Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2025. Т. 33, № 6
Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6)

Научная статья
УДК 530.182

DOI: 10.18500/0869-6632-003172
EDN: SUWUZF

О взаимодействии системы с многочастотными колебаниями с хаотическим генератором

А. П. Кузнецов[1], *Л. В. Тюрюкина*[1,2]✉

[1]Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН, Россия
[2]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия
E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.01.2025, принята к публикации 02.04.2025, опубликована онлайн 22.04.2025

Аннотация. *Цель работы:* изучение влияния динамики хаотической системы на систему с многочастотной квазипериодичностью и сценарием Ландау-Хопфа. В качестве объекта исследования выбраны хаотическая система Кислова-Дмитриева и ансамбль расстроенных по частоте осцилляторов ван дер Поля с неидентичными параметрами возбуждения. *Методы.* Анализ проводился с помощью графиков показателей Ляпунова и использованием критерия идентификации на их основе типов квазипериодических бифуркаций. *Результаты.* Представлены сценарии изменения типов режимов при уменьшении величины связи подсистем. Они могут иметь определенные особенности. Так переход от трехчастотного к четырехчастотному режиму происходит не через квазипериодическую бифуркацию Хопфа, а через окно хаоса, характеризующегося тремя или четырьмя нулевыми показателями Ляпунова. Внутри этого хаотического окна возможна своеобразная бифуркация, отвечающая увеличению числа нулевых показателей Ляпунова по типу седло-узловой бифуркации Хопфа. При вариации параметра связи осцилляторов ван дер Поля наблюдается хаос с разным числом нулевых показателей. В этом случае каскад точек, отвечающих поэтапному увеличению числа нулевых показателей в хаосе, происходит по другому сценарию. Он в определенной мере аналогичен квазипериодической бифуркации Хопфа. При увеличении управляющего параметра системы Кислова-Дмитриева в объединенной системе возможно появление гиперхаоса с тремя нулевыми показателями Ляпунова. Также возможен инвертированный порядок изменения режимов – трехчастотный режим через хаотическое окно превращается в четырехчастотный. *Заключение.* Полученные результаты обогащают представления о высокоразмерном хаосе с несколькими нулевыми показателями Ляпунова и его трансформациях при изменении параметра.

Ключевые слова: хаос, гиперхаос, квазипериодичность, показатели Ляпунова, бифуркации

Благодарности. Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В. А. Котельникова РАН ($FFWZ-2025-0016$), Россия

Для цитирования: *Кузнецов А. П., Тюрюкина Л. В.* О взаимодействии системы с многочастотными колебаниями с хаотическим генератором // Известия вузов. ПНД. 2025. Т. 33, № 6. С. xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003172. EDN: SUWUZF

Article DOI: 10.18500/0869-6632-003172

On the interaction of a system with multifrequency oscillations with a chaotic generator

A. P. Kuznetsov[1], *L. V. Turukina*[1,2]✉

[1]Saratov Branch of Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics, Russia
[2]Saratov State University, Russia
E-mail: ✉turukinalv@yandex.ru

Received 17.01.2025, accepted 02.04.2025, available online 22.04.2025

Abstract. *The purpose of the work:* to study the influence of the dynamics of a chaotic system on a system with multi-frequency quasi-periodicity and the Landau-Hopf scenario. The Kislov-Dmitriev chaotic system and an ensemble of van der Pol oscillators with non-identical excitation parameters are chosen as the object of study. *Methods.* The analysis was carried out using graphs of Lyapunov exponents and the criterion for identifying types of quasiperiodic bifurcations based on them. *Results.* Scenarios of the changing of the regime's types are presented as the coupling parameter between the subsystems decreased. They may have certain features. Thus, the transition from a three-frequency to a four-frequency regime occurs not through a quasiperiodic Hopf bifurcation, but through a chaos window. The latter is characterized by three or four zero Lyapunov exponents. Inside this chaotic window, a peculiar bifurcation is possible. It is corresponding to an increase in the number of zero Lyapunov exponents according to the type of a saddle-node Hopf bifurcation. Chaos with a different number of zero exponents is observed as the coupling parameter of van der Pol oscillators varied. In this case, a cascade of points corresponding to a step-by-step increase in the number of zero exponents occurs according to a different scenario. It is to a certain extent similar to a quasiperiodic Hopf bifurcation. When the control parameter When the control parameter of the Kislov-Dmitriev system increases, hyperchaos with three zero Lyapunov exponents may appear in the combined system. An inverted order of changing modes is also possible. In this case, for example, a three-frequency regime turns into a four-frequency regime through a chaotic window. *Conclusion.* The obtained results expand conception about high-dimensional chaos with several zero Lyapunov exponents and its transformations with parameter changes.

Keywords: chaos, hyperchaos, quasi-periodicity, Lyapunov exponents, bifurcations

Acknowledgements. The work was carried out within the framework of the state assignment of the V. A. Kotelnikov Institute of Radioelectronics ($FFWZ-2025-0016$), Russian Academy of Sciences, Russia

For citation: Kuznetsov API, Turukina LV. On the interaction of a system with multifrequency oscillations with a chaotic generator. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2025;33(6):xxx–xxx. DOI: 10.18500/0869-6632-003172

Введение

Исследование связанных осцилляторов является одной из важных задач нелинейной теории колебаний в целом и ее приложений, например в радиофизике и электронике [1]-[4]. Развитие компьютерной техники и теории динамических систем и ее приложений в отношении многомерных систем [5]- [10] делают актуальной задачу о колебаниях не только в классическом случае двух подсистем, но и в большем их числе [11]- [14]. Отдельные подсистемы при этом могут демонстрировать какой-либо из основных типов колебаний. Это могут быть автономные периодические, квазипериодические или хаотические режимы. Мало исследованным является вопрос о взаимодействии подсистем с разными типами колебаний. В этом плане мы обратим внимание на случай, когда в первой подсистеме возможны многочастотные квазипериодические колебания, а во второй – хаос.

Здесь можно отметить, что соотношение квазипериодической и хаотической динамики привлекает внимание, начиная с известных работ Ландау и Хопфа [15, 16]. В получившем их имя сценарии происходит поэтапное усложнения колебаний за счет добавления в спектр новых частотных компонент в результате каскада квазипериодических бифуркаций Хопфа. Несмотря на критику Рюэля и Такенса [17], сообщения о возможности устойчивых многочастотных колебаний (которым в фазовом пространстве отвечают инвариантные торы высокой размерности) периодически появляются в литературе [18]- [28]. Тоже самое относится, в определенной мере, и к сценарию Ландау-Хопфа [29]- [37]. В связи с этим возникает вопрос о взаимодействии систем с инвариантными торами и хаосом. В [38, 39] был рассмотрен простейший вариант подобной ситуации. Был изучен способный демонстрировать автономную двухчастотную квазипериодическую динамику генератор, связанный с хаотической системой Ресслера. В [40] в рамках аналогичной постановки задачи в качестве первой подсистемы был использован ансамбль из пяти осцилляторов ван дер Поля [34]. Эта система способна демонстрировать квазипериодические колебания с разным числом несоизмеримых частот. При уменьшении связи осцилляторов для нее наблюдается каскад бифуркаций, соответствующих нескольким шагам сценария Ландау-Хопфа. Здесь мы обсудим случай связи подсистемы [34] с хаотической системой Кислова-Дмитриева. Последняя может выступать в качестве одной из базовых хаотических систем [41]- [44]. Мы будем преследовать двоякую цель. Во-первых, выяснить, в какой мере универсальны результаты [40]. Во-вторых, продемонстрировать новые по отношению к [40] моменты, которые связаны, в частности, с возможной модификацией аттрактора в хаотической подсистеме при увеличении параметра нелинейности. Отметим также, что сформулированная задача оказывается связанной с проблемой хаоса с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова, см. соответствующие ссылки далее в разделе 4.

1. Квазипериодическая подсистема

Выбранная нами квазипериодическая подсистема [34] представляет собой ансамбль пяти глобально связанных осцилляторов ван дер Поля:

$$\ddot{x}_n - (\lambda_n - x_n^2)\dot{x}_n + (1 + \frac{n-1}{4}\Delta)x_n + \frac{\mu}{4}\sum_{i=1}^{5}(\dot{x}_n - \dot{x}_i) = 0. \quad (1)$$

Здесь λ_n – параметр возбуждения n-го осциллятора, n меняется от 1 до 5, Δ определяет частотную расстройку осцилляторов, причем частота первого принята за единицу, μ – параметр диссипативной связи.

Эта система имеет следующие особенности, обеспечивающие возможность нескольких шагов сценария Ландау-Хопфа. Осцилляторы не идентичны по параметрам возбуждения λ_n, что обеспечивает поэтапный вывод за порог возбуждения соответствующих мод при уменьшении величины связи (аналог числа Рейнольдса). Все осцилляторы за счет фактора Δ расстроены по собственной частоте, причем расстройку выберем большой, что исключает эффекты синхронизации. Ансамбль организован по принципу сети, где каждый связан с каждым. В этом случае параметр возбуждения каждого отдельного осциллятора λ_n управляет соответствующей квазипериодической бифуркацией всего ансамбля.

Здесь и далее вслед за [34, 40] положим параметры возбуждения $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$. В этом случае за счет неидентичности по параметрам λ_n пятый осциллятор характеризуется наибольшим, а первый – наименьшим значением параметра возбуждения. Величину частотной расстройки положим $\Delta = 3$. Тогда при уменьшении

μ при $\mu \approx \lambda_n$ последовательно наблюдаются бифуркация Андронова-Хопфа рождения предельного цикла из состояния равновесия, бифуркация Неймарка-Сакера NS рождения двухчастотного тора и далее три квазипериодические бифуркации $QH_{1,2,3}$ мягкого возникновения трех-, четырех- и пятичастотного торов.

2. Хаотическая подсистема

В качестве хаотической подсистемы используем систему Кислова-Дмитриева [41]- [44]. Физически она представляет собой генератор в виде замкнутой в кольцо цепочки из нелинейного усилителя, RLC – фильтра и инерционного элемента. Такая система описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = z, \\ &T\dot{z} + z = Mxexp(-x^2). \end{aligned} \tag{2}$$

Удобство системы (2) для дальнейшего исследования состоит в том, что первое уравнение представляет собой традиционный осциллятор относительно переменной x, возбуждаемый переменной z. В этом контексте Q – параметр затухания (добротность), а ω_0 – собственная частота этого осциллятора. Также в (2) M – это основной параметр нелинейности, отвечающий за возникновение хаоса.

Отметим, что в уравнениях (2) собственная частота ω_0 может быть исключена перенормировкой параметров $Q \to \dfrac{Q}{\omega_0}$, $T \to \dfrac{T}{\omega_0}$, $M \to M\omega_0^2$ и переменных $t \to \dfrac{t}{\omega_0}$, $z \to z\omega_0^2$. Тогда система (2) приводится к каноническому виду [43] с $\omega_0 = 1$. Однако, поскольку, в квазипериодической подсистеме (1) частота первого осциллятора ван де Поля принята за единицу, то мы будем использовать уравнения в форме (2), чтобы обеспечить частотную расстройку всех осцилляторов. Далее положим $\omega_0 = 0.5$, так что эта частота не совпадает ни с одной из собственных частот осцилляторов ван дер Поля (1).

Выбор основного управляющего параметра также требует пояснений. На рис.1 показаны графики показателей Ляпунова Λ_i индивидуальной системы (2) в зависимости от величины для $T = 10$ и $Q = 20$.

Можно видеть, что в системе происходит каскад бифуркаций удвоения периодических режимов PD, признаком которых является обращение в ноль второго показателя Λ_2 в точках бифуркаций. В результате возникает хаотический аттрактор по сценарию Фейгенбаума [43], фазовый портрет которого показан на рис.2,a. Для удобства восприятия соответствующее значение параметра отмечено стрелочкой на рис.1. Далее наблюдается широкое окно периодических режимов, а затем – снова хаос. Соответствующий аттрактор показан на рис.2,b. Можно видеть, что его устройство отличается от рис.2,a, хотя старшие показатели Ляпунова в обоих случаях близки (соответственно, $\Lambda_1 = 0.02842$ и $\Lambda_1 = 0.02354$). Мы далее будем использовать оба варианта, первый – для того чтобы рассмотреть случай, отвечающий сценарию Фейгенбаума, а второй – чтобы изучить влияние изменения конфигурации аттрактора.

Мы также рассмотрим случай, когда параметр $M = 8.2$. Аттрактор в этом случае показан на рис.2,c и отчасти визуально близок к случаю рис.2,b. Однако ему отвечает заметно большая величина старшего показателя Ляпунова $\Lambda_1 = 0.06225$. Как мы увидим, это приводит к новым особенностям динамики.

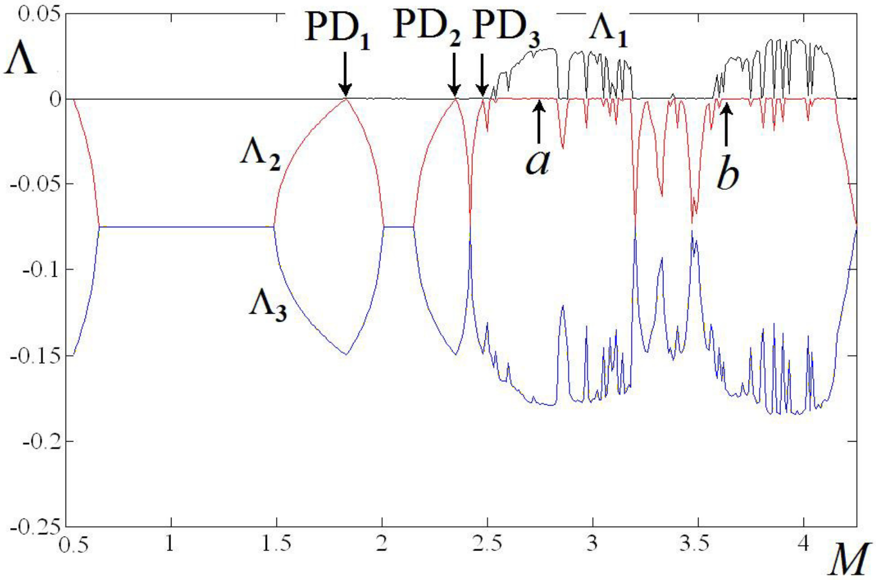

Рис. 1. Графики показателей Ляпунова системы Кислова-Дмитриева (2) в зависимости от параметра M для $T = 10$, $Q = 20$ и $\omega_0 = 0.5$. Стрелочками с буквами (a) и (b) обозначены точки, соответствующие рис.2.

Fig. 1.Graphs of the Lyapunov exponents of the Kislov-Dmitriev system (2) on the parameter M. $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$. The arrows with the letters (a) and (b) indicate the points corresponding to Fig.2.

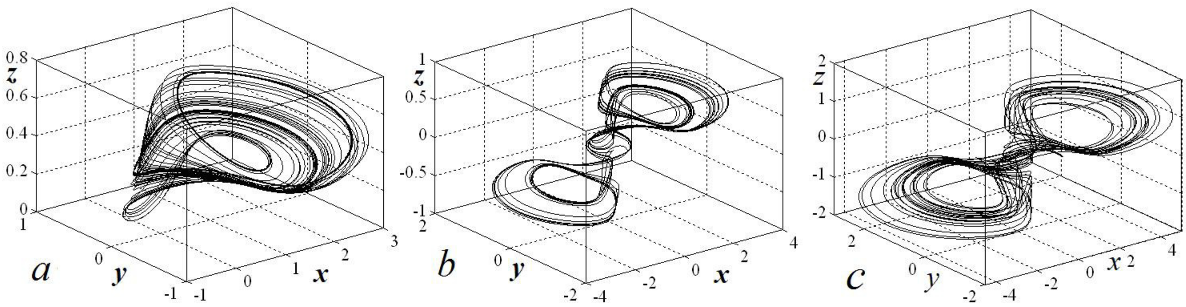

Рис. 2. Фазовые портреты хаотического аттрактора системы Кислова-Дмитриева (2) для $M = 2.75$ (a), $M = 3.65$ (b) и $M = 8.2()$; $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

Fig. 2. Phase portraits of the chaotic attractor of the Kislov-Dmitriev system (2) for $M = 2.75$ (a), $M = 3.65$ (b) and $M = 8.2(c)$; $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

3. Связанные системы

Организуем теперь связь ансамбля осцилляторов ван дер Поля (1) с хаотической системой Кислова-Дмитриева (2). Для удобства уравнения для каждого осциллятора запишем в явном виде:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x_1} - (\lambda_1 - x_1^2)\dot{x_1} + x_1 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x_1} - \dot{x_2} - \dot{x_3} - \dot{x_4} - \dot{x_5}) = 0,\\
&\ddot{x_2} - (\lambda_2 - x_2^2)\dot{x_2} + (1 + \frac{\Delta}{4})x_2 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x_2} - \dot{x_1} - \dot{x_3} - \dot{x_4} - \dot{x_5}) = 0,\\
&\ddot{x_3} - (\lambda_3 - x_3^2)\dot{x_3} + (1 + \frac{\Delta}{2})x_3 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x_3} - \dot{x_1} - \dot{x_2} - \dot{x_4} - \dot{x_5}) = 0,\\
&\ddot{x_4} - (\lambda_4 - x_4^2)\dot{x_4} + (1 + \frac{3\Delta}{4})x_4 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x_4} - \dot{x_1} - \dot{x_2} - \dot{x_3} - \dot{x_5}) = 0,\\
&\ddot{x_5} - (\lambda_5 - x_5^2)\dot{x_5} + (1 + \Delta)x_5 + \frac{\mu}{4}(4\dot{x_5} - \dot{x_1} - \dot{x_2} - \dot{x_3} - \dot{x_4}) + k(\dot{x_5} - \dot{x}) = 0,\\
&\ddot{x} + \frac{1}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x + k(\dot{x} - \dot{x_5}) = z,\\
&T\dot{z} + z = Mxexp(-x^2).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Здесь, для определённости, связь осуществляется через пятый осциллятор ван дер Поля и управляется параметром k. Как мы отмечали, первое уравнение системы Кислова-Дмитриева имеет форму осциллятора относительно переменной x. Связь в (3) устроена с учетом этой аналогии через член $\pm k(\dot{x_5} - \dot{x})$. Добавка через скорости изменения переменных, как в случае простейших осцилляторов, обеспечивает необходимый для нас диссипативный характер связи и возможность сопоставления с результатами [40]. Отметим, что такая связь системы Кислова-Дмитриева с единичным осциллятором ван дер Поля использовалась в [45], что привело к некоторым интересным особенностям динамики. Мы не будем здесь касаться схемотехнической реализации системы (3), ее вполне можно рассматривать как самостоятельную динамическую систему высокой размерности.

4. Трансформации аттракторов с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова и бифуркации инвариантных торов

Рассмотрим систему (3). Выберем сначала значения параметров $\mu = 0.25$ и $\Delta = 3$, что в соответствии с [34] отвечает трехчастотному режиму в квазипериодической подсистеме. На рис.3 показаны графики зависимости восьми показателей Ляпунова[1] объединенной системы (3) от параметра связи k. С их помощью можно идентифицировать тип наблюдаемого режима в соответствии с Таблицей 1. В Таблице 1 указано семь показателей Ляпунова, остальные всегда отрицательные.

В правой части рис.3 можно видеть трехчастотный режим $3T$ (3-тор) с $\Lambda_{1,2,3} = 0$. Таким образом, взаимодействие хаотической и квазипериодических подсистем привело к подавлению хаоса. При этом число несоизмеримых частот отвечает режиму колебаний в квазипериодической подсистеме.

[1] Для вычисления показателей Ляпунова был использован стандартный метод Рунге-Кутта 4-го порядка для численного решения дифференциальных уравнений, а также метод ортогонализации Грама-Шмидта. Шаг интегрирования в численных расчетах выбирался равным 0.01; начальные условия для всех динамических переменных равны 0.1; время переходного процесса составляло порядка 10^4 единиц нормированного времени; время вычисления самих показателе порядка 10^5 единиц нормировано времени, что позволяет вычислять показатели Ляпунова с точностью до $\pm 10^{-5}$.

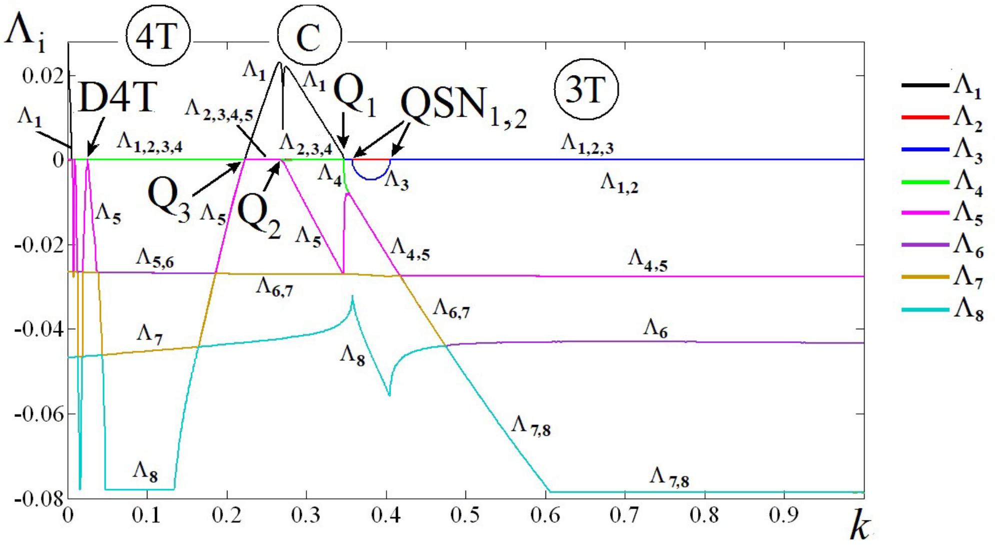

Рис. 3. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи k; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Параметры системы Кислова-Дмитриева $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

Fig. 3. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the coupling parameter k; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Parameters of the Kislov-Dmitriev model are $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

Таблица 1. Типы колебательных режимов и спектр показателей Ляпунова.
Table 1. Types of regimes and the spectrum of Lyapunov exponents.

Обозначение	Тип режима	Спектр старших показателей Ляпунова
P	периодический (предельный цикл)	$\Lambda_1 = 0$, $\Lambda_{2,3,4,5,6,7} < 0$
2T	двухчастотный квазипериодический (двумерный тор)	$\Lambda_{1,2} = 0$, $\Lambda_{3,4,5,6,7} < 0$
3T	трехчастотный квазипериодический (трехмерный тор)	$\Lambda_{1,2,3} = 0$, $\Lambda_{4,5,6,7} < 0$
4T	четырехчастотный квазипериодический (четырехмерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4} = 0$, $\Lambda_{5,6,7} < 0$
5T	пятичастотный квазипериодический (пятимерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0$, $\Lambda_{6,7} < 0$
6T	шестичастотный квазипериодический (шестимерный тор)	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6} = 0$, $\Lambda_7 < 0$
C	хаос	$\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_{2,3,4,5,6,7} \leqslant 0$
H	гиперхаос	$\Lambda_{1,2} > 0$, $\Lambda_{3,4,5,6,7} \leqslant 0$

При уменьшении связи наблюдается переход к четырехчастотному режиму $4T$. Таким образом, размерность квазипериодического режима увеличивается на единицу, причем дополнительную частоту привносит хаотическая подсистема. Такой же эффект характерен и для случая хаотической подсистемы в виде системы Ресслера [40]. Однако для нее этот переход происходит исключительно через одну классическую квазипериодическую бифуркацию Хопфа. В рассматриваемом случае сценарий более сложный. При уменьшении связи мы сначала попадаем в резонансное окно двухчастотного режима с $\Lambda_{1,2} = 0$. Оно с обеих сторон ограничено линиями седло-узловых бифуркаций двухчастотных торов $QSN_{1,2}$. Тип бифуркации определяем по поведению показателей Ляпунова в соответствии с критерием [46]. Резонансному окну и бифуркациям данного типа отвечает характерный "провал" третьего показателя Λ_3 в отрицательную область.

После выхода из этого окна слева от него в узкой области параметра снова наблюдается трехчастотный тор с $\Lambda_{1,2,3} = 0$, при условии $\Lambda_4 < 0$. Однако, практически сразу возникает хаос C. В соответствующей точке Q_1 показатель Λ_4 обращается в ноль, а показатель Λ_1 становится положительным. В результате возникает хаос, но с особенностью – наличием не одного, а трех нулевых показателей Ляпунова $\Lambda_{2,3,4} = 0$.

Уменьшим параметр связи k. При приближении к точке Q_2 показатель Λ_5 возрастает. Непосредственно в этой точке он обращается в ноль и далее остается нулевым, так что теперь $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Таким образом, происходит своеобразная бифуркация хаотического аттрактора, состоящая в увеличении числа нулевых показателей, от трех до четырех.

Наконец, в точке Q_3 хаос снова исчезает, и одновременно показатель Λ_5 снова уходит в отрицательную область. В результате рождается четырехчастотный тор с $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. Таким образом, благодаря нетривиальной бифуркации Q_2 справа от хаотического окна наблюдается трехчастотный тор, а слева – четырехчастотный.

При дальнейшем уменьшении связи происходят бифуркации удвоения четырехчастотного тора $D4T$. Одна из них хорошо просматривается на рис.3. И далее, при очень малой связи, опять рождается хаос. В этом поведение аналогично случаю [40].

Как мы отметили, в дополнение к одному "обязательному" в системах с непрерывным временем нулевому показателю $\Lambda_2 = 0$, добавляется еще два или даже три. Представление о хаотическом аттракторе с дополнительным нулевым показателем Ляпунова было представлено в [47]- [49], где он был назван квазипериодическим аттрактором Эно (quasi-periodic Hénon-like attractor). К настоящему времени найдены примеры для климатической модели Лоренц-84 с периодическим (сезонным) воздействием [47, 48], модельного отображения [49], дискретной версии системы Лоренц-84 [50], связанных радиофизических генераторов [51], системы фазовых осцилляторов с бигармонической связью [52]. Совсем недавно найден также пример гиперхаоса (т.е. режима с двумя положительными показателями) с дополнительным нулевым показателем [53]. В указанной работе была рассмотрена система из трех взаимодействующих инкапсулированных газовых пузырьков в жидкости. Обсуждаются механизмы возникновения хаоса и гиперхаоса с дополнительным нулевым показателем Ляпунова. Актуальные примеры и их обсуждение для отображений можно найти также в [54, 55]. Эти результаты относятся к случаю одного дополнительного нулевого показателя. Случаи двух и более дополнительных нулевых показателей также недавно был представлен в [38]- [40]. Таким образом, пополнение "коллекции" систем с подобной динамикой является интересным, и сигнализирует о типичности данного феномена. Отметим также, что тематика, связанная с удвоениями торов, продолжает оставаться актуальной, например [56, 57].

Проиллюстрируем теперь картину режимов в зависимости от "внутреннего" параметра связи квазипериодической подсистемы μ для двух значений k, рис.4. В случае малого $k = 0.0025$ на рис.4,а при большой связи μ наблюдается классический хаос, когда $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_2 = 0$, а остальные показатели отрицательные. В точке L_1 происходит смена типа хаотического режима – теперь возникает дополнительный нулевой показатель Ляпунова, так что $\Lambda_1 > 0$, $\Lambda_{2,3} = 0$, а остальные показатели отрицательные. Далее в точках L_2, L_3, L_4 и L_5 последовательно возникает хаос с двумя, тремя, четырьмя и пятью дополнительными нулевыми показателями Ляпунова. Это некоторые характерные новые точки, мы обозначили их L – от Lyapunov exponents.

Отметим, что при приближении к точкам данного типа отрицательные показатели попарно совпадают. Так при приближении справа к L_1 показатели $\Lambda_3 = \Lambda_4$, при приближении

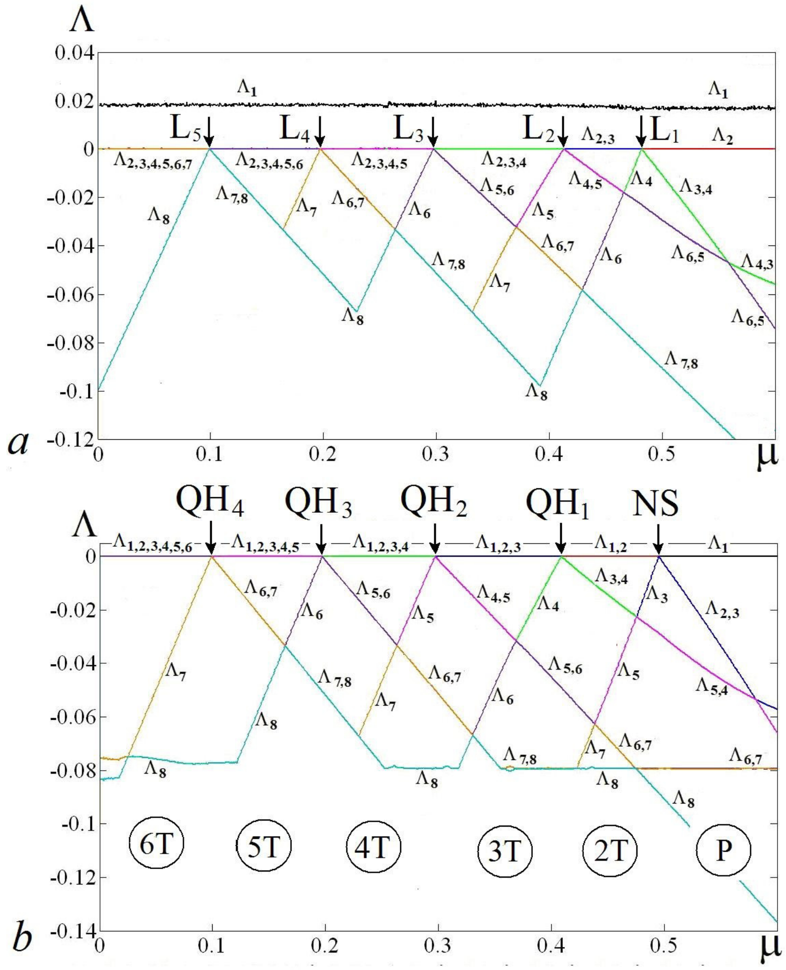

Рис. 4. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи генераторов ван дер Поля μ для $k = 0.0025$ (a), $k = 0.016$ (b). Параметры системы Кислова-Дмитриева $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

Fig. 4. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the van der Pol oscillator's coupling parameter μ for $k = 0.0025$ (a), $k = 0.016$ (b). Parameters of the Kislov-Dmitriev model are $M = 2.75$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

к L_2 – $\Lambda_4 = \Lambda_5$ и т.д. В этом поведение похоже на случай квазипериодической бифуркации Хопфа [46].

Таким образом, мы отмечаем два типа точек, отвечающих за увеличение числа нулевых показателей Ляпунова в хаосе. В первом случае поведение показателей происходит по типу седло-узловых бифуркаций торов (рис.3, точка Q_2). Во втором – по типу квазипериодических бифуркаций Хопфа (рис.4,a, точки L_n).

Увеличим теперь параметр связи k квазипериодической и хаотической подсистем до значения $k = 0.016$ (рис.4,b). В этом случае хаос оказывается подавленным за счет диссипативного характера связи. В правой части рисунка теперь наблюдается бифуркация Неймарка-Сакера NS рождения двухчастотного тора с $\Lambda_{1,2} = 0$ из предельного цикла P, для которого $\Lambda_1 = 0$. Порог этой бифуркации близок к значению $\mu \approx \lambda_5 = 0.5$, что соответствует параметру возбуждения осциллятора с наибольшим значением λ_n. При этом для остальных осцилляторов $\mu > \lambda_{4,3,2,1}$ и их колебания подавлены.

С уменьшением μ происходит последовательный каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа $QH_{1,2,3,4}$ мягкого рождения 3-тора, 4-тора, 5-тора и 6-тора. Критерием такого типа бифуркаций является равенство соответствующих пар отрицательных показателей (отмечены на рисунке) до ее порога [46]. Данную картину можно ассоциировать с несколькими шагами сценария Ландау-Хопфа. Отсюда можно сделать вывод, что сценарий Ландау-Хопфа, наблюдавшийся в ансамбле осцилляторов ван дер Поля, устойчив и не разрушается при взаимодействии с хаосом, если такая связь сравнительно велика. Более того, добавляется еще одна бифуркация Хопфа рождения устойчивого 6-тора. В этом состоит существенное отличие от сценария Рюэля-Такенса [17].

Отметим, что результаты рис.4 оказываются аналогичными случаю, когда хаотической подсистемой является система Ресслера [40]. Таким образом, продемонстрирована их определенная универсальность. В тоже время на рис.3 наблюдаются новые моменты. Далее будут продемонстрированы и другие новые особенности, связанные с возможным изменением конфигурации хаотического аттрактора для системы Кислова-Дмитриева.

5. Случай модифицированного хаотического аттрактора

Проиллюстрируем теперь режимы, которые наблюдаются при увеличении основного управляющего параметра M хаотической подсистемы. Как мы отмечали, случай $M = 3.65$ отвечает изменению конфигурации аттрактора, рис.2,b. На рис.5 для этого случая показаны графики восьми показателей Ляпунова объеденненой системы (3) в зависимости от связи подсистем k в разных диапазонах ее изменения. Параметры квазипериодической подсистемы выбраны аналогичными рис.3, так что в автономном режиме в этой подсистеме наблюдается трехчастотный режим.

В области малой связи на рис.5,a наряду с хаосом возможен также новый тип режима – гиперхаос с двумя положительными показателями $\Lambda_{1,2} > 0$. На рисунке хорошо видно, что в окрестности точки $k = 0.012$ гиперхаотический режим имеет три нулевых показателя $\Lambda_{3,4,5} = 0$. Это гиперхаос с двумя дополнительными нулевыми показателями. Таким образом, мы расширяем, начатую в [53] классификацию гиперхаоса с дополнительными показателями Ляпунова.

На рис.5,b доминирует четырехчастотный режим $4T$ с $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. В центре рисунка внутри этой области, однако, наблюдается окно хаоса с $\Lambda_1 > 0$. Этот хаос характеризуется четырьмя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Соответственно, на границах данного хаотического окна пятый показатель Λ_5 обращается в ноль. Таким образом, граничные точки этой области аналогичны точкам типа Q_3, описанным на рис.3.

В области большой связи на рис.5,c наблюдается переход от четырехчастотного $4T$ к трехчастотному $3T$ режиму. Этот переход также происходит через окно хаотического режима C. Внутри этого окна слева располагается режим с четырьмя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$, а справа – с тремя такими показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$. Хорошо видна точка перехода между этими режимами. Она аналогична описанной при обсуждении рис.3 точке Q_2.

Подводя итоги обсуждения рис.3, 4 и 5 отмечаем, что выбор другой хаотической подсистемы по отношению к случаю системы Ресслера [40] привел как к наличию универсальных закономерностей, так и существенным особенностям. Последнее особенно относится к случаю изменения конфигурации хаотического аттрактора. Поэтому представляется, что отмеченная для рис.4 универсальность имеет место, когда реализуется аттрактор Фейгенбаумовского типа.

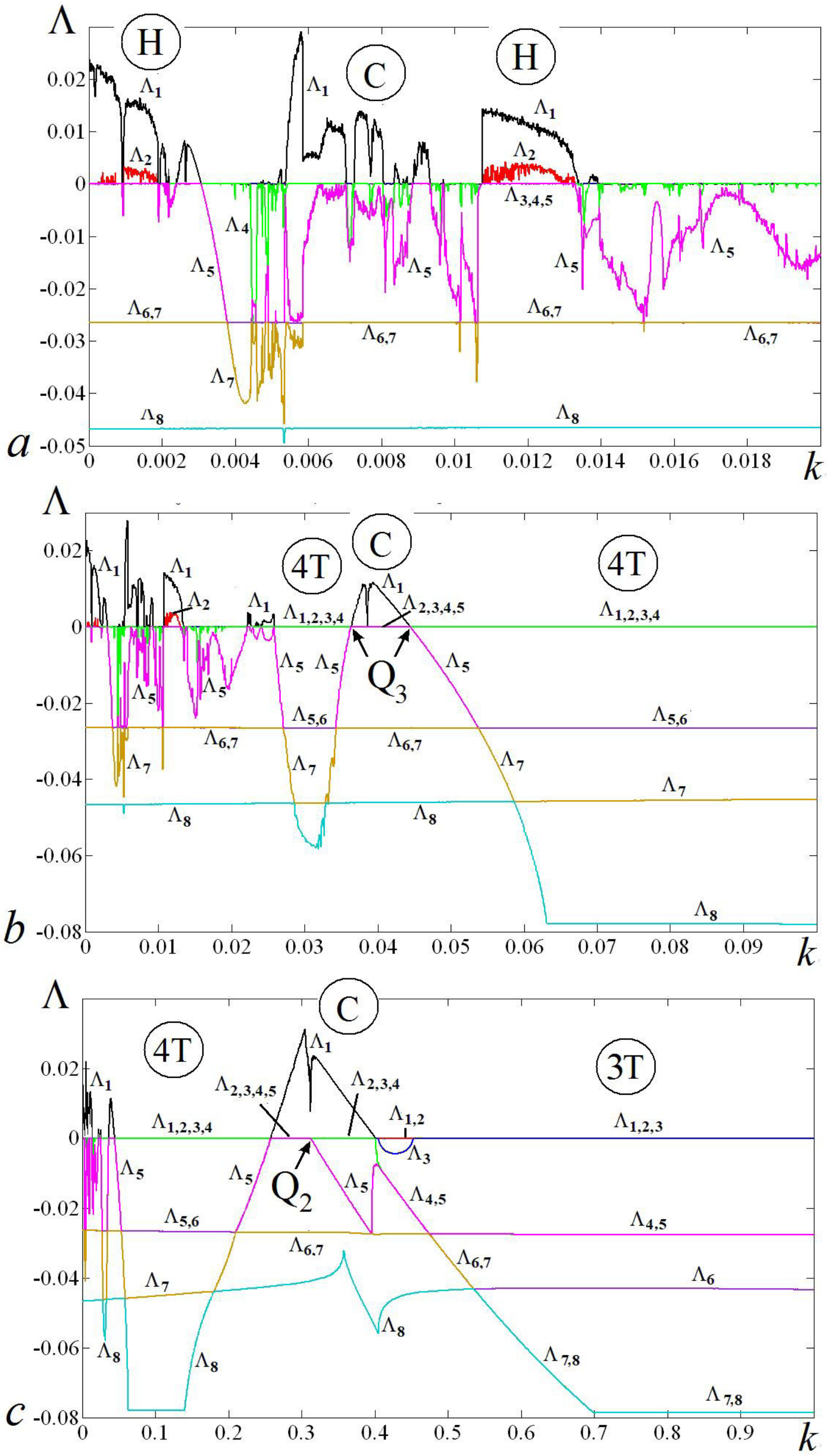

Рис. 5. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи k для разных диапазонов его изменения; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Параметры системы Кислова-Дмитриева $M = 3.65$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

Fig. 5. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the coupling parameter k for different ranges of its change; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Parameters of the Kislov-Dmitriev model are $M = 3.65$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

6. Случай хаоса с большим значением старшего показателя Ляпунова

Рассмотрим теперь случай $M = 8.2$, который как мы отмечали в разделе 2, соответствует заметно большему значению отвечающего за хаос показателю Ляпунова во второй подсистеме. Аналогичные рис.5,b (средний диапазон изменения параметра связи k) графики восьми показателей Ляпунова показаны на рис.6,a. Можно видеть существенные изменения картины.

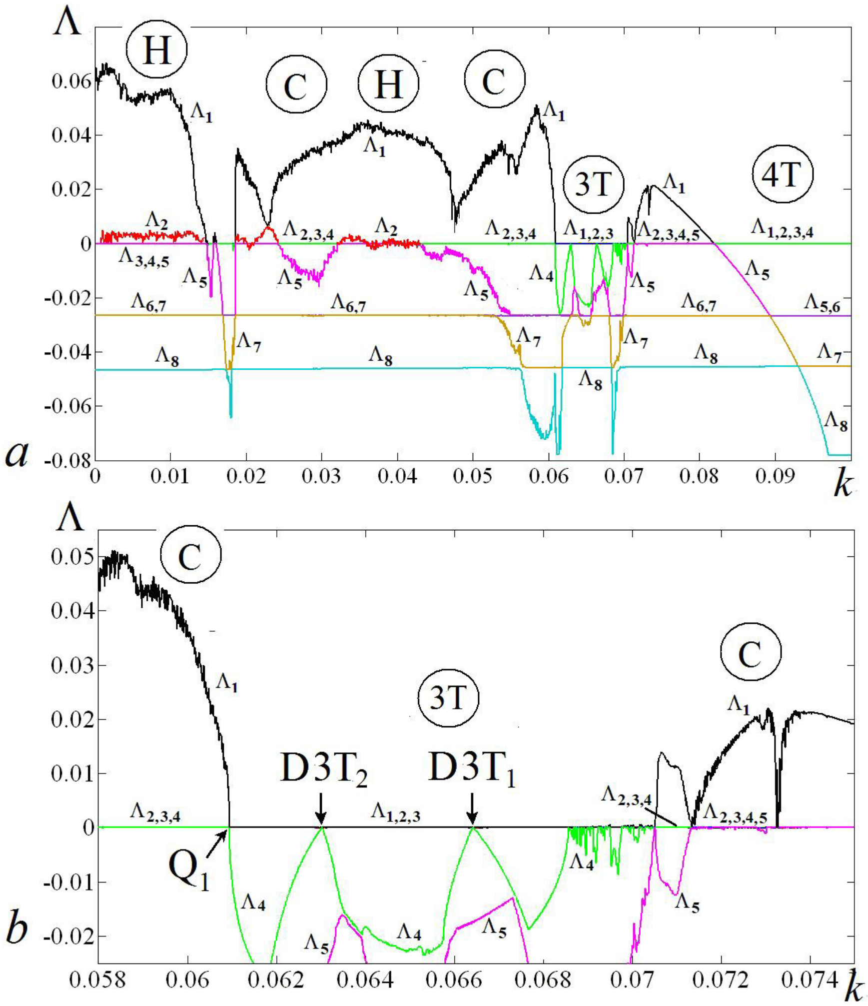

Рис. 6. Зависимость восьми показателей Ляпунова системы (3) от параметра связи k; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. Общий вид (a) и область квазипериодического окна (b). Параметры системы Кислова-Дмитриева $M = 8.2$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

Fig. 6. Graphs of the eight Lyapunov exponents of the model (3) on the coupling parameter k; $\mu = 0.25$, $\Delta = 3$. General view (a) and region of the quasi-periodic window (b). Parameters of the Kislov-Dmitriev generator are $M = 8.2$, $T = 10$, $Q = 20$, $\omega_0 = 0.5$.

При малой связи в левой части рис.6,a доминирует гиперхаос H с $\Lambda_{1,2} > 0$ и $\Lambda_{3,4,5} = 0$. Теперь области гиперхаоса H заметно шире по величине связи, чем на рис.5,b.

Далее с ростом k наблюдается хаос C с тремя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$. Внутри него также возможны области слабого гиперхаоса H. Отметим, что хаотическая и гиперхаотическая области отвечают теперь наблюдаются в заметно большем диапазоне значений параметра связи. При этом значительно больше и величина старшего показателя Λ_1. (Сравните диапазоны по вертикальной оси на рис.5,b и рис.6,a.)

При еще большей связи k хаос оказывается подавленным, и наблюдаются трехчастотные $3T$ и четырехчастотные $4T$ режимы. Отметим интересную особенность. В данном случае рождение 3-тора происходит при уменьшении, а не увеличении связи, как ранее. Это выглядит отчасти парадоксальным, поскольку представляется, что диссипативная связь должна подавлять колебания.

На рисунке области $3T$ и $4T$ разделены областью хаоса C с четырьмя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. При этом внутри нее никаких дополнительных бифуркаций не происходит.

Увеличенный фрагмент графиков в области существования трехчастотного тора $3T$ показан на рис.6,b. Он имеет вид квазипериодического окна в хаосе. При выходе через левую границу этого окна происходят последовательные бифуркации удвоения трехчастотного тора $D3T_1$ и $D3T_2$ с последующим переходом к хаосу с тремя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$. При переходе через правую границу окна наблюдаются многочисленные осцилляции четвертого показателя Λ_4 в окрестности граничной точки. Поэтому детали перехода к хаосу в этом случае трудно описать, отметим лишь наличие узких окон резонансных четырехчастотных торов. При дальнейшем увеличении связи подсистем k хаос с тремя нулевыми показателями $\Lambda_{2,3,4} = 0$ превращается в хаос с четырьмя такими показателями $\Lambda_{2,3,4,5} = 0$. Поведение показателей происходит по типу седло-узловой бифуркации, аналогично описанной выше точке Q_2. Особенность только состоит в том, что старший показатель Λ_1 имеет в точке перехода “провал”, опускаясь до нулевого значения.

7. Заключение

Рассмотрено взаимодействие квазипериодической подсистемы из пяти неидентичных осцилляторов ван дер Поля, связанной диссипативным образом с хаотической системой Кислова-Дмитриева. Анализ проведен с точки зрения возможности реализации и бифуркаций инвариантных торов разной размерности, а также возможностей трансформации хаоса с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова.

В случае трехчастотной динамики в квазипериодической подсистеме, в объединенной системе при уменьшении величины связи наблюдается достаточно сложный сценарий перехода от трех- к четырехчастотной динамике. Сначала наблюдается окно двухчастотного резонансного режима, ограниченное линиями седло-узловых бифуркаций торов. Затем трехчастотный режим сначала восстанавливается, но затем переходит к хаосу с тремя нулевыми показателями Ляпунова. Внутри этой хаотической области происходит своеобразная бифуркация, отвечающая увеличению на единицу числа нулевых показателей Ляпунова. При этом поведение показателей отчасти аналогично седло-узловой бифуркации торов. Затем снова происходит выход из хаотического окна, но уже в четырехчастотную область. Далее сценарий достаточно универсальный – переход к хаосу через удвоения тора.

При вариации параметра связи осцилляторов ван дер Поля происходит каскад трансформаций аттрактора, отвечающих поэтапному увеличению числа нулевых Ляпуновских показателей в хаотическом режиме. При приближении к точкам данного типа отрицательные показатели попарно совпадают, что характерно также для квазипериодических бифуркаций Хопфа. Данная картина является универсальной по отношению к случаю хаотической системыРесслера.

Показана устойчивость сценарий Ландау-Хопфа по отношении к взаимодействию с хаотической подсистемой в некотором диапазоне связи подсистем. Возможно даже увеличение размерности наблюдаемого многочастотного режима и дополнительная бифуркация Хопфа по отношению к квазипериодической подсистеме.

При увеличении параметра нелинейности в системе Кислова-Дмитриева и соответствующего изменения конфигурации хаотического аттрактора в объединенной системе возможно появление гиперхаоса с тремя нулевыми показателями Ляпунова.

При еще большем значении этого параметра гиперхаос и хаос с дополнительными нулевыми показателями доминируют в широком диапазоне величины связи. При уменьшении связи наблюдается также инвертированный порядок эволюции торов – трехчастотный превращается в четырехчастотный. Описано также устройство квазипериодического трехчастотного окна в хаосе.

Отметим, что возможность новых разновидностей хаоса и гиперхаоса может представлять интерес с точки зрения возможных приложений, например, в задачах коммуникации.

Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743
2. *Ланда П. С.* Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 360 с.
3. *Balanov A. G., Janson N. B., Postnov D. E., Sosnovtseva O. V.* Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009. 425 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
4. *Кузнецов А. П., Емельянова Ю. П., Сатаев И. Р., Тюрюкина Л. В.* Синхронизация в задачах. Саратов: Издательский центр «Наука», 2010. 256 с.
5. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, 2023. 703 p. DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4
6. *Kuznetsov Yu. A., Meijer H. G. E.* Numerical bifurcation analysis of maps: from theory to software. Cambridge University Press. House, 2019. 420 p. DOI: 10.1017/9781108585804.
7. *Chen X., Qian S., Yu F., Zhang Z., Shen H., Huanga Y., Cai S., Deng Z., Li Y., Du S.* Pseudorandom number generator based on three kinds of four-wing memristive hyperchaotic system and its application in image encryption // Complexity. 2020. Vol. 20, P. 1–17. DOI: 10.1155/2020/8274685.
8. *Přibylová L., Ševčík J., Eclerová V., Klimeš P., Brázdil M., Meijer H. G.* Weak coupling of neurons enables very high-frequency and ultra-fast oscillations through the interplay of synchronized phase shifts // Network Neuroscience. 2024. Vol. 8, no. 1. P. 293–318. DOI: 10.1162/netn_a_00351.
9. *Bucolo M., Buscarino A., Fortuna L., Gagliano S.* Multidimensional discrete chaotic maps // Frontiers in Physics. 2022. Vol. 10, P. 862376 DOI: 10.3389/fphy.2022.862376.
10. *Kopp M.* New 7D and Memristor-Based 8D Chaotic Systems: Computer Modeling and Circuit Implementation // Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering. 2024. Vol. 16, no. 1. P. 13–23. DOI: 10.54554/jtec.2024.16.01.003.
11. *Kurbako A. V., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D.* Adaptive control of nonsynchronous oscillations in network of identical electronic neuron-like generators // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, no. 10. P. 38–41. DOI: 10.21883/TPL.2022.10.54796.19328.
12. *Корнеев И. А., Слепнев А. В., Семенов В. В., Вадивасова Т. Е.* Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28, № 3. С. 324–340. DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
13. *Singhal B., Kiss I. Z., Li J. S.* Optimal phase-selective entrainment of heterogeneous oscillator

ensembles // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2023. Vol. 22, no. 3. P. 2180–22053. DOI: 10.1137/22M152120.

14. *Mircheski P., Zhu J., Nakao H.* Phase-amplitude reduction and optimal phase locking of collectively oscillating networks // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2023. Vol. 33, no. 10. P. 103111. DOI: 10.1063/5.0161119.
15. *Ландау Л. Д.* К проблеме турбулентности // ДАН СССР. 1944. Т. 44, № 8. С. 339–342.
16. *Hopf E.* A mathematical example displaying features of turbulence // Comm. Pure Appl. Math. 1948. Vol. 1. P. 303–322.
17. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. Vol. 20. P. 167–192.
18. *Anishchenko V., Nikolaev S., Kurths J.* Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions // Physical Review E. 2006. Vol. 73, no. 5. P. 056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
19. *Anishchenko V. S., Nikolaev S. M.* Transition to chaos from quasiperiodic motions on a four-dimensional torus perturbed by external noise // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008. Vol. 18, no. 9. P. 2733–2741. DOI: 10.1142/S0218127408021956.
20. *Анищенко В. С., Николаев С. М.* Устойчивость, синхронизация и разрушение квазипериодических колебаний // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2006. Т. 2, № 3. С. 267–278. DOI: 10.20537/nd0603001.
21. *Emelianova Y. P., Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* Synchronization and multifrequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2013. Vol. 244, no. 1. P. 36–49. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012.
22. *Stankevich N. V., Kuznetsov A. P., Seleznev E. P.* Chaos and hyperchaos arising from the destruction of multifrequency tori // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 147. P. 110998. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110998.
23. *Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Y. V.* Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 7, no. 1. P. 105–110. DOI: 10.5890/JAND.2018.03.009.
24. *Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V.* Different modes of three coupled generators capable of demonstrating quasiperiodic oscillations // Technical Physics Letters. 2022. Vol. 48, no. 12. P. 56–59. DOI: 10.21883/TPL.2022.12.54949.19296.
25. *Hidaka S., Inaba N., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation analysis of four-frequency quasiperiodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map // Physics Letters A. 2015. Vol. 379, no. 7. P. 664–668. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.12.022.
26. *Hidaka S., Inaba N., Kamiyama K., Sekikawa M., Endo T.* Bifurcation structure of an invariant three-torus and its computational sensitivity generated in a three-coupled delayed logistic map // Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE. 2015. Vol. 6, no. 3. P. 433–442. DOI: 10.1587/nolta.6.433.
27. *Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V.* Discrete Rössler Oscillators: Maps and Their Ensembles // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2023. Vol. 33, no. 15. P. 2330037. DOI: 10.1142/S0218127423300379.
28. *Borkowski L., Stefanski A.* Stability of the 3-torus solution in a ring of coupled Duffing oscillators // The European Physical Journal Special Topics. 2020. Vol. 229, no. 12. P. 2249–2259. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900276-4.
29. *Evstigneev N. M.* Laminar-turbulent bifurcation scenario in 3D Rayleigh-Benard convection problem // Open Journal of Fluid Dynamics. 2016. Vol. 6, no. 4. P. 496–539. DOI: 10.4236/ojfd.2016.64035.
30. *Nosov V. V., Grigoriev V. M., Kovadlo P. G., Lukin V. P., Nosov E. V., Torgaev A. V.*

Astroclimate of specialized stations of the Large solar vacuum telescope: Part II // Fourteenth International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics/Atmospheric Physics. SPIE, 2008. Vol. 6936. P. 181–192. DOI: 10.1117/12.783159.
31. *Herrero R., Farjas J., Pi F., Orriols G.* Nonlinear complexification of periodic orbits in the generalized Landau scenario // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2022. Vol. 32, no. 2. P. 023116. DOI: 10.1063/5.0069878.
32. *Krysko A. V., Awrejcewicz J., Papkova I. V., Krysko V. A.* Routes to chaos in continuous mechanical systems: Part 2. Modelling transitions from regular to chaotic dynamics // Chaos, Solitons & Fractals. 2012. Vol. 45, no. 6. P. 709–720. DOI: 10.1016/j.chaos.2012.02.001.
33. *Awrejcewicz J, Krysko V. A.* Scenarios of Transition from Harmonic to Chaotic Motion // Chaos in Structural Mechanics. Springer, 2008. P. 225–233. DOI: 10.1007/978-3-540-77676-5_10.
34. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R., Turukina L. V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // Physics Letters A. 2013. Vol. 377, no. 45–48. P. 3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
35. *Kulikov A. N.* Landau-Hopf scenario of passage to turbulence in some problems of elastic stability theory // Differential equations. 2012. Vol. 48. P. 1258–1271. DOI: 10.1134/S0012266112090066.
36. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* A possibility of realizing the Landau—Hopf scenario in the problem of tube oscillations under the action of a fluid flow // Theoretical and Mathematical Physics. 2020. Vol. 203, no. 1. P. 501–511. DOI: 10.1134/S0040577920040066.
37. *Kulikov A. N.* Bifurcations of invariant tori in second-order quasilinear evolution equations in Hilbert spaces and scenarios of transition to turbulence // Journal of Mathematical Sciences. 2022. Vol. 262, no. 6. P. 809–816. DOI: 10.1007/s10958-022-05859-z.
38. *Kuznetsov A. P., Sedova Y. V., Stankevich N. V.* Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics // Chaos, Solitons & Fractals. 2023. Vol. 169. P. 113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.
39. *Кузнецов А. П., Седова Ю. В.* Динамика связанных квазипериодического генератора и системыРесслера // Письма в Журнал технической физики. 2023. Vol. 49, no. 2. P. 17–20. DOI: 10.21883/PJTF.2023.02.54280.19289.
40. *Kuznetsov A. P., Turukina L. V.* About the chaos influence on a system with multi-frequency quasi-periodicity and the Landau-Hopf scenario // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2024. Vol. 470B, P. 134425. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134425.
41. *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 277 с.
42. *Дмитриев А. С.* Сорок лет модели кольцевого генератора Дмитриева-Кислова // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 4. С. 423–427. DOI: 10.18500/0869-6632-003119.
43. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 295 с.
44. *Дмитриев А., Ефремова Е., Максимов Н., Панас А.* Генерация хаоса. М.: Техносфера, 2012. 424 с.
45. *Emelyanova Y. P., Kuznetsov A. P.* Synchronization of coupled van der pole and Kislov-Dmitriev self-oscillators // // Technical Physics. 2011. Vol. 56, no. 4. P. 435–. DOI: 10.1134/S106378421104013X.
46. *Vitolo R., Broer H., Simó C.* Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems // Regular and chaotic dynamics. 2011. Vol. 16. P. 154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
47. *Broer H., Vitolo R., Simó C.* Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate

model with seasonal forcing // EQUADIFF 2003. 2005. P. 601–607.
DOI: 10.1142/9789812702067_0100.
48. *Broer H., Simó C., Vitolo R.* Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing // Nonlinearity. 2002. Vol. 15, no. 4. P. 1205–1267.
DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
49. *Broer H.W., Simó C., Vitolo R.* Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2010. Vol. 14, no. 3. P. 871–905.
DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
50. *Попова Е. С., Станкевич Н. В., Кузнецов А. П.* Каскад бифуркаций удвоения инвариантной кривой и квазипериодический аттрактор Эно в дискретной модели Лоренца-84 // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2020. Т. 20, № 3. С. 222–232. DOI: 10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232.
51. *Stankevich N. V., Shchegoleva N. A., Sataev I. R., Kuznetsov A. P.* Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2020. Vol. 15, no. 11. P. 111001.
DOI: 10.1115/1.4048025.
52. *Grines E. A., Kazakov A., Sataev I. R.* On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2022. Vol. 32, no. 9. P. 093105.
DOI: 10.1063/5.0098163.
53. *Garashchuk I., Kazakov A., Sinelshchikov D.* Scenarios for the appearance of strange attractors in a model of three interacting microbubble contrast agents // Chaos, Solitons & Fractals. 2024. Vol. 182. P. 114785. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114785.
54. *Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Kazakov A.* Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021. Vol. 31, no. 1. P. 011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
55. *Shykhmamedov A., Karatetskaia E., Kazakov A., Stankevich N.* Scenarios for the creation of hyperchaotic attractors in 3D maps // Nonlinearity. 2023. Vol. 36, no. 7. P. 3501.
DOI: 10.1088/1361-6544/acd044.
56. *Muni S. S.* Ergodic and resonant torus doubling bifurcation in a three-dimensional quadratic map // Nonlinear Dynamics. 2024. Vol. 112, no. 6. P. 4651–4661. DOI: 10.1007/s11071-024-09284-6.
57. *Muni S. S.* Persistence of resonant torus doubling bifurcation under polynomial perturbations // Franklin Open. 2025. Vol. 10, P. 100207. DOI: 10.1016/j.fraope.2024.100207.

References

1. Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J Synchronization: a universal concept in nonlinear science. Cambridge University Press, 2001. 411 p. DOI: 10.1017/CBO9780511755743
2. Landa PS Self-oscillations in systems with a finite number of degrees of freedom. Moscow: LIBROCOM; 2010. 360 c. (in Russian)
3. Balanov AG, Janson NB, Postnov DE, Sosnovtseva OV Synchronization: from simple to complex. Springer, 2009. 425 p. DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4.
4. Kuznetsov AP, Emelyanova YuP, Sataev IR, Turukina LV Synchronization in tasks. Saratov: Publishing Center “Science”; 2010. 256 c. (in Russian)
5. Kuznetsov YuA Elements of Applied Bifurcation Theory. Springer, 2023. 703 p.
DOI: 10.1007/978-3-031-22007-4
6. Kuznetsov YuA, Meijer HGE Numerical bifurcation analysis of maps: from theory to software. Cambridge University Press. House, 2019. 420 p. DOI: 10.1017/9781108585804.

7. Chen X, Qian S, Yu F, Zhang Z, Shen H, Huanga Y, Cai S, Deng Z, Li Y, Du S Pseudorandom number generator based on three kinds of four-wing memristive hyperchaotic system and its application in image encryption. Complexity. 2020;20:1–17. DOI: 10.1155/2020/8274685.
8. Přibylová L, Ševčík J, Eclerová V, Klimeš P, Brázdil M, Meijer HG Weak coupling of neurons enables very high-frequency and ultra-fast oscillations through the interplay of synchronized phase shifts. Network Neuroscience. 2024;8(1):293–318. DOI: 10.1162/netn_a_00351.
9. Bucolo M, Buscarino A, Fortuna L, Gagliano S Multidimensional discrete chaotic maps. Frontiers in Physics. 2022;10:862376 DOI: 10.3389/fphy.2022.862376.
10. Kopp M New 7D and Memristor-Based 8D Chaotic Systems: Computer Modeling and Circuit Implementation. Journal of Telecommunication, Electronic and Computer Engineering. 2024;16(1):13–23. DOI: 10.54554/jtec.2024.16.01.003.
11. Kurbako AV, Ponomarenko VI, Prokhorov MD Adaptive control of nonsynchronous oscillations in network of identical electronic neuron-like generators. Technical Physics Letters. 2022;48(10): 38–41. DOI: 10.21883/TPL.2022.10.54796.19328.
12. Korneev IA, Slepnev AV, Semenov VV, Vadivasova TE Wave processes in a ring of memristively coupled self-excited oscillators. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2020;28(3):324–340. (in Russian) DOI: 10.18500/0869-6632-2020-28-3-324-340.
13. Singhal B, Kiss IZ, Li JS Optimal phase-selective entrainment of heterogeneous oscillator ensembles. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2023;22(3):2180–22053. DOI: 10.1137/22M152120.
14. Mircheski P, Zhu J, Nakao H Phase-amplitude reduction and optimal phase locking of collectively oscillating networks. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2023;33(10):103111. DOI: 10.1063/5.0161119.
15. Landau LD On the problem of turbulence. Dokl. Akad. Nauk USSR. 1944;44(8):339–342. (in Russian)
16. Hopf E A mathematical example displaying features of turbulence. Comm. Pure Appl. Math. 1948;1:303–322.
17. Ruelle D, Takens F On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 1971;20:167–192.
18. Anishchenko V, Nikolaev S, Kurths J Winding number locking on a two-dimensional torus: Synchronization of quasiperiodic motions. Physical Review E. 2006;73(5):056202. DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202.
19. Anishchenko VS, Nikolaev SM Transition to chaos from quasiperiodic motions on a four-dimensional torus perturbed by external noise. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2008;18(9):2733–2741. DOI: 10.1142/S0218127408021956.
20. Anishchenko VS, Nikolaev SM Stability, synchronization and destruction of quasiperiodic motions. Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2006;2(3):267–278. (in Russian) DOI: 10.20537/nd0603001.
21. Emelianova YP, Kuznetsov AP, Sataev IR, Turukina LV Synchronization and multi-frequency oscillations in the low-dimensional chain of the self-oscillators. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2013;244(1):36–49. DOI: 10.1016/j.physd.2012.10.012.
22. Stankevich NV, Kuznetsov AP, Seleznev EP Chaos and hyperchaos arising from the destruction of multifrequency tori. Chaos, Solitons & Fractals. 2021;147:110998. DOI: 10.1016/j.chaos.2021.110998.
23. Kuznetsov AP, Sataev IR, Sedova YV Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions. Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2018;7(1):105–110. DOI: 10.5890/JAND.2018.03.009.
24. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV Different modes of three coupled generators

capable of demonstrating quasiperiodic oscillations. Technical Physics Letters. 2022;48(12):56–59. DOI: 10.21883/TPL.2022.12.54949.19296.
25. Hidaka S, Inaba N, Sekikawa M, Endo T Bifurcation analysis of four-frequency quasi-periodic oscillations in a three-coupled delayed logistic map. Physics Letters A. 2015;379(7):664–668. DOI: 10.1016/j.physleta.2014.12.022.
26. Hidaka S, Inaba N, Kamiyama K, Sekikawa M, Endo T Bifurcation structure of an invariant three-torus and its computational sensitivity generated in a three-coupled delayed logistic map. Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE. 2015;6(3):433–442. DOI: 10.1587/nolta.6.433.
27. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV Discrete Rössler Oscillators: Maps and Their Ensembles. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2023;33(15):2330037. DOI: 10.1142/S0218127423300379.
28. Borkowski L, Stefanski A Stability of the 3-torus solution in a ring of coupled Duffing oscillators. The European Physical Journal Special Topics. 2020;229(12):2249–2259. DOI: 10.1140/epjst/e2020-900276-4.
29. Evstigneev NM Laminar-turbulent bifurcation scenario in 3D Rayleigh-Benard convection problem. Open Journal of Fluid Dynamics. 2016;6(4):496–539. DOI: 10.4236/ojfd.2016.64035.
30. Nosov VV, Grigoriev VM, Kovadlo PG, Lukin VP, Nosov EV, Torgaev AV Astroclimate of specialized stations of the Large solar vacuum telescope: Part II. Fourteenth International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics/Atmospheric Physics. SPIE, 2008. DOI: 10.1117/12.783159.
31. Herrero R, Farjas J, Pi F, Orriols G Nonlinear complexification of periodic orbits in the generalized Landau scenario. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2022;32(2):023116. DOI: 10.1063/5.0069878.
32. Krysko AV, Awrejcewicz J, Papkova IV, Krysko VA Routes to chaos in continuous mechanical systems: Part 2. Modelling transitions from regular to chaotic dynamics. Chaos, Solitons & Fractals. 2012;45(6):709–720. DOI: 10.1016/j.chaos.2012.02.001.
33. Awrejcewicz J, Krysko VA Scenarios of Transition from Harmonic to Chaotic Motion. Chaos in Structural Mechanics. Springer. 2008. DOI: 10.1007/978-3-540-77676-5_10.
34. Kuznetsov AP, Kuznetsov SP, Sataev IR, Turukina LV About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators. Physics Letters A. 2013;377(45–48):3291–3295. DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013.
35. Kulikov AN Landau-Hopf scenario of passage to turbulence in some problems of elastic stability theory. Differential equations. 2012;48:1258–1271. DOI: 10.1134/S0012266112090066.
36. Kulikov AN, Kulikov DA A possibility of realizing the Landau—Hopf scenario in the problem of tube oscillations under the action of a fluid flow. Theoretical and Mathematical Physics. 2020;203(1):501–511. DOI: 10.1134/S0040577920040066.
37. Kulikov AN Bifurcations of invariant tori in second-order quasilinear evolution equations in Hilbert spaces and scenarios of transition to turbulence. Journal of Mathematical Sciences. 2022;262(6):809–816. DOI: 10.1007/s10958-022-05859-z.
38. Kuznetsov AP, Sedova YV, Stankevich NV Coupled systems with quasi-periodic and chaotic dynamics. Chaos, Solitons & Fractals. 2023;169:113278. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113278.
39. Kuznetsov AP, Sedova YV Dynamics of coupled quasiperiodic generator and Rossler system. Technical Physics Letters. 2023;49(1):58–61. DOI: 10.21883/TPL.2023.01.55351.19289.
40. Kuznetsov AP, Turukina LV About the chaos influence on a system with multi-frequency quasi-periodicity and the Landau-Hopf scenario. Physica D: Nonlinear Phenomena. 2024;470B: 134425. DOI: 10.1016/j.physd.2024.134425.
41. Dmitriev AS, Kislov VYa Stochastic oscillations in radiophysics and electronics. Moscow:

Nauka; 1989. 277 с. (in Russian)
42. Dmitriev AS Forty years of the Dmitriev-Kislov ring oscillator model. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2024;32(4):423–427. (in Russian) DOI: 10.18500/0869-6632-003119.
43. Kuznetsov SP Dynamic chaos. Moscow: Fizmatlit; 2001. 295 с. (in Russian)
44. Dmitriev A, Efremova E, Maksimov N, Panas A Chaos generation. Moscow: Tekhnosfera; 2012. 424 с. (in Russian)
45. Emelyanova YP, Kuznetsov AP Synchronization of coupled van der pole and Kislov-Dmitriev self-oscillators. Technical Physics. 2011;56(4):435–442. DOI: 10.1134/S106378421104013X.
46. Vitolo R, Broer H, Simó C Quasi-periodic bifurcations of invariant circles in low-dimensional dissipative dynamical systems. Regular and chaotic dynamics. 2011;16:154–184. DOI: 10.1134/S1560354711010060.
47. Broer H, Vitolo R, Simó C Quasi-periodic Hénon-like attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. EQUADIFF 2005. 2005. DOI: 10.1142/9789812702067_0100.
48. Broer H, Simó C, Vitolo R Bifurcations and strange attractors in the Lorenz-84 climate model with seasonal forcing. Nonlinearity. 2002;15(4):1205–1267. DOI: 10.1088/0951-7715/15/4/312.
49. Broer HW, Simó C, Vitolo R Chaos and quasi-periodicity in diffeomorphisms of the solid torus. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2010;14(3):871–905. DOI: 10.3934/dcdsb.2010.14.871.
50. Popova ES, Stankevich NV, Kuznetsov AP Cascade of Invariant Curve Doubling Bifurcations and Quasi-Periodic Hénon Attractor in the Discrete Lorenz-84 Model. Izvestiya of Saratov University. Physics. 2020;20(3):222–232. (in Russian) DOI: 10.18500/1817-3020-2020-20-3-222-232.
51. Stankevich NV, Shchegoleva NA, Sataev IR, Kuznetsov AP Three-dimensional torus breakdown and chaos with two zero Lyapunov exponents in coupled radio-physical generators. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2020;15(11):111001. DOI: 10.1115/1.4048025.
52. Grines EA, Kazakov A, Sataev IR On the origin of chaotic attractors with two zero Lyapunov exponents in a system of five biharmonically coupled phase oscillators. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2022;32(9):093105. DOI: 10.1063/5.0098163.
53. Garashchuk I., Kazakov A., Sinelshchikov D. Scenarios for the appearance of strange attractors in a model of three interacting microbubble contrast agents. Chaos, Solitons & Fractals. 2024; 182:114785. DOI: 10.1016/j.chaos.2024.114785.
54. Karatetskaia E., Shykhmamedov A., Kazakov A. Shilnikov attractors in three-dimensional orientation-reversing maps. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2021; 31(1):011102. DOI: 10.1063/5.0036405.
55. Shykhmamedov A., Karatetskaia E., Kazakov A., Stankevich N. Scenarios for the creation of hyperchaotic attractors in 3D maps. Nonlinearity. 2023;36(7):3501. DOI: 10.1088/1361-6544/acd044.
56. Muni SS Ergodic and resonant torus doubling bifurcation in a three-dimensional quadratic map. Nonlinear Dynamics. 2024;112(6):4651–4661. DOI: 10.1007/s11071-024-09284-6.
57. Muni SS Persistence of resonant torus doubling bifurcation under polynomial perturbations. Franklin Open. 2025;10:100207. DOI: 10.1016/j.fraope.2024.100207.

Кузнецов Александр Петрович — родился в 1957 . Доктор физико-математических наук (1996), имеет звание профессора (2002). В настоящее время ведущий научный сотрудник Саратовского филиала Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН. Научные интересы — динамические ситемы, теория бифуркаций, синхронизация, квазипериодические колебания и их приложения. Имеет более 150 научных статей в российских и международных журналах по указанным направлениям. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций. Автор оригинальных учебных курсов для факультета нелинейных процессов СГУ и Лицея прикладных наук. Автор и соавтор 12 монографий, учебников и задачников по нелинейной динамие, теории колебаний и физике. Среди них: “Нелинейные колебания”, “Линейные колебания и волны” (сборник задач), “Нелинейность: от колебаний к хаосу”, “Синхронизация в задачах”, “Бифуркации отображений”, “Как работают и думают физики”, “Задачи физических олимпиад” и др.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
E-mail: kuzalexp@yandex.ru
ORCID: 0000-0001-5528-1979
AuthorID (eLibrary.Ru): 509

Тюрюкина Людмила Владимировна — родилась в Саратове (1977). Окончила с отличием факультет нелинейных процессов Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (2000). Кандидат физико-математических наук (СГУ, 2003), имеет звание доцента по специальности "Радиофизика"(2009). В настоящее время работает в Саратовском филиале Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН и доцентом на кафедре динамических систем Института физики СГУ на базе СФ ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. Научные интересы — динамический хаос, квазипериодические колебание, синхронизация. Имеет более 50 научных статей по указанным направлениям.

Россия, 410019 Саратов, ул. Зеленая, 38
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН
Россия, 410012 Саратов, ул. Астраханская, 83
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: turukinalv@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-4221-8900
AuthorID (eLibrary.Ru): 39405