

## О вероятностном описании возникновения асинхронных фаз в режиме перемежающейся обобщённой синхронизации одномерных отображений

А. А. Короновский<sup>1</sup>✉, О. И. Москаленко<sup>1</sup>, А. О. Сельский<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени  
Н. Г. Чернышевского, Россия

E-mail: ✉alexey.koronovskii@gmail.com, o.i.moskalenko@gmail.com, selskii@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.09.2024, принята к публикации 22.10.2024,  
опубликована онлайн 06.12.2024

**Аннотация.** Цель настоящего исследования заключается в объяснении и описании с помощью вероятностной модели процесса разрушения стадии синхронного поведения и возникновения участка асинхронной динамики в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации в одномерных динамических системах с дискретным временем. **Методы.** В данной работе используется вероятностная модель для количественного описания наблюдаемых характеристик поведения однонаправленно связанных хаотических систем вблизи границы установления синхронного режима. **Результаты.** Получено аналитическое выражение для вероятности наблюдения разрушения синхронной фазы на интервале фиксированной длительности в предположении равномерно распределённой величины, а также форма плотности вероятности состояния системы для участков разрушения синхронной динамики. **Заключение.** В работе приведены количественные оценки процесса разрушения участков синхронного поведения в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации для одномерных динамических систем с дискретным временем. Показана общность процессов вблизи границы установления синхронного режима для обобщённой хаотической синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом.

**Ключевые слова:** перемежающаяся обобщённая хаотическая синхронизация, индуцированная шумом синхронизация, ламинарная фаза, разрушение синхронного поведения, отображения, случайный сигнал.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Регионального научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего” (соглашение № 075-02-2024-1443 от 28 февраля 2024 г.).

**Для цитирования:** Короновский А. А., Москаленко О. И., Сельский А. О. О вероятностном описании возникновения асинхронных фаз в режиме перемежающейся обобщённой синхронизации одномерных отображений // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 2. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003149. EDN: DCOYIK

Статья опубликована на условиях Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).

## On the probabilistic description of the asynchronous phases occurrence in intermittent generalized synchronization regime of one-dimensional maps

A. A. Koronovskii<sup>1</sup>✉, O. I. Moskalenko<sup>1</sup>, A. O. Selskii<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Saratov State University, Russia

E-mail: ✉alexey.koronovskii@gmail.com, o.i.moskalenko@gmail.com, selskii@ao.sgu.ru

Received 13.09.2024, accepted 22.10.2024, available online 06.12.2024

**Abstract.** The purpose of the present study is to explain and describe (with the help of the probabilistic model) the process of breaking the stage of synchronous behavior and the emergence of a section of asynchronous dynamics in the regime of intermittent generalized chaotic synchronization in one-dimensional dynamical systems with discrete time. *Methods.* In this paper, a probabilistic model is used to quantitatively describe the observed characteristics of the behavior of two unidirectionally coupled systems being near the onset of the synchronous regime. *Results.* An analytical expression for the probability to observe the destruction of the synchronous phase on an interval of fixed duration under the assumption of uniformly distributed variable, as well as the form of the probability density function of the system state for the destruction intervals of synchronous dynamics are obtained. *Conclusion.* The paper presents quantitative estimates of the process of destruction of synchronous behavior in the regime of intermittent generalized chaotic synchronization for one-dimensional dynamical systems with discrete time. The generality of processes near the boundary of the synchronous motion for generalized chaotic synchronization and noise-induced synchronization is shown.

**Keywords:** partial directed coherence, coupling, nonlinearity, nonlinear systems, nonlinear coupling, high-dimensional system.

**Acknowledgements.** This work was supported by Regional Scientific and Educational Mathematical Center “Mathematics of Future Technologies”.

**For citation:** Koronovskii AA, Moskalenko OI, Selskii AO. On the probabilistic description of the asynchronous phases occurrence in intermittent generalized synchronization regime of one-dimensional maps. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics.* 2025;33(2):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003149

*This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution License (CC-BY 4.0).*

### Введение

На сегодняшний день хорошо известно, что установлению различных типов синхронизации хаотических осцилляторов, как с непрерывным, так и дискретным временем, предшествует перемежающееся поведение, причём тип перемежаемости определяется типом синхронной динамики и параметрами взаимодействующих систем [1–5]. Настоящая работа направлена на изучение перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации [6–8], предшествующей возникновению обобщённой хаотической синхронизации [9, 10], а именно на выявление механизмов разрушения участков синхронной динамики (так называемых “ламинарных фаз”), приводящих к формированию интервалов асинхронного поведения (“турбулентных фаз”).

Обобщённая хаотическая синхронизация, как известно, наблюдается в системах и с дискретным, и с потоковым временем. Самым низкоразмерным классом динамических систем, в котором наблюдается явление обобщённой хаотической синхронизации, является класс одномерных отображений, а в качестве экземпляра объекта, принадлежащего этому классу, в качестве исследуемой системы часто используется логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda) = \lambda x_n(1 - x_n). \quad (1)$$

В однонаправленно связанных динамических системах обобщённая хаотическая синхронизация возникает, когда состояние ведомой системы полностью определяется состоянием ведущего осциллятора. В вышеуказанном случае однонаправленно связанные одномерные хаотические осцилляторы с дискретным временем задаются оператором эволюции

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, \lambda_d), \\ y_{n+1} &= f(y_n, \lambda_r) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_d) - f(y_n, \lambda_r)), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — управляющий параметр, задающий интенсивность связи взаимодействующих осцилляторов,  $\lambda_d \neq \lambda_r$  — управляющие параметры каждой из систем, а условие режима обобщённой хаотической синхронизации задаётся требованием существования функционала

$$y_n = F(x_n), \quad (3)$$

явный вид которого, в общем случае, неизвестен. Для детектирования режима обобщённой хаотической синхронизации могут использоваться различные численные методы, такие как расчёт условных показателей Ляпунова [6, 11, 12], метод ближайших соседей [9], метод фазовых трубок [13], но в случае однонаправленно связанных хаотических осцилляторов наиболее удобным, простым и наглядным является метод вспомогательной системы [14]. Суть данного метода заключается во введении в рассмотрение дополнительной (вспомогательной) системы

$$z_{n+1} = f(z_n, \lambda_r) + \varepsilon(f(x_n, \lambda_d) - f(z_n, \lambda_r)), \quad (4)$$

которая является идентичной ведомой системе, но стартует с других начальных условий ( $z_0 \neq y_0$ ), лежащих в бассейне притяжения того же самого аттрактора, к которому сходятся фазовые траектории ведомой системы. В этом случае, в силу соотношения (3) в режиме обобщённой хаотической синхронизации выполняется условие

$$z_n = y_n, \quad (5)$$

что и является критерием наличия режима обобщённой хаотической синхронизации. Ниже критического значения параметра связи  $\varepsilon_c$ , соответствующего установлению синхронного режима, условие (5) выполняется не всегда, а лишь на отдельных временных интервалах, тогда как на других участках временной реализации вышеуказанное условие (5) не выполняется. Иными словами, в системе наблюдается явление перемежаемости, когда два различных динамических режима (синхронный и асинхронный) последовательно сменяют друг друга при одних и тех же фиксированных значениях управляющих параметров. Участки синхронного поведения, где выполняется условие (5), в соответствии с принятой в теории перемежаемости терминологией называются также “ламинарными фазами”, тогда как участки с асинхронной динамикой — “турбулентными фазами”.

Перемежающееся поведение классических типов I–III, как хорошо известно [15], связано с прохождением изображающей точкой определённой области в фазовом пространстве исследуемой системы. Именно эта область отвечает за формирование ламинарных фаз поведения. В одномерных динамических системах с дискретным временем это хорошо видно на примере “коридора” между графиком отображения и биссектрисой на диаграмме Ламерея для перемежаемости I-го типа [15], а для потоковых систем, в свою очередь, это может быть выявлено с помощью процедуры сечения Пуанкаре [16]. В силу универсальности явления перемежаемости, можно было бы ожидать, что и перемежающееся поведение вблизи границы установления режима обобщённой хаотической синхронизации должно быть обусловлено схожими механизмами. Однако, попытки локализации областей, которые

отвечают за синхронную (ламинарные фазы), или, наоборот, асинхронную (турбулентные фазы) динамику, в фазовом пространстве ведущей, ведомой или в обобщённом фазовом пространстве ведущей и ведомой систем, к видимым успехам не приводят. Более того, последние исследования на примере дискретных отображений показывают, что разрушение синхронного поведения (разрушение ламинарных фаз), и, соответственно, сама перемежаемость, имеют вероятностный характер [17]. С учётом последних актуальных результатов, в настоящей работе с помощью вероятностной модели и с учётом тесной взаимосвязи между обобщённой и индуцированной шумом хаотическими синхронизациями [18] предложено количественное объяснение механизма разрушения ламинарных фаз перемежающегося поведения вблизи границы установления синхронного режима для одномерных динамических систем с дискретным временем.

## 1. Разрушение ламинарных фаз

В те моменты времени, когда в однонаправленно связанных одномерных динамических системах с дискретным временем, находящихся в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации, реализуется синхронная (ламинарная) фаза динамики, состояния ведомой и вспомогательной систем очень близки друг к другу, и, соответственно, разность

$$\xi_n = y_n - z_n \quad (6)$$

между состояниями этих систем по абсолютной величине близка к нулю. При разрушении синхронного режима величина  $\xi_n$  начинает возрастать по модулю, что соответствует нарастанию различий в состояниях ведомой  $y_n$  и вспомогательной  $z_n$  систем. Соответственно, превышение величиной  $\xi_n$  некоторого наперед установленного порога  $\Delta$  (в абсолютных или относительных величинах) может использоваться как критерий разрушения синхронной фазы динамики изучаемой системы.

Изменение величины  $\xi_n$  с течением дискретного времени, с учётом (2) и (4), определяется соотношением

$$\xi_{n+1} = y_{n+1} - z_{n+1} = (1 - \varepsilon) (f(y_n, \lambda_r) - f(z_n, \lambda_r)). \quad (7)$$

При условии, что изменение величины  $\xi_n$  с течением дискретного времени будет рассматриваться для ламинарных фаз и относительно небольших сегментов временной реализации, соответствующих началу разрушения синхронного поведения (“выхода” из ламинарной фазы), величина  $\xi_n$  может считаться малой по абсолютной величине,

$$|\xi_n| \ll 1, \quad (8)$$

и, соответственно, соотношение (7) в этом случае может быть приведено к виду

$$\xi_{n+1} = g'(y_n)\xi_n = (1 - \varepsilon)f'(y_n, \lambda_r)\xi_n. \quad (9)$$

Следует отметить, что в соотношение (9) входит производная от функции

$$g(y_n) = (1 - \varepsilon)f(y_n, \lambda_r), \quad (10)$$

которая является оператором эволюции *модифицированной системы*, используемой для качественного и количественного описания явления обобщённой хаотической синхронизации [17, 19].

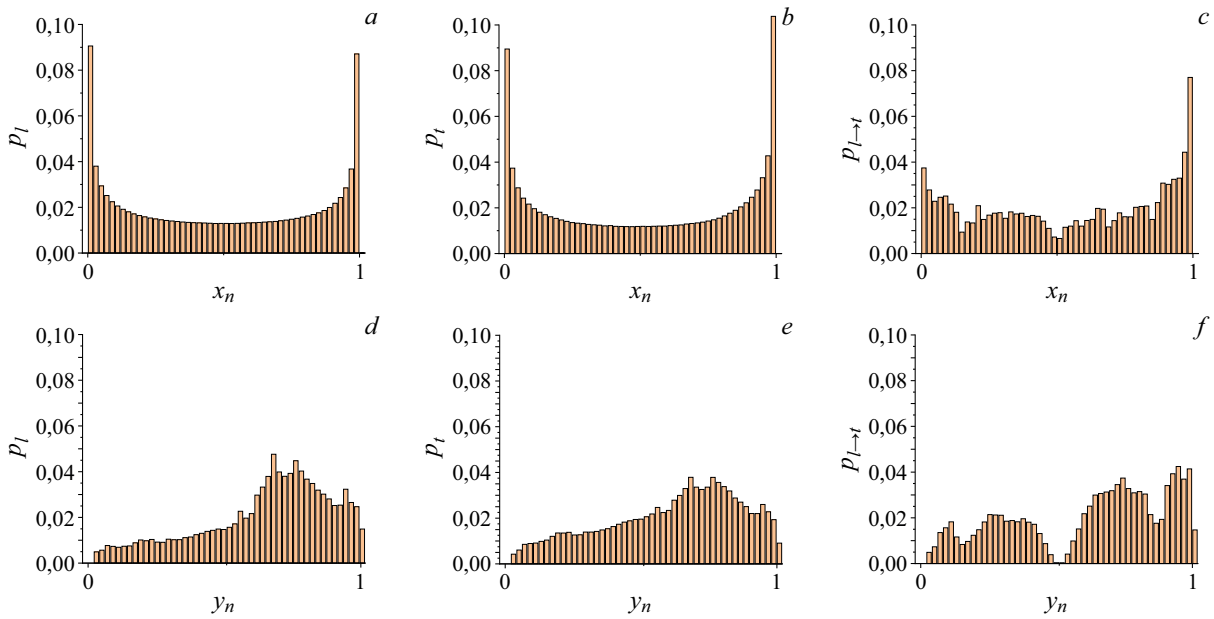


Рис. 1. Плотности распределения вероятности динамических переменных  $x_n, y_n$  однонаправленно связанных логистических отображений (2) для ведущей (a)–(c) и ведомой (d)–(f) систем, полученные для ламинарных  $p_l(x_n)$  (a),  $p_l(y_n)$  (d) и турбулентных  $p_t(x_n)$  (b),  $p_t(y_n)$  (d) фаз, а также для интервалов времени, соответствующих разрушению синхронного движения и переходу от ламинарного поведения к турбулентному  $p_{l \rightarrow t}(x_n)$  (c),  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  (f). Значения управляющих параметров  $\lambda_d = 4.0$ ,  $\lambda_r = 3.95$ ,  $\varepsilon = 0.32$

Таким образом, на нарастание/уменьшение разности между состояниями ведомой и вспомогательной систем  $\xi_n$  в соотношении (9) явным образом влияет текущее состояние ведомой системы  $y_n$ , на которое, в свою очередь, в силу соотношения (2), оказывает влияние текущее состояние ведущей системы  $x_n$ . В работе [17] было показано, что плотности распределения динамических переменных как для ведущей, так и ведомой систем (в рассматриваемом случае,  $p(x_n)$  и  $p(y_n)$ ) во время ламинарных и турбулентных фаз оказываются практически одинаковыми, т.е.  $p_l(x_n) \approx p_t(x_n)$  и  $p_l(y_n) \approx p_t(y_n)$ . В то же самое время, для участков временных реализаций, соответствующих переходам от ламинарных фаз к турбулентным, на которых и происходит резкое возрастание разности состояний ведомой и вспомогательной систем, распределение  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  претерпевает существенную трансформацию и заметно отличается от распределений  $p_l(y_n)$  и  $p_t(y_n)$ . Аналогичное распределение для ведущей системы  $p_{l \rightarrow t}(x_n)$ , в свою очередь, меняется не столь радикально и остаётся качественно таким же, как и в случае ламинарных  $p_l(x_n)$  и турбулентных  $p_t(x_n)$  фаз, хотя и оказывается несколько более “изрезанным”. Соответствующие распределения, полученные для двух однонаправленно связанных логистических отображений (2) при значениях управляющих параметров  $\lambda_d = 4.0$  и  $\lambda_d = 3.95$ , несколько отличающихся от использованных в работе [17], приведены на рис. 1. Из рис. 1 видно, что плотность распределения  $p_{l \rightarrow t}(y_n)$  динамической переменной  $y_n$  ведомой системы, полученная для участков разрушения синхронного движения, обладает характерным “клювом”, достигающим почти нулевого значения в точке  $y_c = 0.5$ , соответствующей экстремуму отображения модифицированной системы (10).

В работе [17] показано (что подтверждается и рис. 1), что переход от синхронного поведения к асинхронному в рамках перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации может быть описан в рамках вероятностной модели. В пользу данного утверждения

свидетельствует также факт очень тесной взаимосвязи [18] между явлениями обобщённой хаотической синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом [20–22]. Для количественного и качественного объяснения механизмов, приводящих к разрушению синхронного поведения в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации, рассмотрим в следующем разделе статьи вероятностную модель данного явления.

## 2. Вероятностная модель разрушения ламинарных фаз

Поскольку в данном случае рассматривается одномерное отображение, введем в рассмотрение одномерную случайную величину  $\zeta$ , которая будет играть роль, аналогичную переменной ведомой системы  $y$ . Отличие в данном случае будет заключаться лишь в том, что динамика переменной  $y_n$  является полностью детерминированной, хотя и хаотической, и обусловлена видом отображения (1) и значениями управляющих параметров  $\lambda_d$ ,  $\lambda_r$  и  $\varepsilon$ , тогда как поведение величины  $\zeta_n$  будем полагать полностью случайным. Переменная  $y_n$ , в силу особенностей оператора эволюции, локализована в интервале  $(0; 1)$ , поэтому, для простоты будем считать, что величина  $\zeta_n$  равномерно распределена на единичном интервале  $[0; 1]$ , иными словами,

$$p_\zeta(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in [0; 1], \\ 0, & \zeta \notin [0; 1], \end{cases} \quad \int_0^1 p_\zeta(\zeta) d\zeta = 1. \quad (11)$$

Поскольку в рассматриваемой вероятностной модели величина  $\zeta$  играет роль динамической переменной  $y$ , будем считать, что динамика величины  $\xi_n$ , описывающей разность между состояниями ведомой и вспомогательной систем (6), определяется соотношением

$$\xi_{n+1} = g'(\zeta_n)\xi_n, \quad (12)$$

аналогичным соотношению (9), где  $g'(\zeta) = \lambda_r(1 - \varepsilon)(1 - 2\zeta)$ . За интервал дискретного времени длиной  $L$  расстояние между состояниями ведомой и вспомогательной систем изменяется по абсолютной величине в  $\kappa$  раз

$$\kappa = \prod_{i=n+1}^{n+L} |g'(\zeta_i)|. \quad (13)$$

Для того, чтобы произошло разрушение ламинарного движения, на ограниченном и достаточно коротком временном интервале дискретного времени длиной  $L$ , величина  $\kappa$  должна быть существенно больше единицы. Будем считать, что разрушение ламинарной фазы происходит при превышении величиной  $\kappa$  некоторого наперед установленного порога  $H \gg 1$ . В [17] эмпирическим путём было установлено, что длина участка, на котором происходит разрушение синхронной динамики и осуществляется переход от ламинарной фазы к турбулентной для рассматриваемых логистических отображений (2) при использованных в [17] значениях управляющих параметров, составляет примерно  $L = 12$  единиц дискретного времени. Выбор более длинного участка в качестве переходной области ведет к тому, что в данную выборку начинают попадать точки, фактически принадлежащие ещё к ламинарной или уже к турбулентной фазе, что приводит к искажению результата. Очевидно, что чем длиннее анализируемый интервал, тем ближе получаются статистические характеристики к характеристикам, полученным по полному временному ряду, и, соответственно, тем менее выраженным оказывается влияние исследуемого механизма. С другой стороны, выбор

более коротких временных отрезков для анализа процессов перехода, приводит к бедности статистики и, опять-таки же, к искажению количественных характеристик исследуемого явления.

В том случае, когда функции  $g(\zeta)$  и  $p_\zeta(\zeta)$  симметричны относительно центра распределения величины  $\zeta_c$  (как, например, в рассматриваемой задаче, где  $\zeta_c = 0.5$ ), для удобства можно выполнить замену переменных

$$\eta = 2(\zeta - \zeta_c). \quad (14)$$

Теперь, в силу симметрии, можно рассматривать только диапазон  $\eta \geq 0$  (в рассматриваемом случае  $\eta \in [0; 1]$ ), а в качестве плотности распределения случайной величины  $\eta$  использовать

$$p(\eta) = 2p_\zeta\left(\frac{\eta + 2\zeta_c}{2}\right). \quad (15)$$

Для равномерной плотности распределения (как в данном случае), на рассматриваемом интервале  $[0; 1]$  имеем

$$p(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta \in [0; 1], \\ 0, & \eta > 1, \end{cases} \quad \int_0^1 p(\eta) d\eta = 1. \quad (16)$$

С учётом проведённой замены переменных (14) соотношение (13) может быть записано в виде

$$\kappa = \prod_{i=n+1}^{n+L} \lambda_r(1 - \varepsilon)\eta_i. \quad (17)$$

Соответственно, условие разрушения синхронного движения примет вид

$$\eta_1 \times \eta_2 \times \dots \times \eta_L \geq \frac{H}{(\lambda_r(1 - \varepsilon))^L} = \delta, \quad (18)$$

причём все  $\eta_i$  в соотношении (18) положительны и лежат в интервале  $[0; 1]$ . Величина  $\delta$ , в свою очередь, зависит от управляющих параметров  $H$ ,  $\lambda_r$  и  $\varepsilon$ , и не может быть больше единицы.

Рассматривая диапазон возможных значений величины  $\eta_1$ , понятно, что условие (18) может выполняться только, если  $\eta_1$  находится в интервале  $[\delta; 1]$ , причём для нижней границы  $\eta_1 = \delta$  выполнение (18) возможно лишь при условии  $\eta_2 \times \dots \times \eta_L = 1$ . Аналогично, для  $\eta_2$  соотношение (18) будет выполняться для значений из диапазона  $[\delta/\eta_1; 1]$  при выполненном условии  $\eta_1 \in [\delta; 1]$ . Продолжая соответствующие рассуждения по цепочке, можно получить, что для выполнения условия (18) все последующие величины  $\eta_i$  ( $i = 3, \dots, L$ ) должны находиться в диапазонах  $\eta_3 \in [\delta/(\eta_1\eta_2); 1]$ ,  $\dots$ ,  $\eta_L \in [\delta/(\eta_1\eta_2 \dots \eta_{L-1}); 1]$ . Вероятность реализации такого события для произвольной плотности распределения вероятности  $p(\eta)$  будет определяться как условная вероятность осуществления каждого из вышеупомянутой цепочки событий

$$P(\delta, L) = \int_{\delta}^1 p(\eta_1) \int_{\delta/\eta_1}^1 p(\eta_2) \dots \int_{\delta/(\eta_1\eta_2 \dots \eta_{L-1})}^1 p(\eta_L) d\eta_L \dots d\eta_2 d\eta_1. \quad (19)$$

В рассматриваемом случае, при выполнении допущения (16) соотношение (19) становится более простым

$$P(\delta, L) = \int_{\delta}^1 \int_{\delta/\eta_1}^1 \cdots \int_{\delta/(\eta_1 \eta_2 \dots \eta_{L-1})}^1 d\eta_L \dots d\eta_2 d\eta_1 \quad (20)$$

и допускает аналитическое решение в виде

$$P(\delta, L) = 1 - \delta \sum_{i=0}^L (-1)^i \frac{\ln^i \delta}{i!}. \quad (21)$$

Таким образом, полученное соотношение (21) даёт вероятность того, что на выбранном отрезке дискретной временной реализации  $\{\eta_i\}$ , длина которого составляет  $L$  дискретных единиц, будет наблюдаться возрастание модуля величины  $\xi$  (которая представляет собой расстояние между ведомой и вспомогательной системами) более, чем в  $H$  раз (т.е.,  $|\xi_{i+L}/\xi_i| \geq H$ ). Иными словами, с помощью выражения (21) можно оценить вероятность того, что некоторый временной интервал длительностью  $L$  временной реализации  $\{\eta_i\}$  будет являться участком перехода от ламинарной фазы к турбулентной.

Следует также отметить, что в полученном соотношении (21) сумма представляет собой  $L + 1$  старших членов разложения экспоненты  $e^x$  в степенной ряд при значении аргумента  $x = \ln(1/\delta)$ . Соответственно, для временного интервала с длиной  $L$ , стремящейся к бесконечности, вероятность возрастания величины  $\xi$  в  $H$  раз стремится к нулю, что соответствует отрицательности старшего условного показателя Ляпунова вблизи границы установления синхронного режима.

Важно обратить внимание, что величина  $\delta$ , входящая в соотношение (21), зависит не только от управляющих параметров  $H$ ,  $\lambda$  и  $\varepsilon$ , но и от длины  $L$  анализируемой последовательности (см. соотношение (18)), поэтому соотношение (21) имеет смысл переписать в виде

$$P_{\lambda, \varepsilon}(H, L) = 1 - \frac{H}{(\lambda(1 - \varepsilon))^L} \sum_{i=0}^L \frac{(-1)^i}{i!} \ln^i \frac{H}{(\lambda(1 - \varepsilon))^L}. \quad (22)$$

### 3. Плотность распределения вероятностей

С помощью построенной в разделе 2 вероятностной модели можно получить аналитическое выражение плотности распределения вероятностей  $p_{l \Rightarrow t}(\zeta)$  величины  $\zeta$  для интервалов, соответствующих разрушению ламинарных фаз и, соответственно, для которых выполняется условие (18). Такая плотность распределения  $p_{l \Rightarrow t}(\zeta)$  качественно будет соответствовать плотности распределения вероятности  $p_{l \Rightarrow t}(y_n)$  динамической переменной  $y_n$  ведомой системы однонаправленно связанных логистических отображений (2), полученной для интервалов времени, соответствующих разрушению синхронного движения и переходу от ламинарного поведения к турбулентному (см. рис. 1, f).

Для получения выражения для плотности распределения вероятностей  $p_{l \Rightarrow t}(\zeta)$  следует рассчитать, какова будет вероятность разрушения ламинарной фазы (22) на длине интервала  $L$  в том случае, если одна из точек последовательности  $\{\eta_j\} \Big|_{j=i+1}^{i+L}$  принимает некоторое фиксированное значение  $\eta^*$ . Если это фиксированное значение принимает первая точка анализируемой последовательности, то вероятность разрушения ламинарной фазы на участке длиной  $L$  при указанном условии можно получить, повторив вышеприведенные



вычисления (18)–(20) при фиксированном значении  $\eta_1 = \eta^*$  и, соответственно, без интегрирования по переменной  $\eta_1$

$$P_{\lambda,\varepsilon}(H, L|\eta_1 = \eta^*) = 1 - \frac{H}{\eta^*(\lambda(1-\varepsilon))^L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(-1)^i}{i!} \ln^i \frac{H}{\eta^*(\lambda(1-\varepsilon))^L}. \quad (23)$$

Понятно, что переменная  $\eta$  может принять искомое значение  $\eta^*$  не обязательно в первой точке анализируемой последовательности, но, с учетом равнозначности и независимости друг от друга всех точек последовательности, вероятность разрушения ламинарной фазы при условии, скажем, что третья точка последовательности  $\{\eta_j\}_{j=i+1}^{i+L}$  принимает значение  $\eta^*$  будет той же самой, что и для случая  $\eta_1 = \eta^*$ , а следовательно, будет определяться тем же самым соотношением (23). Тогда вероятность того, что на интервале длиной  $L$  произойдет переход от ламинарной фазы к турбулентной при условии, что хотя бы одна из точек этой последовательности примет значение  $\eta^*$ , в силу условной вероятности будет определяться как

$$P_{\lambda,\varepsilon}(H, L|\eta = \eta^*) = LP_{\lambda,\varepsilon}(H, L|\eta_1 = \eta^*). \quad (24)$$

Фактически, учет возможности одной из всех точек рассматриваемой последовательности принять наперед заданную величину  $\eta^*$  влияет только на нормировочный множитель  $L$  по сравнению с соотношением (23).

По факту, найденная условная вероятность (24) представляет собой плотность распределения величины  $\eta$  для участков временной реализации длиной  $L$ , соответствующих разрушению ламинарной фазы и переходу от синхронной динамики к асинхронной. Теперь, для того, чтобы получить искомую плотность распределения вероятностей  $p_{l \Rightarrow t}(\zeta)$ , остается только осуществить обратный переход от величины  $\eta$  к  $\zeta$ . С учетом соотношения (14) и учета симметрии задачи относительно точки  $\zeta_c = 0.5$  для плотности распределения вероятностей  $p_{l \Rightarrow t}(\zeta)$  можно получить следующее выражение:

$$p_{l \Rightarrow t}(\zeta) = L \left( 1 - \frac{H}{2|\zeta - \zeta_c|(\lambda(1-\varepsilon))^L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{(-1)^i}{i!} \ln^i \frac{H}{2|\zeta - \zeta_c|(\lambda(1-\varepsilon))^L} \right). \quad (25)$$

Полученное выражение (25) предопределяет и объясняет возникновение “клюва” на плотности распределения вероятностей для участков перехода от ламинарных фаз к турбулентным, как, например, на рис. 1, *f*. На рис. 2 приведено сопоставление полученного аналитического соотношения (25) с результатами численного моделирования, в ходе которого для равномерно распределенной в интервале  $[0; 1]$  случайной величины  $\zeta$  на каждом интервале дискретного времени длиной  $L$  единиц при фиксированных значениях управляющих параметров  $\lambda = 3.95$  и  $\varepsilon = 0.32$  вычислялась величина  $\kappa$  (см. соотношение (13)). Те интервалы, для которых величина  $\kappa$  превышала наперед заданное значение порога  $H = 10$ , трактовались как участки, соответствующие переходу от синхронного поведения к асинхронному и, соответственно, все точки этого участка использовались для численного построения плотности распределения вероятностей  $p_{l \Rightarrow t}(\zeta)$ . Как видно из рис. 2, результаты численного моделирования очень хорошо соответствуют кривой, определяемой аналитическим соотношением (25).

Из рис. 1, *f* и 2 также видно хорошее качественное соответствие профилей плотности распределения динамической переменной ведомой системы  $y_n$  и случайной величины  $\zeta_n$ , моделирующей поведение детерминированной системы в окрестности границы установления обобщенной хаотической синхронизации. На обоих графиках отчетливо виден характерный “клов”, упирающийся в точку экстремума графика отображения модифицированной системы (10).

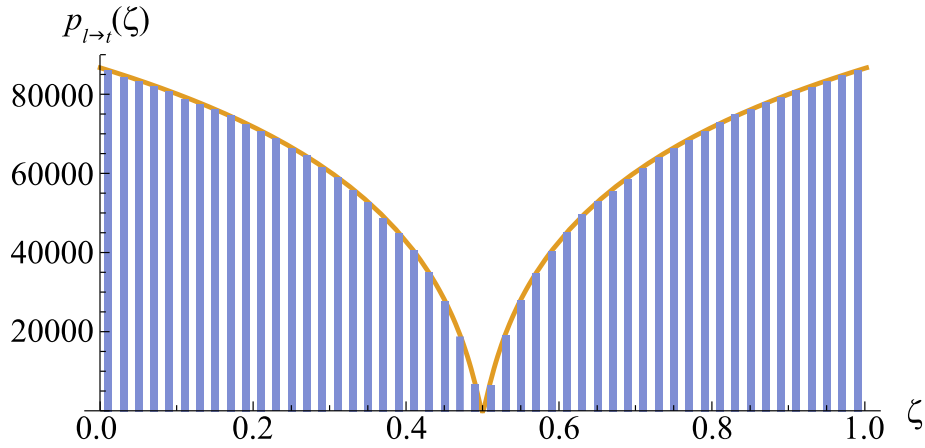


Рис. 2. Плотность распределения случайной величины  $\zeta$  для интервалов времени, соответствующих разрушению синхронного движения и переходу от ламинарного поведения к турбулентному  $p_{l \rightarrow t}(\zeta)$ , полученная с помощью численного моделирования (столбики) и аналитическая кривая (сплошная линия), определяемая соотношением (25). Значения управляющих параметров  $\lambda = 3.95$ ,  $\varepsilon = 0.32$ . Общее количество точек –  $3 \times 10^6$

Следует отметить, что точка  $\zeta_c = 0.5$  в вероятностной модели и, соответственно, точка  $y_c = 0.5$  в введомом логистическом отображении в (2), в которых производная модифицированной системы (10) обращается в ноль, локально характеризуются максимальной устойчивостью (суперустойчивостью). В этих точках за одну итерацию любое возмущение (пока оно находится в рамках линейного приближения (8)) схлопывается до нуля. Ближайшие точки к  $\zeta_c$  (или к  $y_c$ , соответственно) также характеризуются значительной устойчивостью, поскольку производная модифицированной системы в этих точках близка к нулю. Очевидно, что попадание фазовой траектории в окрестность точки  $\zeta_c$  ( $y_c$  для введомого логистического отображения (2)) приводит к радикальному уменьшению возмущения  $\xi_n$ . Следовательно, для того, чтобы возмущение нарастало с течением времени и за ограниченное число итераций  $L$  превысило наперед заданный порог  $H$  (что в рассматриваемой модели соответствует разрушению ламинарной фазы движения), необходимо, чтобы в течение данного количества последовательных итераций изображающая точка как можно реже попадала в окрестность критической точки  $\zeta_c$  ( $y_c$ ) и совсем не попадала в эту критическую точку, что, собственно, и объясняет качественно формирование клюва на профиле распределения динамических переменных на рис. 1, f и 2.

Очевидно также, что ожидать полного количественного соответствия в данном случае не приходится по двум основным причинам:

1. Предложенная вероятностная модель изначально базируется на линейном описании, соответствующем разрушению ламинарной фазы движения и переходу к турбулентному участку. Соответственно, она не будет давать корректные результаты в случае большой разницы между состояниями введомой и вспомогательной систем (что как раз имеет место во время асинхронного участка поведения связанных систем).
2. Плотность распределения динамической переменной  $y_n$  не совпадает с равномерной плотностью распределения вероятностей  $p(\zeta)$ , использованной при получении аналитической зависимости (25), а следовательно, ожидать полного количественного соответствия в данном случае не приходится.

## Заклучение

Таким образом, в настоящей работе рассмотрена вероятностная модель в предположении равномерно распределённой случайной величины для описания разрушения ламинарных фаз (участков синхронной динамики) во временных рядах одномерных динамических систем с дискретным временем, находящихся в режиме перемежающейся обобщённой хаотической синхронизации. Следует отметить, что несмотря на глубинную взаимосвязь динамических систем с непрерывным и дискретным временем, а также общность закономерностей, наблюдающихся при установлении режима обобщённой хаотической синхронизации, обобщение результатов, полученных в настоящей работе для одномерных динамических систем с дискретным временем, на отображения большей размерности, а также потоковые системы, требует дополнительных исследований.

## Список литературы

1. A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, and Jürgen Kurths, “Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, no. 1, pp. 47–50, 1997.
2. Stefano Boccaletti, E. Allaria, R. Meucci, and F. T. Arecchi, “Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic  $CO_2$  laser systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, no. 19, p. 194101, 2002.
3. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, and Stefano Boccaletti, “Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 114101, 2006.
4. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and Jürgen Kurths, “From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 78, no. 22, pp. 4193–4196, 1997.
5. Stefano Boccaletti and D. L. Valladares, “Characterization of intermittent lag synchronization,” *Phys. Rev. E*, vol. 62, no. 5, pp. 7497–7500, 2000.
6. K. Pyragas, “Properties of generalized synchronization of chaos,” *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. IMI, no. 3, pp. 101–129, 1998.
7. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, “Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators,” *Europhysics Lett.*, vol. 70, no. 2, pp. 169–175, 2005.
8. Alexey A. Koronovskii, Olga I. Moskalenko, Anatolii A. Pivovarov, Vladislav A. Khanadeev, Alexander E. Hramov, and Alexander N. Pisarchik, “Jump intermittency as a second type of transition to and from generalized synchronization,” *Phys. Rev. E*, vol. 102, p. 012205, July 2020.
9. Nikolai F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D.I. Abarbanel, “Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 51, no. 2, pp. 980–994, 1995.
10. Nikolai F. Rulkov, “Images of synchronized chaos: experiments with circuits,” *Chaos*, vol. 6, pp. 262–279, 1996.
11. K. Pyragas, “Weak and strong synchronization of chaos,” *Phys. Rev. E*, vol. 54, no. 5, pp. R4508–R4511, 1996.
12. K. Pyragas, “Conditional Lyapunov exponents from time series,” *Phys. Rev. E*, vol. 56, no. 5, pp. 5183–5188, 1997.
13. A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, and A. E. Hramov, “Nearest neighbors, phase tubes, and generalized synchronization,” *Phys. Rev. E*, vol. 84, no. 3, p. 037201, 2011.

14. H. D.I. Abarbanel, Nikolai F. Rulkov, and M. M. Sushchik, "Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach," *Phys. Rev. E*, vol. 53, no. 5, pp. 4528–4535, 1996.
15. P. Berge, Y. Pomeau, and C. Vidal, *Order within Chaos*. John Wiley and Sons, New York, 1984.
16. P. Manneville and Y. Pomeau, "Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems," *Physica D*, vol. 1, no. 2, pp. 219–226, 1980.
17. Alexey A. Koronovskii, Olga I. Moskalenko, and Anton O. Selskii, "Intermittent generalized synchronization and modified system approach: Discrete maps," *Physical Review E*, vol. 109, p. 064217, June 2024.
18. A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, and O. I. Moskalenko, "Are generalized synchronization and noise-induced synchronization identical types of synchronous behavior of chaotic oscillators?," *Phys. Lett. A*, vol. 354, no. 5–6, pp. 423–427, 2006.
19. A. E. Hramov and A. A. Koronovskii, "Generalized synchronization: a modified system approach," *Phys. Rev. E*, vol. 71, no. 6, p. 067201, 2005.
20. H. Herzog and J. Freund, "Chaos, noise, and synchronization reconsidered," *Phys. Rev. E*, vol. 52, no. 3, pp. 3238–3241, 1995.
21. JW Shuai and KW Wong, "Noise and synchronization in chaotic neural networks," *PHYSICAL REVIEW E*, vol. 57, no. 6, pp. 7002–7007, 1993.
22. Khashayar Pakdaman and Denis Mestivier, "Noise induced synchronization in a neuronal oscillator," *Physica D*, vol. 192, pp. 123–137, 2004.



*Короновский Алексей Александрович* – родился в Саратове (1972). Окончил физический факультет Саратовского государственного университета (1995), доктор физико-математических наук (2007), заведующий кафедрой физики открытых систем ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского». Область научных интересов – динамический хаос, синхронизация, нелинейная динамика и её проявления в различных сферах человеческой деятельности. Автор научных монографий и статей в отечественных и зарубежных рецензируемых журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: alexey.koronovskii@gmail.com



*Москаленко Ольга Игоревна* – родилась в Саратове (1984), окончила факультет нелинейных процессов СГУ (2006), кандидат физико-математических наук (2008), доцент (2012), доктор физико-математических наук (2017), профессор (2024). Профессор кафедры физики открытых систем СГУ, начальник управления научной деятельности СГУ. Область научных интересов – исследование классической и хаотической синхронизации и явлений, имеющих место на ее границе, в нелинейных системах; применение непрерывного вейвлет- и фурье-анализа к проблеме хаотической синхронизации в системах с малым числом степеней свободы и пространственно-распределенных средах; изучение обобщенной синхронизации в системах с однонаправленной и взаимной связью и ее возможных приложений; влияние шума на установление синхронных режимов и характеристики перемежаемости; применение хаотической синхронизации для скрытой передачи информации; анализ хаотической синхронизации в сложных сетях; разработка методов анализа поведения систем по временным рядам и их применение к живым системам. Автор около 200 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: o.i.moskalenko@gmail.com



*Сельский Антон Олегович* – родился в Саратове (1989), окончил факультет нелинейных процессов СГУ (2011). Доцент кафедры физики открытых систем института физики СГУ. Область научных интересов – нелинейная динамика, математическое и численное моделирование, анализ сложных сигналов различной биомедицинской природы и разработка новых методов и подходов к анализу таких сигналов. Автор около 100 статей в центральных реферируемых отечественных и зарубежных журналах.

Россия, 410012 Саратов, Астраханская, 83  
Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского  
E-mail: selskiiao@gmail.com