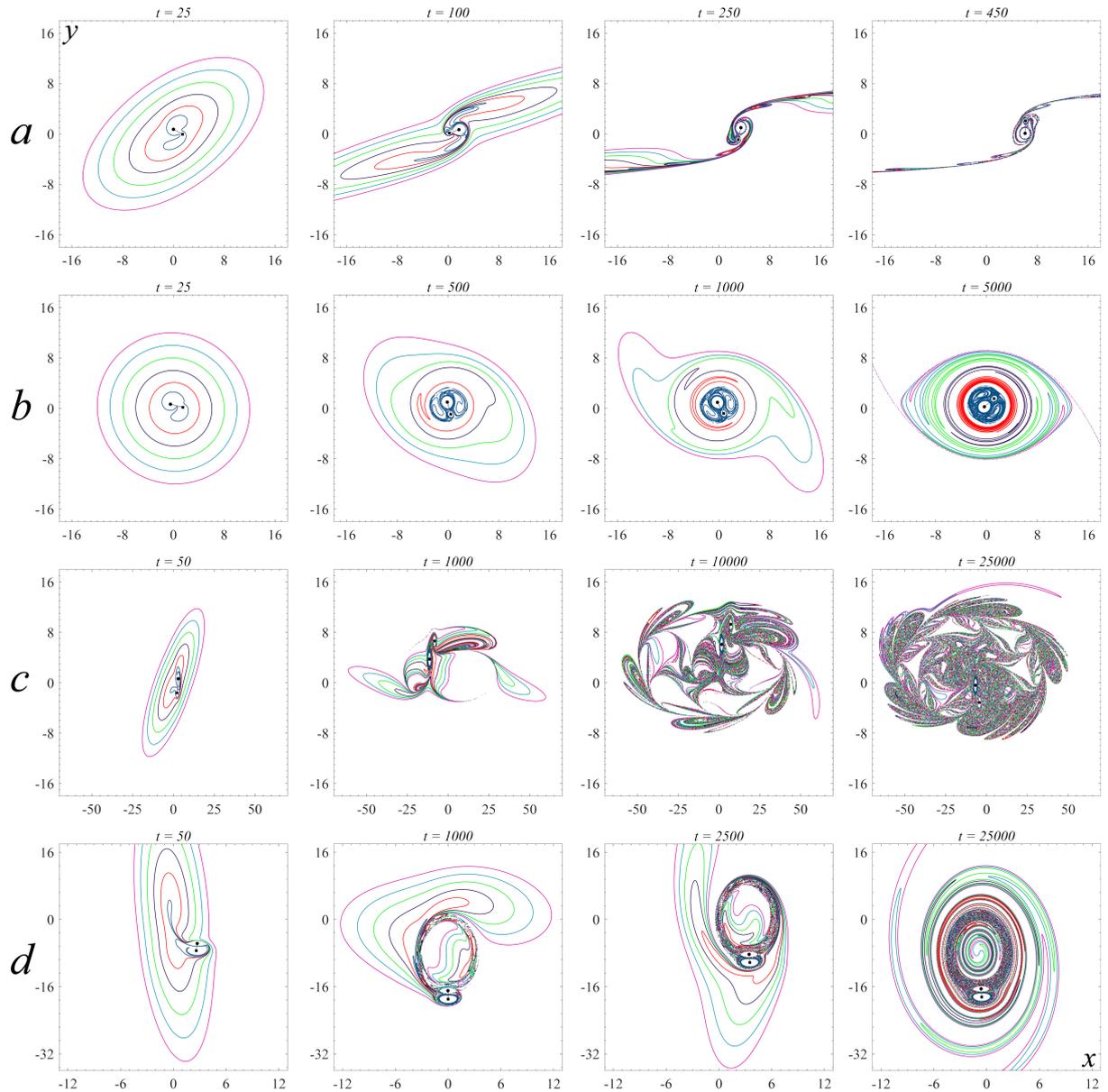


Рис. 7. Динамика шести маркерных окружностей в присутствии сдвигового течения. *a)*  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.0125$ ,  $\beta = 0$ ; *b)*  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -0.001$ ; *c)*  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0.025$ ,  $\beta = 0.001$ ; *d)*  $\omega_2 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.16$ ,  $\beta = 0.08$

Fig. 7. Dynamics of six marker circles in the presence of shear flow. *a)*  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0.0125$ ,  $\beta = 0$ ; *b)*  $\omega_2 = 0.3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -0.001$ ; *c)*  $\omega_2 = -0.5$ ,  $\alpha = 0.025$ ,  $\beta = 0.001$ ; *d)*  $\omega_2 = -0.8$ ,  $\alpha = 0.16$ ,  $\beta = 0.08$

частиц. Это наглядно демонстрирует сравнение полей локальных показателей Ляпунова без сдвигового течения и при его присутствии, смотри рис. 3 и 8. Это также является причиной стохастического рассеяния частиц в ограниченной области, или в полосе движения диполя.

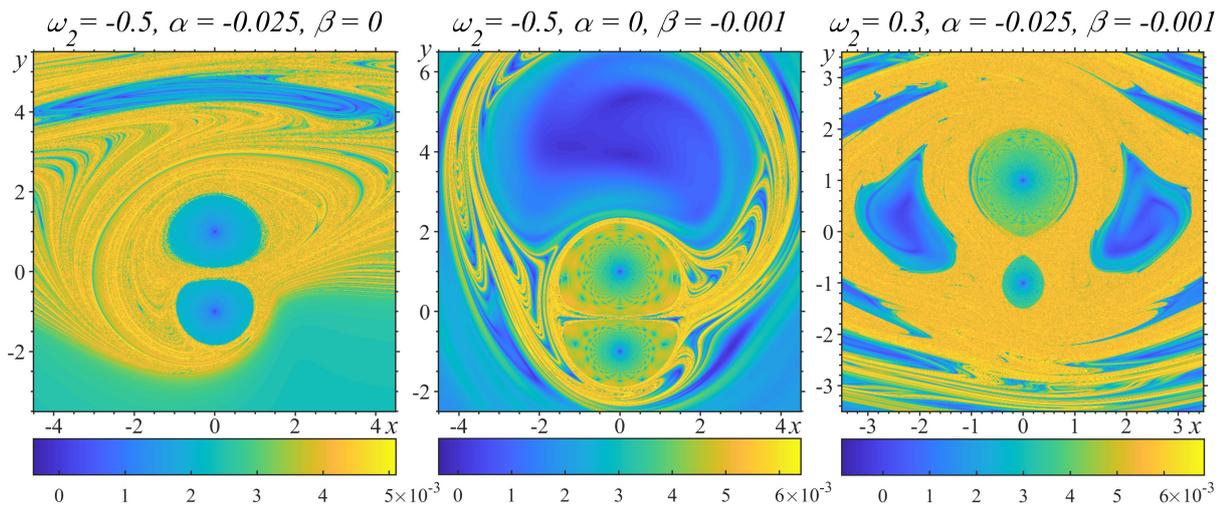


Рис. 8. Поле локальных показателей Ляпунова для  $\omega_2 = -0.5$  в присутствии фоновых течений, определяемых параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  при  $t = 2000$ .

Fig. 8. Local Lyapunov exponents for  $\omega_2 = -0.5$  in the presence of background currents determined by parameters  $\alpha$  and  $\beta$  at  $t = 2000$

#### 4. Заключение

Представленное исследование продемонстрировало большое разнообразие сценариев переноса пассивных частиц парой точечных вихрей на плоскости. В зависимости от знаков интенсивностей вихрей и направления сдвигового потока возможны следующие сценарии: локализация вихрей на плоскости вблизи их центра интенсивностей при перемешивании пассивных частиц в их окрестности; движение пары по круговым орбитам вокруг центра интенсивностей с переносом частиц из его малой окрестности и перемешиванием вблизи орбит; движение вихрей вокруг перемещающегося в поле сдвигового течения центра интенсивностей в достаточно обширной области на плоскости с перемешиванием частиц внутри неё; движение вихрей к бесконечности с переносом части или всех частиц из его окрестности на большие расстояния; распад вихревой пары и движение ее вихрей на бесконечность в противоположные стороны с переносом частиц из их окрестностей на большие расстояния. При наличии сдвигового течения типичным в переносе частиц является их стохастическое рассеивание, что объясняется возникновением областей хаотической динамики в системе движения пассивных частиц.

Несмотря на простоту рассмотренной математической модели двух точечных вихрей полученные результаты частично объясняют разнообразие и сложность динамики при переносе примеси в морских и атмосферных потоках при возникновении вихревых структур. К таким явлениям можно отнести факты переноса примесей на большие расстояния, непредсказуемость динамики частиц жидкости при малом изменении их начального положения, как рассеяние загрязнений по большой площади, так и их локализация в ограниченных областях, и другие эффекты. Другими словами, вихревая конфигурация двух вихрей может быть как «перевозчиком», который перемещает частицы из окрестности своего начального положения на большие расстояния, и практически не захватывает новых частиц по пути своего следования, «перемешивателем» ограниченной области плоскости, так и «рассеивателем» частиц из некоторой начальной области по пути своего движения к бесконечности.

В статье рассмотрено только одно начальное положение вихрей – симметричное от-

носителем оси абсцисс, и сдвигового течения со скоростями, линейно зависящими от вертикальной координаты. Многое в динамике вихрей и пассивных частиц зависит от положения центра интенсивностей, особенно при наличии сдвигового течения. Его расположение определяется интенсивностями вихрей и их начальным положением. В работе изменялась только интенсивность одного из вихрей и параметры сдвигового потока, но этого оказалось достаточно для реализации качественно различных нетривиальных сценариев динамики вихревой структуры и процессов переноса пассивных частиц. Естественно ожидать, что при изменении других характеристик вихрей и сдвигового течения могут возникать и другие, возможно более сложные сценарии. Все результаты получены с помощью методов численного анализа динамических систем, что еще раз продемонстрировало их эффективность для анализа задач математической гидродинамики.

Авторы благодарят анонимного рецензента за полезные замечания. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 23-21-00371 «Развитие вычислительных методов и алгоритмов анализа и идентификации вихревых структур».

### Список литературы

1. *Hughes, C. W., Miller, P. I.* Rapid water transport by long-lasting modon eddy pairs in the southern midlatitude oceans // *Geophysical Research Letters*. 2017. Vol. 44. № 12. p. 375–384. DOI: 10.1002/2017GL075198
2. *Callendar W., Klymak J.M., Foreman M.G.G.* Tidal generation of large sub-mesoscale eddy dipoles, // *Ocean Sci.* 2011. Vol. 7. p. 487–502. DOI: 10.5194/os-7-487-2011
3. *Govorukhin V.N.* An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*. 2022. pp.1–24. DOI: 10.1002/fld.5163
4. *Kilin A.A., Artemova E.M.* Bifurcation Analysis of the Problem of Two Vortices on a Finite Flat Cylinder // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2024. Vol. 20. № 1. p. 95-111 DOI: 10.20537/nd231209
5. *Afanasyev Y.D.* Formation of vortex dipoles // *Physics of Fluids*. 2006. Vol. 18. № 3. art. 037103. DOI: 10.1063/1.2182006.
6. *Trieling R., Dam C., van Heijst G.* Dynamics of two identical vortices in linear shear // *Physics of Fluids*. 2010. Vol.22. № 11. art. 117104. DOI: 10.1063/1.3489358.
7. *Salinas-Rodríguez E., Hernández M. G., Torres A., Valderrama F., Valdés-Parada, F. J.* Dynamic evolution of vortex dipoles // *Revista Brasileira De Ensino De Física*. 2011. Vol. 33(3). art. 3310. DOI: 10.1590/S1806-11172011000300010
8. *Gethner R.* Motion of two point vortices in a steady, linear, and elliptical flow // *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 2001. Vol. 28. Is. 10, p. 571-580. DOI: 10.1155/S0161171201007153
9. *Folz P.J.R., Nomura K.K.* On asymmetric vortex pair interactions in shear // *Journal of Fluid Mechanics*. 2023. art. 969:A21. DOI: 10.1017/jfm.2023.525
10. *Marcus P.S.* Vortex dynamics in a shearing zonal flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1990. Vol. 215. p. 393-430. DOI: 10.1017/S0022112090002695
11. *Ryzhov E.A., Koshel K.V.* Two-point-vortex evolution in an oscillatory shear flow with rotation // *Europhys. Let.* 2014. Vol. 108. № 2. p. 24002. DOI: 10.1209/0295-5075/108/24002
12. *Vic A., Carton X., Gula J.* The Interaction of Two Unsteady Point Vortex Sources in a Deformation Field in 2D Incompressible Flows // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2021. V. 26, N 6, pp. 618-646. DOI: 10.1134/S1560354721060034
13. *Walsh D., Pratt L.J.* The interaction of a pair of point potential vortices in uniform shear // *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1995. V. 22. 3. pp. 135-160. DOI: 10.1016/0377-0265(95)00402-V

14. *Velasco Fuentes O.U., van Heijst G.J.F., Cremers B.E.* (1995). Chaotic transport by dipolar vortices on a  $\beta$ -plane // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. Vol.291(1). p. 139. DOI: 10.1017/s0022112095002655
15. *Говорухин В.Н.* Идентификация и прогноз динамики плоской вихревой структуры на основе математической модели системы точечных вихрей // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, вып. 6. С. 710-726. DOI: 10.18500/0869-6632-003071
16. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Математические методы динамики вихревых структур. М.Ижевск: НИЦ «РХД», Инст. компьютерн. исслед., 2005. 368 с.
17. *Курхогоф Г.* Механика. Лекции по математической физике. М.: АН СССР, 1962.
18. *Didov A.A., Uleysky, M.Y., Budyansky, M.V.* (2020). Stable and unstable periodic orbits and their bifurcations in the nonlinear dynamical system with a fixed point vortex in a periodic flow // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020. Vol. 91. art. 105426. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105426
19. *Ryzhov E.A., Koshel K.V.* Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow // *Chaos*. 2015. Vol. 25(10), p. 103108. DOI: 10.1063/1.4930897
20. *Vetchanin E.V., Mamaev I.S.* Dynamics of two point vortices in an external compressible shear flow // *Regul. Chaotic Dyn.* 2017. Vol. 22. № 8. p. 893–908 DOI: 10.1134/S1560354717080019
21. *Rom-Kedar V., Leonard A., Wiggins S.* An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1990. Vol. 214. p. 347-394. DOI: 10.1017/S0022112090000167
22. *Kuznetsov L., Zaslavsky G.M.* Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system // *Physical Review E*. 1998. Vol. 58. № 6. p. 7330–7349. DOI: 10.1103/physreve.58.7330
23. *Говорухин В.Н.* Перенос пассивных частиц в поле скорости движущегося по плоскости вихревого триполя // *Известия вузов. ПНД*. 2023. Т. 31, вып. 3. С. 286-304. DOI: 10.18500/0869-6632-003039
24. *Delbende I., Selcuk C., Rossi M.* Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach // *Physical Review Fluids*. 2021. Vol.6. №8. art. no. 084701. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701
25. *Кошель К.В., Пранц С.В.* Хаотическая адвекция в океане // *Успехи физических наук*. 2006. Т. 176. № 11 С. 1178-1206. DOI: 10.1070/PU2006v049n11ABEH006066
26. *Aref H., Roenby J., Stremler M.A., Tophøj L.* Nonlinear excursions of particles in ideal 2D flows // *Physica D*. 2011. V. 240. № 2. pp. 199-207. DOI: 10.1016/j.physd.2010.08.007
27. *Anurag A., Goodman R., O'Grady E.* A new canonical reduction of three-vortex motion and its application to vortex-dipole scattering // *Phys. of Fluids*. 2024. V. 36. DOI: 10.1063/5.0208538
28. *Богомолов В.А.* Взаимодействие вихрей в плоскопараллельном потоке // *Изв. АН СССР, Физ. атмосф. и океана*. Т.17, № 2, 1981. С. 199-201
29. *Kimura Y., Hasimoto H.* Motion of two identical point vortices in a simple shear flow // *J. Phys. Soc. Japan*. 1985. V. 54. № 11. p. 4069–4072. DOI: 10.1143/JPSJ.54.4069
30. *Ryzhov E.A., Koshel K.V., Carton X.J.* Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow // *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2012. V.34. p. 121–130. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005
31. *Perrot X., Carton X.* Point-vortex interaction in an oscillatory deformation field: Hamiltonian dynamics, harmonic resonance and transition to chaos // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2009. Vol. 11. № 4. pp. 971-995. DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.971

32. The MathWorks. <https://www.mathworks.com>.
33. *Verner J.H.* Numerically Optimal Runge–Kutta Pairs with Interpolants // Numerical Algorithms. 2010. V. 53, № 2–3. p. 383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3
34. *Govorukhin V.* ode87 Integrator. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>
35. *Shadden S.C., Lekien F., Marsden J.E.* Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows // Physica D. 2005. V. 212, p. 271–304. DOI: 10.1016/J.PHYSD.2005.10.007
36. *Haller G.* Finding finite -time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields // Chaos. 2000. V. 10, p. 99–108. DOI: 10.1063/1.166479
37. *Говорухин В.Н., Филимонова А.М.* Анализ структуры плоских вихревых течений и их изменений во времени // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. т. 14. № 4. с. 367–376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30
38. *Govorukhin V.N., Morgulis A., Yudovich V.I., Zaslavsky G.M.* Chaotic advection in compressible helical flow // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60, no. 3. P. 2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.

## References

1. Hughes CW, Miller PI. Rapid water transport by long-lasting modon eddy pairs in the southern midlatitude oceans. Geophysical Research Letters. 2017; 44:12,375–12,384. DOI: 10.1063/1.3489358.
2. Callendar W, Klymak JM, Foreman MGG. Tidal generation of large sub-mesoscale eddy dipoles. Ocean Sci. 2011; 7:487–502. DOI: 10.5194/os-7-487-2011
3. Govorukhin VN. An extended and improved particle-spectral method for analysis of unsteady inviscid incompressible flows through a channel of finite length. Int J Numer Meth Fluids. 2023; 95(4):579–602. DOI: 10.1002/fld.5163
4. Kilin AA, Artemova EM. Bifurcation Analysis of the Problem of Two Vortices on a Finite Flat Cylinder. Rus. J. Nonlin. Dyn. 2024; Vol. 20(1):95-111 DOI: 10.20537/nd231209
5. Afanasyev YD. Formation of vortex dipoles. Physics of Fluids. 2006; 18(3):037103. DOI: 10.1063/1.2182006.
6. Trieling RR, Dam CEC, van Heijst GJF. Dynamics of two identical vortices in linear shear. Physics of Fluids. 2010; 22(11):117104. DOI: 10.1063/1.3489358.
7. Salinas-Rodríguez E, Hernández MG, Torres A, Valderrama F, Valdés-Parada FJ. Dynamic evolution of vortex dipoles. Revista Brasileira De Ensino De Física. 2011; 33(3): 3310. DOI: 10.1590/S1806-11172011000300010
8. Gethner R. Motion of two point vortices in a steady, linear, and elliptical flow. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2001; 28(10):571-580. DOI: 10.1155/S0161171201007153
9. Folz PJR, Nomura KK. On asymmetric vortex pair interactions in shear. Journal of Fluid Mechanics. 2023; 969:A21. DOI: 10.1017/jfm.2023.525
10. Marcus PS. Vortex dynamics in a shearing zonal flow. Journal of Fluid Mechanics. 1990; 215:393–430. DOI: 10.1017/S0022112090002695
11. Ryzhov EA, Koshel KV. Two-point-vortex evolution in an oscillatory shear flow with rotation. Europhysics Letters. 2014; 108(2):24002. DOI: 10.1209/0295-5075/108/24002
12. Vic A, Carton X, Gula J. The Interaction of Two Unsteady Point Vortex Sources in a Deformation Field in 2D Incompressible Flows. Regular and Chaotic Dynamics. 2021; 26(6):618-646. DOI: 10.1134/S1560354721060034

13. Walsh D, Pratt LJ. The interaction of a pair of point potential vortices in uniform shear. *Dynamics of Atmospheres and Oceans*. 1995; 22(3):135-160.  
DOI: 10.1016/0377-0265(95)00402-V
14. Velasco Fuentes OU, van Heijst GJF, Cremers BE. Chaotic transport by dipolar vortices on a  $\beta$ -plane. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995; 291(1):139.  
DOI: 10.1017/s0022112095002655
15. Govorukhin VN. Identification and dynamics prediction of a plane vortex structure based on a mathematical model of a point vortices system. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023; 31(6):710-726. DOI: 10.18500/0869-6632-003071
16. Borisov AV, Mamaev IS. *Mathematical methods in the dynamics of vortex structures*. Moscow–Izhevsk: Institute of Computer Science, 2005; 368 p. (In Russian).
17. Kirchhoff G. *Lectures in Mathematical Physics. Mechanics*. Teubner Leipzig. 1877
18. Didov AA, Uleysky MY, Budyansky MV. Stable and unstable periodic orbits and their bifurcations in the nonlinear dynamical system with a fixed point vortex in a periodic flow. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020; 91:105426.  
DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105426
19. Ryzhov EA, Koshel KV. Global chaotization of fluid particle trajectories in a sheared two-layer two-vortex flow. *Chaos*. 2015; 25(10):103108. DOI: 10.1063/1.4930897
20. Vetchanin EV, Mamaev IS. Dynamics of two point vortices in an external compressible shear flow. *Regul. Chaotic Dyn*. 2017; 22(8):893–908 DOI: 10.1134/S1560354717080019
21. Rom-Kedar V, Leonard A, Wiggins S. An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1990; 214:347-394.  
DOI: 10.1017/S0022112090000167
22. Kuznetsov L, Zaslavsky GM. Regular and chaotic advection in the flow field of a three-vortex system. *Physical Review E*. 1998; 58(6):7330–7349. DOI: 10.1103/physreve.58.7330
23. Govorukhin VN. Transfer of passive particles in the velocity field of vortex tripole moving on a plane. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023; 31(3):286-304.  
DOI: 10.18500/0869-6632-003039
24. Delbende I, Selcuk C, Rossi M. Nonlinear dynamics of two helical vortices: A dynamical system approach. *Physical Review Fluids*. 2021; 6(8):084701.  
DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.084701
25. Koshel KV, Prants SV. Chaotic advection in the ocean. *Phys. Usp*. 2006; 49:1151–1178  
DOI: 10.1070/PU2006v049n11ABEH006066
26. Aref H, Roenby J, Stremmer MA, Tophøj L. Nonlinear excursions of particles in ideal 2D flows. *Physica D*. 2011; 240(2):199-207.  
DOI: 10.1016/j.physd.2010.08.007
27. Anurag A, Goodman R, O’Grady E. A new canonical reduction of three-vortex motion and its application to vortex-dipole scattering. *Physics of Fluids*. 2024; 36(6):067110.  
DOI: 10.1063/5.0208538
28. Bogomolov VA. Interaction of vortices in plane-parallel flow. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences, Physics of atmosphere and ocean*. 1981; 17(2):199–201.
29. Kimura Y, Hasimoto H. Motion of two identical point vortices in a simple shear flow. *J. Phys. Soc. Japan*. 1985; 54(11):4069–4072. DOI: 10.1143/JPSJ.54.4069
30. Ryzhov EA, Koshel KV, Carton XJ. Passive scalar advection in the vicinity of two point vortices in a deformation flow. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*. 2012; 34:121–130.  
DOI: 10.1016/j.euromechflu.2012.01.005
31. Perrot X., Carton X. Point-vortex interaction in an oscillatory deformation field: Hamiltonian dynamics, harmonic resonance and transition to chaos. *Discrete and Continuous Dynamical*

- Systems - B. 2009; 11(4):971-995. DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.971
32. The MathWorks. <https://www.mathworks.com>.
  33. Verner JH. Numerically Optimal Runge–Kutta Pairs with Interpolants. Num. Algorithms. 2010; 53(2–3):383–396. DOI: 10.1007/s11075-009-9290-3
  34. Govorukhin V. ode87 Integrator. <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/3616-ode87-integrator>
  35. Shadden SC, Lekien F, Marsden JE. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. Physica D. 2005; 212:271-304. DOI: 10.1016/J.PHYSD.2005.10.007
  36. Haller G. Finding finite -time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. Chaos. 2000; 10:99-108. DOI: 10.1063/1.166479
  37. Govorukhin VN, Filimonova AM. Analysis of the structure of vortex planar flows and their changes with time. Comput. Cont. Mechanics. 2021; 14(4):367-376. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.4.30
  38. Govorukhin VN, Morgulis A, Yudovich VI, Zaslavsky GM. Chaotic advection in compressible helical flow. Phys. Rev. E. 1999; 60(3):2788–2798. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2788.

*Говорухин Василий Николаевич* — родился в Ростове-на-Дону (1962), окончил механико-математический факультет Ростовского госуниверситета (1984). Защитил докторскую (2021) диссертацию в области численного исследования вихревых и конвективных течений жидкости. Опубликовал более 75 научных статей по вычислительной математике, гидродинамике, математической биологии и нелинейной динамике. Работает профессором кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики в институте математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета.



Россия, 344090 г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а,  
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ  
 E-mail: [vngovoruhin@sfedu.ru](mailto:vngovoruhin@sfedu.ru)  
 ORCID: 0000-0001-8459-7841  
 AuthorID (eLibrary.Ru): 13438

*Гончаров Борис Константинович* — родился в Ростове-на-Дону (2003), бакалавр Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета. Специализируется в области математического моделирования динамики жидкости на кафедре теоретической и компьютерной гидроаэродинамики.



Россия, 344090 г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова 8а,  
 Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ  
 E-mail: [bgoncharov@sfedu.ru](mailto:bgoncharov@sfedu.ru)  
 ORCID: 0009-0006-7544-1814