Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 1
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1)

Редакторская заметка
DOI: 10.18500/0869-6632-003158
EDN: NDDGMU

К 50-летию открытия закономерностей Фейгенбаума

А. П. Кузнецов✉*, Ю. В. Седова*

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
E-mail: ✉apkuz@rambler.ru, sedovayv@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.01.2025, опубликована 31.01.2025

Для цитирования: *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* К 50-летию открытия закономерностей Фейгенбаума // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 1. С. 5–8. DOI: 10.18500/0869-6632-003158. EDN: NDDGMU

For citation: Kuznetsov AP, Sedova YuV. On the 50th anniversary of the discovery of Feigenbaum's laws. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(1):5–8. DOI: 10.18500/0869-6632-003158

В 1975 году, экспериментируя с карманным программируемым калькулятором, американский физик Митчелл Фейгенбаум (Mitchell Feigenbaum) открыл универсальные закономерности перехода к хаосу через бифуркации удвоения периода, которые теперь носят его имя. Изученные им отображения с квадратичным экстремумом привлекали внимание исследователей и ранее, например, в контексте описания динамики популяций. Было обнаружено, что такие отображения $x_{n+1} = f(x_n, \lambda)$ при вариации параметра λ могут демонстрировать последовательность удвоений периода циклов с последующим переходом к хаосу (Myrberg, 1963 [1], Шарковский, 1964 [2], Metropolis и др., 1973 [3]). Простейшей системой, демонстрирующей переход к хаосу через каскад бифуркаций рождения 2^k-циклов, является логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2. \tag{1}$$

Здесь x_n — значения динамической переменной в дискретные моменты времени n, λ — управляющий параметр. Последовательность бифуркационных точек λ_k накапливается к критической точке $\lambda_c = 1.40115518909\ldots$ При этом имеют место два закона Фейгенбаума.

1. Значения параметра λ_k удовлетворяют закону геометрической прогрессии

$$\lambda_k \to \lambda_c - \frac{\text{const}}{\delta_F^k}, \tag{2}$$

тем более точно, чем выше номер k. Здесь $\delta_F = 4.669201609102990671\ldots$ — первая константа Фейгенбаума.

2. Расстояния d_k от точки экстремума $x = 0$ до ближайшей к ней точки на 2^k-цикле в точках бифуркаций подчиняются асимптотическому соотношению

$$\frac{d_k}{d_{k+1}} \to \alpha_F, \tag{3}$$

где $\alpha_F = -2.502907875095892822\ldots$ — вторая константа Фейгенбаума.

Замечательное открытие Фейгенбаума состояло не только в обнаружении законов (2), (3), а и в том, что они универсальны, то есть не зависят от конкретного вида функции $f(x)$. Достаточно, чтобы она имела квадратичный экстремум. Соответственно, универсальными являются и константы δ_F и α_F.

Законы Фейгенбаума приводят к возникновению свойства *скейлинга* (подобия). Скейлинг для бифуркационного дерева логистического отображения иллюстрирует рис. 1, *a*. При увеличении выделенного фрагмента в δ_F по горизонтали и в α_F раз по вертикали приходим к эквивалентной картинке. При этом ее надо зеркально отразить относительно горизонтальной оси в силу отрицательности константы α_F. Аналогичный скейлинг можно наблюдать и на рис. 1, b для

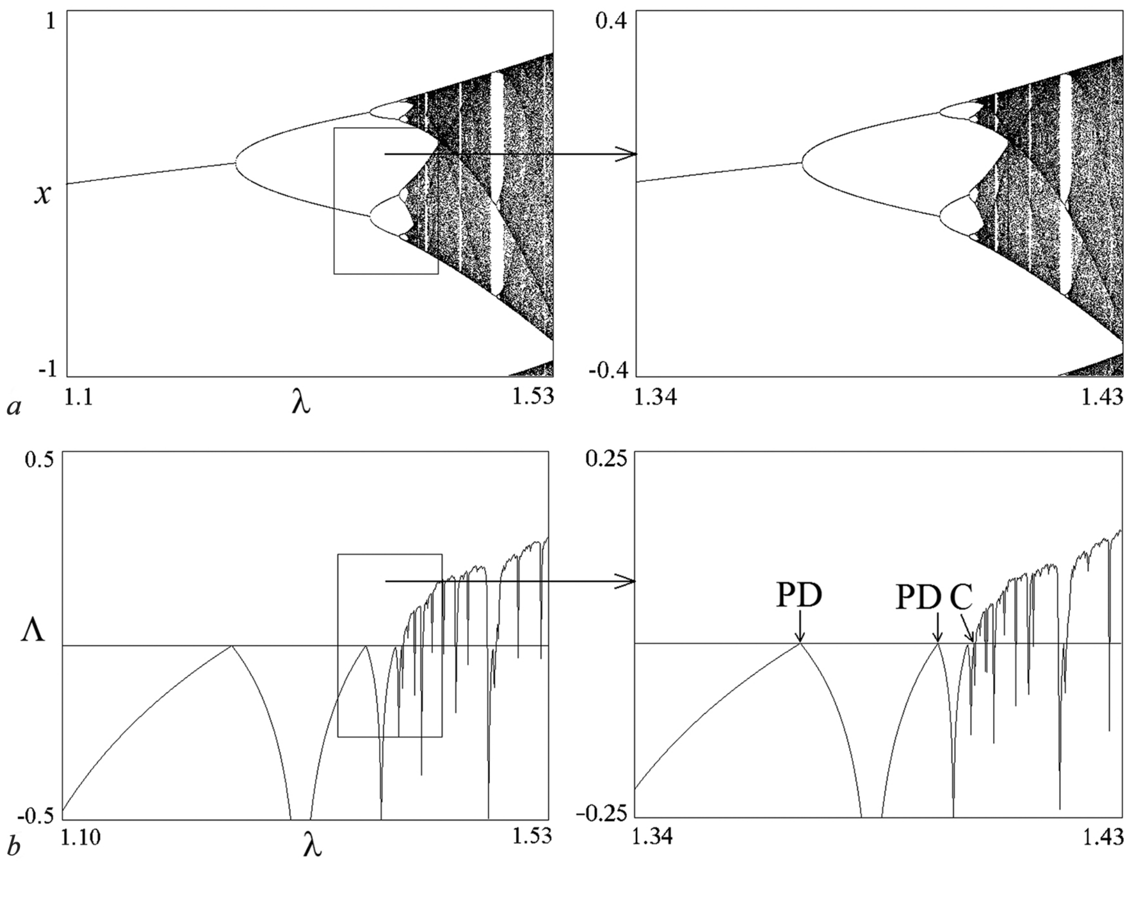

Рис. 1. Скейлинг на бифуркационном дереве (*a*) и графике ляпуновского показателя (*b*) логистического отображения (1). PD — точки удвоений периода, C — критическая точка Фейгенбаума

Fig. 1. Scaling on the bifurcation tree (*a*) and the graph of the Lyapunov exponent (*b*) of the logistic map (1). PD are the period doubling points, C is the Feigenbaum critical point

графика ляпуновского показателя Λ, для которого масштаб пересчитывается в δ_F раз по горизонтали и в 2 раза по вертикали (что отвечает удвоению периода). Отметим, что на рис. 1 хорошо видны точки удвоений периода PD и критическая точка C, $\lambda = \lambda_c$, за которой возможен хаос с положительным показателем $\Lambda > 0$.

Универсальность законов Фейгенбаума была обоснована им в работах [4, 5] с помощью метода *ренормализационной группы*, известного также в физике фазовых переходов, квантовой физике и других областях. Уравнение ренормгруппы для бифуркаций удвоения имеет вид

$$g(x) = \alpha_F g\left(g\left(x/\alpha_F\right)\right). \tag{4}$$

При этом $g(0) = 1$ и $\alpha_F = 1/g(g(0))$. Функция $g(x)$ оказывается универсальной, поскольку она не зависит от конкретной формы исходного отображения и определяется только порядком экстремума. Она дает асимптотическую форму 2^k-кратно примененного оператора эволюции в критической точке при $k \to \infty$ с учетом перенормировки динамической переменной x. Константа α_F может быть, таким образом, найдена из уравнения ренормгруппы. Константа δ_F определяется из уравнения ренормгруппы в вариациях, дающего динамику при приближении к критической точке [4, 5].

Для русскоязычных читателей описание критических явлений в одномерных отображениях можно найти в переводе статьи Фейгенбаума [6], а также в обзоре, опубликованном в самом первом номере журнала «Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика» [7].

Результаты Фейгенбаума вызвали настоящий бум и поток последующих работ. Так, работы [4, 5] насчитывают более 7000 цитирований. Его универсальные закономерности были обнаружены не только для одномерных, но и для двух- и более высокоразмерных отображений. Замечательно, что их демонстрируют также системы, описываемые дифференциальными уравнениями. Причина универсальности и применимости к разным классам динамических систем состоит в том, что при приближении к критической точке рождения непериодического режима — хаоса — характерный временной масштаб становится очень большим и, соответственно, превышает все характерные величины с размерностью времени в уравнениях системы. Локальные во времени особенности динамики становятся несущественными, и собственно переход к хаосу оказывается универсальным [8]. При этом природа систем может быть самой разнообразной — это гидродинамические, электронные, оптические, биологические, химические и другие системы. Как в численных расчетах, так и в экспериментах обнаруживаются характерные, даже достаточно тонкие особенности сценария Фейгенбаума.

Теперь сценарий Фейгенбаума входит во все монографии и учебники по нелинейной динамике и динамическому хаосу. Были обнаружены и другие типы критической динамики, связанные с удвоениями периода. Например, трикритические точки, представляющие феномен коразмерности два. Им отвечают концевые точки фейгенбаумовских линий на плоскости параметров, и вблизи них наблюдается двухпараметрический скейлинг с двумя новыми универсальными константами [9, 10]. Ряд новых, связанных с удвоениями периода типов критичности обнаружен для двумерных отображений [8]. Отметим, что аналогичный Фейгенбауму подход с использованием метода ренормгруппы был использован также при описании перехода к хаосу через перемежаемость (Hirsh, 1982 [11]), Hu и Rudnik, 1982 [12]) и через разрушение квазипериодических колебаний (Feigenbaum и др., 1982 [13], Ostlund и др., 1983 [14]). Целый ряд публикаций был посвящен универсальности и методу ренормгруппы для связанных систем с удвоениями периода (Кузнецов С. П., 1985 [15], Kook и др., 1991 [16], Kim и Kook, 1992, 1993 [17, 18]).

Таким образом, сценарий Фейгенбаума стал одним из ключевых феноменов теории хаоса и привел к новым обобщениям. Благодаря работам Фейгенбаума сформировалось фактически целое направление исследований.

Список литературы

1. *Myrberg P. J.* Iteration der reellen Polynome zweiten Grades III // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1963, no. 336/3. P. 1–18. DOI: 10.5186/aasfm.1964.336-03.
2. *Шарковский А. М.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в прямую // Укр. мат. журн. 1964. Т. 26, № 1. С. 61.
3. *Metropolis N., Stein P. K., Stein M. L.* Finite limit sets for transformations of the unit interval // J. Comb. Theory. 1973. Vol. 15, no. 1. P. 25–44. DOI: 10.1016/0097-3165(73)90033-2.
4. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1978. Vol. 19, no. 1. P. 25–52. DOI: 10.1007/BF01020332.
5. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // J. Stat. Phys. 1979. Vol. c21, no. 6. P. 669–706. DOI: 10.1201/9780203734636.
6. *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // Успехи физических наук. 1983. Т. 141, № 10. С. 343–374. DOI: 10.3367/UFNr.0141.198310e.0343.
7. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть 1. Сценарий Фейгенбаума // Известия вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 1. С. 15–33.
8. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
9. *Chang S. J., Wortis M., Wright J. A.* Iterative properties of a one-dimensional quartic map. Critical lines and tricritical behavior // Phys. Rev. A. 1981. Vol. 25, no. 5. P. 2669–2684. DOI: 10.1103/PhysRevA.24.2669.
10. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Сатаев И. Р.* Критическая динамика одномерных отображений. Часть II. Двухпараметрический переход к хаосу // Известия вузов. ПНД. 1993. Т. 1, № 3. С. 17–35.
11. *Hirsch J. E., Nauenberg M., Scalapino D. J.* Intermittency in the presence of noise: A renormalization group formulation // Physics Letters A. 1982. Vol. 87, no. 8. P. 391–393. DOI: 10.1016/0375-9601(82)90165-7.
12. *Hu B., Rudnick J.* Exact solutions to the Feigenbaum renormalization-group equations for intermittency // Phys. Rev. Lett. 1982. Vol. 48, no. 24. P. 1645–1648. DOI: 10.1103/PhysRevLett.48.1645.
13. *Feigenbaum M. J., Kadanoff L. P., Shenker S. J.* Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis // Physica D. 1982. Vol. 5, no. 2–3. P. 370–386. DOI: 10.1016/0167-2789(82)90030-6.
14. *Ostlund S., Rand D., Sethna J., Siggia E.* Universal properties of the transition from quasiperiodicity to chaos in dissipative systems // Physica D. 1983. Vol. 8, no. 3. P. 303–342. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90229-4.
15. *Кузнецов С. П.* Универсальность и подобие в поведении связанных систем Фейгенбаума // Известия вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 8. С. 991–1007.
16. *Kook H., Ling F. H., Schmidt G.* Universal behavior of coupled nonlinear systems // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 43, no. 6. P. 2700. DOI: 10.1103/PhysRevA.43.2700.
17. *Kim S. Y., Kook H.* Critical behavior in coupled nonlinear systems // Phys. Rev. 1992. Vol. 46, no. 8. P. R4467-R4470. DOI: 10.1103/PhysRevA.46.R4467.
18. *Kim S. Y., Kook H.* Period doubling in coupled maps // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 48, no. 2. P. 785. DOI: 10.1103/PhysRevE.48.785.